MATEMÁTICA

Educación General Básica - Subnivel Superior

10

Texto de consulta y cuaderno de trabajo.

Ministerio de Educación

REPÚBLICA DEL ECUADOR

Queridos estudiantes y docentes,

Es una profunda alegría dirigirnos a ustedes en este momento tan significativo, donde reafirmamos el compromiso del Ministerio de Educación con su desarrollo y su futuro. La educación es el motor que impulsa los sueños, el puente hacia nuevas oportunidades y el cimiento sobre el cual construiremos juntos una sociedad más justa, solidaria y próspera.

Los textos escolares que hoy llegan a sus manos no son solo herramientas de aprendizaje; son ventanas al conocimiento, puertas hacia la imaginación y compañeros de aventura en el camino del saber. A través de sus páginas, descubrirán historias que los inspirarán, resolverán desafíos que fortalecerán su pensamiento crítico y explorarán culturas que los conectarán con el mundo.

Este texto es un testimonio de nuestro esfuerzo por garantizar que cada niña, niño y joven del Ecuador reciba una educación pública, gratuita y de calidad. Queremos que este material sea más que un recurso académico; que sea una fuente de inspiración, una chispa que encienda su curiosidad y una guía que los ayude a alcanzar sus metas.

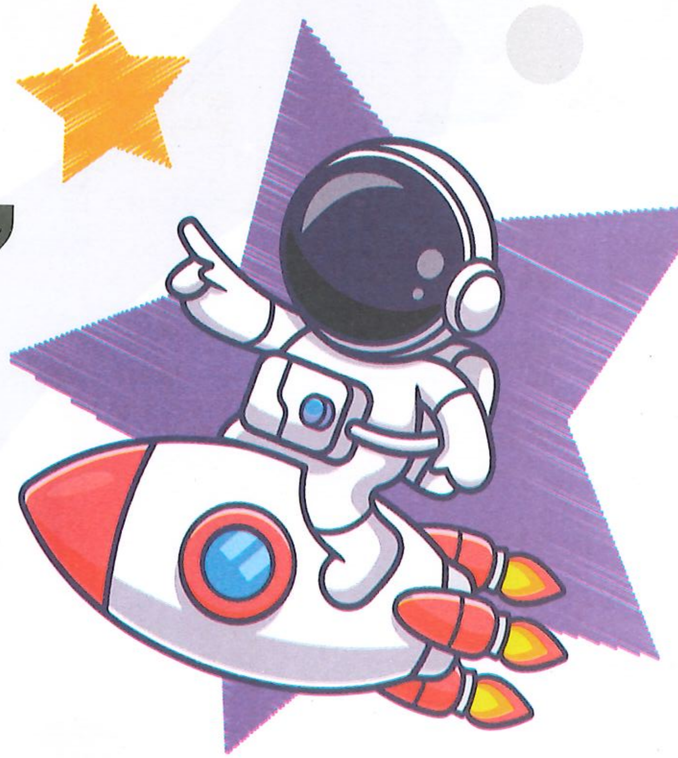
Estudiantes, el futuro está en sus manos. Cada página que lean, cada idea que cuestionen y cada conocimiento que compartan contribuirá a la construcción de sus sueños y, al mismo tiempo, al desarrollo de nuestro querido Ecuador.

Docentes, ustedes son el corazón de este proceso educativo. Gracias por su dedicación, su paciencia y su amor por la enseñanza. Su labor transforma vidas y siembra las semillas de un mejor porvenir.

Aprovechen al máximo este material. Lean con atención, hagan preguntas, busquen respuestas, compartan ideas. La educación es un compromiso que nos une a todos: estudiantes, docentes, familias y Estado.

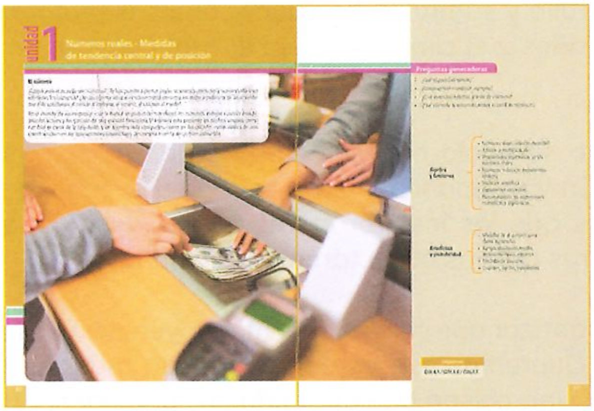
Con gratitud y esperanza, les invitamos a recorrer juntos este camino hacia el conocimiento. Porque solo a través de la educación lograremos construir un Ecuador donde cada sueño tenga la oportunidad de hacerse realidad.

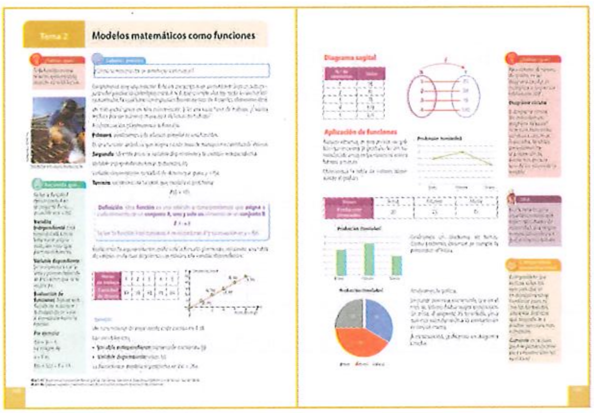
¡El conocimiento **LES PERTENECE,** EL FUTURO **TAMBIÉN!**

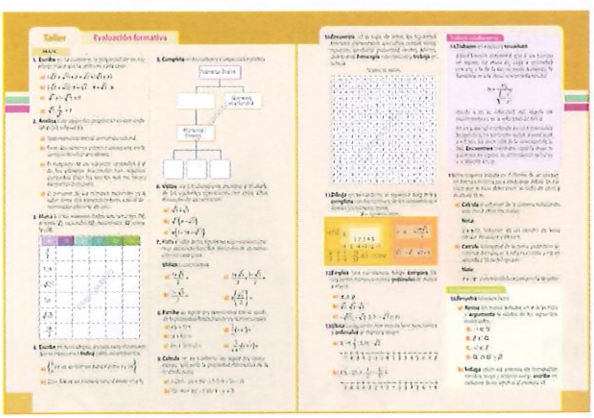


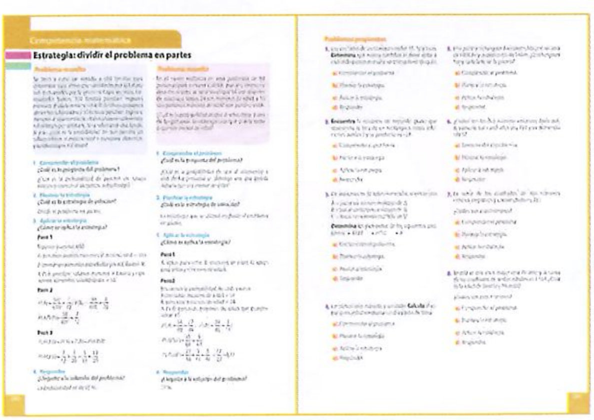
Con afecto y admiración.
Ministerio de Educación del Ecuador
2025

Conoce tu libro









El texto de Matemática para 10.° año de EGB comienza con una **Evaluación diagnóstica** que permite conocer las habilidades competencias y destrezas que los estudiantes han adquirido en 9.° año de EGB.

En la apertura de **unidad** hallarás una fotografía, un texto introductorio con lo que podrás "leer las imágenes" e interpretar matemáticamente la realidad.

También encontrarás preguntas generadoras que invitan a familiarizarse con los objetivos por alcanzar en cada unidad.

Los contenidos inician con la sección de **Saberes previos** o **Desequilibrio cognitivo**, que permiten relacionar tus experiencias y tu vida con el nuevo conocimiento. El material se apoya en fotografías, tablas, esquemas, gráficas e ilustraciones que harán más divertido el aprendizaje.

También encontrarás, de manera aleatoria, secciones interdisciplinarias como **DFA** (diversidad funcional en el aula), **¿Sabías que?, Recuerda que, Interdisciplinariedad, interculturalidad**, las cuales te permitirán vincular la matemática con otras ciencias y **Competencia digital** que te apoyará con enlaces de Internet para que refuerces tus aprendizajes mediante juegos, información y retos.

Evaluaciones formativas o talleres han sido diseñados para evaluar las destrezas, mediante actividades interesantes y dinámicas que se resuelven empleando el razonamiento lógico. Muchas de ellas fomentan la resolución de problemas y otras estimulan la aplicación de lo aprendido. Se las puede trabajar en los diversos ambientes de aprendizaje: el aula, la casa y la virtualidad.

Además, te proponemos la sección **Trabajo colaborativo** a fin de reforzar el trabajo en equipo y **Actividades indagatorias** que invitan a investigar y aplicar el contenido estudiado.

Problema-decisión. Presenta también actividades orientadas a fortalecer la capacidad de tomar decisiones, a partir del planteamiento de un problema.

En los talleres o **Evaluación formativa**, se detallan los indicadores de evaluación, que se denominan con su código por bloque curricular.

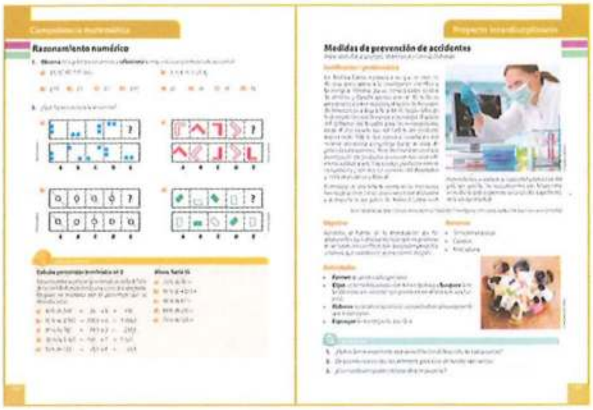
Competencia matemática favorece la aplicación de conceptos y procedimientos para solucionar problemas y situaciones matemáticas; en esta sección pondrás en juego tu inteligencia, creatividad y estrategias para resolver problemas.

La sección consta de dos partes: en la primera encontrarás el planteamiento y la resolución paso a paso de dos problemas, identificando la estrategia a emplear, hasta llegar a la solución; y en la segunda parte encontrarás una serie de problemas propuestos para que los resuelvas.

Competencia matemática asociada al desarrollo del pensamiento te ayudará a desarrollar tu aptitud verbal, razonamiento numérico y razonamiento abstracto.

Cálculo mental, por su parte, menciona estrategias para realizar cálculos rápidos.

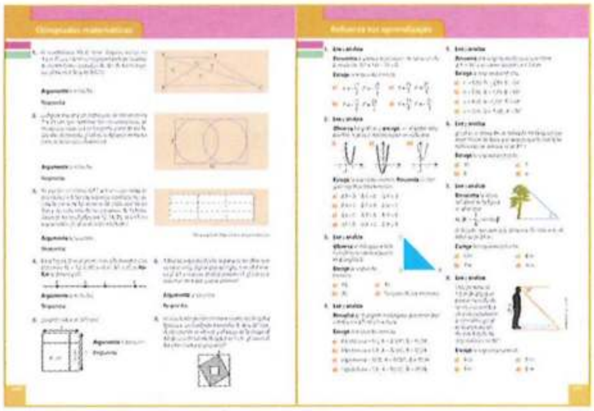
Proyecto interdisciplinario es una sección encaminada a la aplicación de la matemática en tu vida económica, social, cultural y ambiental, a través de un proyecto aplicado a diferentes contextos.



Olimpiadas matemáticas es una sección que invita a desarrollar habilidades matemáticas a través de preguntas tipo reto o concurso.

Es un instrumento que sirve para identificar tus debilidades y fortalezas, a través de preguntas de opción múltiple y que, poco a poco, te preparan para potenciar tus habilidades matemáticas.

Competencia socioemocional se encuentra distribuida a lo largo de la unidad. Te invita a desarrollar las áreas afectivas en relación con otras personas y tu desenvolvimiento en la sociedad de forma responsable y coherente con tu vida y tu futuro.

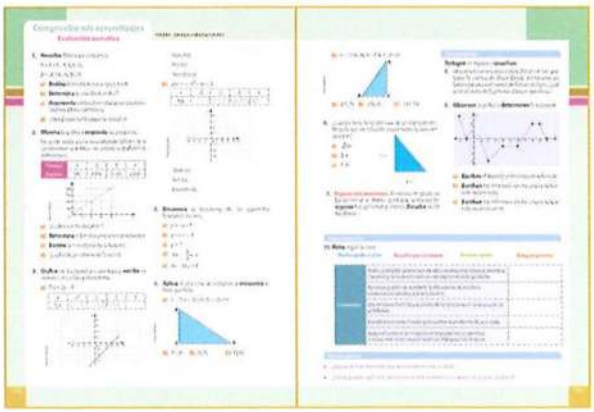


Competencia comunicacional permite desarrollar una buena comunicación para expresar y comprender ideas, pensamientos, sentimientos, conocimientos y actividades en torno de tu desenvolvimiento académico y personal.

Consta de una lectura, motivadora y de interés general, seguida de la ficha de comprensión lectora y la ficha de escritura académica.

Evaluación sumativa corresponde a la evaluación de la unidad, con opciones de respuestas y de desarrollo; son dos páginas con actividades variadas para evaluar tus destrezas. La sección incluye **heteroevaluación**, **coevaluación** y **autoevaluación**; además, de **expreso mis emociones**, donde encontrarás una pregunta que te invita a expresar lo que sientes en relación con el contexto de la unidad.

Competencia digital corresponde a tecnologías de la información y la comunicación (TIC) que se utilizan como herramientas de investigación o refuerzo del tema desarrollado.



Índice

Unidad 4 Sistemas de ecuaciones lineales y congruencia de triángulos 134

Unidad 5 Ecuaciones cuadráticas. Teorema de Thales 174

Unidad 6 Ecuaciones cuadráticas, aplicaciones y eventos 214

BC 1 **Bloque curricular 1** Álgebra y funciones

BC 2 **Bloque curricularo 2** Geometría y medida

BC 3 **Bloque curricular 3** Estadística y probabilidad

Evaluación diagnóstica

Temas de 9.º año EBG

1. **Resuelve** y **determina** ¿cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

Igualdades
i) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{81}\div\sqrt[3]{27}\right)=5$
ii) $0{,}33...\times\left(\sqrt{50}-\sqrt{18}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$
iii) $\left(0{,}25-0{,}75\right)^2\div\left(1{,}2+0{,}2\right)^2=\frac{25}{196}$
iv) $3\sqrt{20}-4\sqrt[3]{128}+\sqrt{125}-2\sqrt[3]{54}=22\sqrt{5}-11\sqrt[3]{2}$

a)	iii y iv
b)	i y ii
c)	i y iii
d)	ii y iv

2. **Resuelve** la operación y **selecciona** la respuesta correcta. $\frac{2}{3}+\left[\frac{4}{3}-0{,}5\left(2^{-1}+\frac{5}{2}\right)\right]$

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{3}{4}$

3. **Escoge** la respuesta correcta.

La expresión equivalente a $(p-4)^3$ viene dada por:

a) p^3-64 **b)** $p^3-8p+64$ **c)** $p^3-3p^2+12p-16$ **d)** $p^3-12p^2+48p-64$

4. Matías es 12 años mayor que su hermano Julián y se conoce que hace 6 años Matías le doblaba en edad. La edad de Julián expresada en años es:

a) 18 años **b)** 30 años **c)** 12 años **d)** 24 años

5. Un cuadrado mide de lado $2x-3$. Las expresiones correspondientes a su perímetro y su área son:

a) $8x-3$ $4x^2-12x+6$ **c)** $8x-12$ $4x^2-12x+9$

b) $4x-6$ $4x^2+9$ **d)** $4x-6$ $4x^2-9$

6. **Resuelve** y **determina**. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son correctas?

Igualdades
i) $2x^2+\left\{-3y^3+5\left[x^2-4\right]+\left(1-x^2+6y^3\right)\right\}=6x^2+3y^3$
ii) $\left(2-3x^2\right)^2=9x^4-12x^2+4$
iii) $10y^2-29y-21=\left(5y-3\right)\left(2y+7\right)$
iv) $\left(7a-6b\right)\left(7a+6b\right)=49a^2-36b^2$
v) $100m^2-60mn+9n^2=\left(10m+3n\right)^2$
vi) $\left(x+4\right)\left(x-8\right)=x^2-4x+32$

a)	i y iii
b)	iv y vi
c)	iii y v
d)	ii y iv

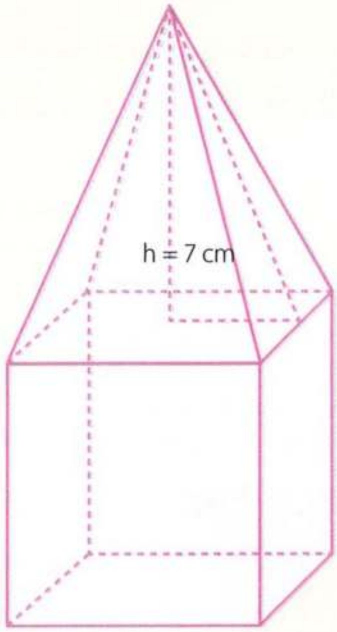
7. **Calcula** el volumen de la figura y **selecciona** la respuesta correcta.

a) 194 cm^3

b) 300 cm^3

c) 183 cm^3

d) 238 cm^3



8. **Selecciona** las expresiones que están resueltas correctamente.

Igualdades
i) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{-4}-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}\times1\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$
ii) $0{,}5+1{,}22...-\left(0{,}33...+\frac{2}{9}\right)^{-1}=-\frac{7}{9}$
iii) $\left(\frac{3}{5}\pi-\frac{2}{5}\pi\right)\times\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1}\times\sqrt{\frac{25}{16\pi^4}}\right)=\frac{1}{4}$
iv) $\sqrt{27}+5\sqrt{128}-\sqrt{243}+4\sqrt{200}=80\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

a)	iii y iv
b)	i y iii
c)	i y ii
d)	ii y iv

9. **Elimina** signos de agrupación y **reduce** términos semejantes.

$$5x+\left(\frac{1}{2}y-0{,}55...x\right)-\frac{1}{3}\left[-(2y+0{,}75)+0{,}3x\right]$$

a) $4{,}4x+1{,}166...y+0{,}25$

b) $2{,}44...x-0{,}2y+1{,}4$

c) $4{,}4x-1{,}166...y-0{,}25$

d) $2{,}44...x+0{,}2y-1{,}4$

10. **Selecciona** la respuesta correcta al resolver $\left(4x^2-3x+7\right)\left(-x^2+2x-6\right)$

a) $-4x^4+11x^3+37x^2-32x+42$

b) $4x^4+11x^3-37x^2+32x-42$

c) $4x^4-11x^3+37x^2+32x-42$

d) $-4x^4+11x^3-37x^2+32x-42$

unidad 1

Números reales - Medidas de tendencia central y de posición

El número

¿Cómo sería el mundo sin números? ¿Te has puesto a pensar algún momento cómo sería nuestra vida si no existieran los números? ¿Te das cuenta de que el número está presente en todas y cada una de las actividades más cotidianas: al contar, al ordenar, al repartir, al calcular, al medir?

En el mundo de los negocios y de la banca se ponen de manifiesto los números enteros cuando analizamos los activos y los pasivos de una entidad financiera. El número está presente en hechos simples, como cambiar el canal de la televisión, y en asuntos más complejos, como en los cálculos estructurales de una construcción o en las transacciones comerciales de compra o venta de un bien inmueble.

Preguntas generadoras

- ¿Qué es para ti el número?
- ¿Cómo sería el mundo sin números?
- ¿Cuál es el conjunto más grande de números?
- ¿Qué números aparecen al cambiar el canal de televisión?

Álgebra y funciones

- Números reales, relación de orden
- Adición y multiplicación
- Propiedades algebraicas de los números reales
- Números reales con exponentes enteros
- Notación científica
- Exponentes racionales
- Racionalización de expresiones numéricas y algebraicas

Estadística y probabilidad

- Medidas de dispersión para datos agrupados
- Rango, desviación media, desviación típica, varianza
- Medidas de posición
- Cuartiles, deciles, percentiles

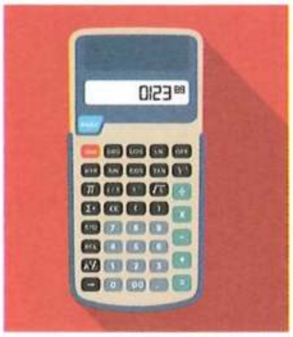
Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.4. / O.M.4.7.

Tema 1 El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

Competencia socioemocional

El trabajo en grupo es muy importante para lograr objetivos y tu aporte es fundamental. **Expresa** tu opinión y criterios de una forma apropiada.



Shutterstock, 620060825.

Desequilibrio cognitivo

Sean los números $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $b = 2 + 3\sqrt{2}$.

¿A qué conjunto de números pertenecen los números formados en *a* y *b*?

Las calculadoras de bolsillo permiten representar los números (como por ejemplo $\sqrt{2}$) hasta con 9 o 10 cifras decimales, pero existen programas específicos que permiten obtener $\sqrt{2}$ hasta con 32 cifras decimales.

Para comenzar este tema, es necesario precisar algunas nociones básicas.

El signo $\mathbb{R}$ representa al conjunto de los números reales. Para indicar que x es un número real, escribiremos $x \in \mathbb{R}$ y para expresar su negación, empleamos $x \notin \mathbb{R}$ que se lee "*x* no es un número real".

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Para indicar su igualdad se escribirá $x = y$. Su negación será $x \neq y$.

A continuación, analicemos la clasificación de los números reales.

Conjunto de números naturales $\mathbb{N}$.	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
Conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$.	Se designa con $\mathbb{Z}^+$ al conjunto de los enteros positivos y se define como: $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 1\}$. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$. Se designa con $\mathbb{Z}^-$ al conjunto de los enteros negativos y se define como: $\mathbb{Z}^- = \{-n / n \in \mathbb{N} < 0\}$ $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$. Luego, el conjunto de los números enteros está formado por: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$.	Se define como: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0\right\}$.
Conjunto de números irracionales $\mathbb{Q}'$.	En forma conjuntista, se define como el conjunto de números reales menos el conjunto de números racionales. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}' = \{..., -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \varphi, e, \pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}, ...\}$
Conjunto de números reales $\mathbb{R}$.	Se define en forma de conjunto como: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

Archivo Editorial

¿Sabías que?

El conjunto de números reales es mucho más grande que el conjunto de los números enteros y que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. De tal manera que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Simbología matemática

$\subset$: subconjunto

$\cup$: unión

/: tal que

\\: diferencia

$\in$: pertenece a

$\neq$: no es igual a

$\approx$: aproximado a

M.4.1.28. Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.
M.4.1.29. Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.
M.4.1.30. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).
M.4.1.31. Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Operaciones y propiedades en $\mathbb{R}$

Adición. Sea $x,\ y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$. En este caso, se dice "la suma de números reales es cerrada o cumple con la propiedad clausurativa".

Propiedades de la adición en $\mathbb{R}$

La adición de números reales cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad	Notación
Conmutativa	Para todo $x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
Asociativa	Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$.
Existencia del elemento neutro	Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $0 \in \mathbb{R}$,, tal que $x + 0 = 0 + x = x$.
Existencia de opuestos aditivos	Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $-x \in \mathbb{R}$, tal que $x + (-x) = -x + x = 0$.

Archivo Editorial

Producto

Sea $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}$. En este caso, se dice "la multiplicación de números reales es cerrada o cumple con la propiedad clausurativa".

Ejemplo

Calcular el producto de $\pi \cdot \sqrt{2}$.

Una aproximación de $\sqrt{2}$ es 1,4142 y una de π es 3,1416. Luego,

$$\pi \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}4142(3{,}1416) \approx 4{,}4429.$$

Propiedades del producto en $\mathbb{R}$

El producto de números reales cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad	Notación
Conmutativa	Para todo $x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$.
Asociativa	Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}, x(yz) = (xy)z$.
Existencia del elemento unidad	Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
Existencia de opuestos multiplicativos	Para cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, existe $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Archivo Editorial

Las operaciones de adición y producto están relacionadas mediante la propiedad distributiva: para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$; $x(y + z) = xy + xz$.

Relación de orden en $\mathbb{R}$. Sean $m, n \in \mathbb{R}$. Diremos:

i) "m es menor que n" y notaremos "$m < n$" si y solo si $n - m \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

$7 < 9$, si y solo si, al realizar la operación $9 - 7$, la respuesta en este caso 2 es elemento de los números reales.

ii) "m es mayor que n" y notaremos "$m > n$" si y solo si "$n < m$", o sea $m - n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$12 > 6$, si y solo si, al realizar $12 - 6$, el resultado en este caso 6 pertenece a los números reales.

Competencia matemática

Para redondear un número a una unidad determinada, debemos fijarnos en la cifra inmediatamente posterior (la que le sigue) y:

a) si es mayor o igual que 5 (5, 6, 7, 8 , 9), se aumenta en uno la cifra anterior.

b) si es menor que 5 (0, 1, 2, 3, 4), se deja la cifra igual.

¿Sabías que?

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces:
  $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{b} = 0$
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces:
  $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{0}$ = no está definido.
- Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces:
  $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{0}$
  es indeterminado.

La división para cero no está permitida, por lo que no se puede realizar.

Interculturalidad

Los comerciantes de los mercados y plazas no utilizan calculadoras para realizar sus cuentas. Si bien sus matemáticas son básicas, las manejan con mucha prolijidad y excatitud.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.2.2.

1. **Escribe** en tu cuaderno, la propiedad de los números reales que se aplica en cada caso:

   a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\pi=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\pi)$

   b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\pi=\sqrt{2}\cdot\pi+\sqrt{3}\cdot\pi$

   c) $\sqrt{7}+(-\sqrt{7})=0$

   d) $\sqrt{7}.\dfrac{1}{\sqrt{7}}=1$

2. **Analiza** si las siguientes proposiciones son verdaderas (V), o falsas (F).

   a) Todo número entero es un número racional.

   b) Entre dos números enteros cualesquiera, existe siempre otro número entero.

   c) El conjunto de los números racionales y el de los números irracionales son disjuntos (conjuntos disjuntos son los que no tienen elementos comunes).

   d) El conjunto de los números racionales es la razón entre dos números enteros, con el denominador diferente de cero.

3. **Marca** X si los números dados son: naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$), irracionales ($\mathbb{Q}'$) o reales ($\mathbb{R}$).

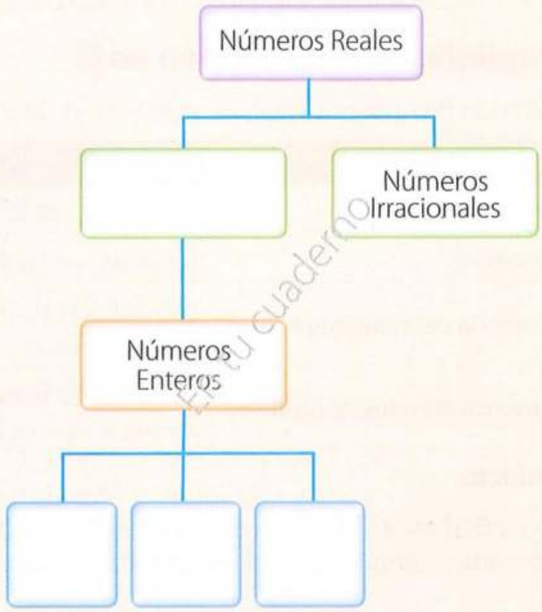
N°	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
$\frac{2}{3}$					
1,24					
$-\sqrt{625}$					
126					
$\sqrt{127}$					
$-\frac{3\pi}{2}$					

4. **Escribe**, en tu cuaderno, en cada caso el conjunto que se menciona e **indica** todos sus elementos.

   a) $\left\{\dfrac{6}{n}/\,n \text{ es un número natural entre 1 y 10}\right\}$

   b) [2*n* – 5/*n* es un número natural entre –3 y 4}

5. **Completa** en tu cuaderno el organizador gráfico.



6. **Utiliza** una calculadora para encontrar el resultado de las siguientes operaciones con cinco cifras decimales de aproximación.

   a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

   b) $\sqrt{7}\left(\pi-\sqrt{5}\right)$

   c) $\pi\left(2-3\pi-\sqrt{11}\right)$

7. **Halla** el valor de las siguientes expresiones numéricas utilizando dos cifras decimales de aproximación en cada paso.

   Utiliza tu calculadora.

   a) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx$

   b) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\approx$

   c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=$

   d) $\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\approx$

8. **Escribe** las siguientes operaciones con la ayuda de la propiedad distributiva de los números reales.

   a) $x(y+1)=$

   b) $(a+b)c=$

   c) $(m+3n)(-z)=$

   d) $\dfrac{1}{n}(x+1)=$

   e) $\dfrac{1}{x+1}(y+z)=$

9. **Calcula** en tu cuaderno las siguientes operaciones, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación.

   a) $(-2)(4-2a+3x)-(-5)(-9+5a-x)$

   b) $10(-4x+3y)+(-6)(-x-y+2)$

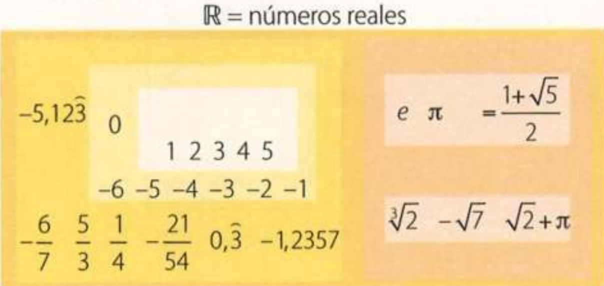
10. **Encuentra**, en la sopa de letras, los siguientes términos: conmutativa, asociativa, unidad, reales, opuestos, producto, propiedad, neutro, adición, distributiva. **Fotocopia** este ejercicio y **trabaja** en la hoja.

Números reales

Y	M	H	F	H	A	C	Y	D	I	Y	K	O	M	J	I	T
R	E	A	L	E	S	O	B	I	P	D	A	I	Y	V	C	Z
R	H	O	M	E	O	N	U	S	D	Z	W	R	G	Y	D	I
Q	W	I	Z	E	C	M	U	T	E	X	E	Y	Q	E	M	E
F	P	I	H	I	I	U	N	R	O	P	N	A	V	H	L	Q
K	Z	F	E	O	A	T	Q	I	N	V	E	G	I	O	X	A
O	V	F	A	F	T	A	P	B	A	R	U	I	C	Z	E	U
Y	P	N	W	W	I	T	A	U	I	W	T	N	C	Y	I	N
T	I	U	A	C	V	I	X	T	C	Y	R	H	Y	F	A	I
L	U	E	E	D	A	V	E	I	J	W	O	D	Z	G	I	D
C	B	S	K	S	I	A	U	V	D	Z	E	K	Y	M	H	A
E	X	L	S	E	T	C	P	A	L	A	I	E	J	J	O	D
R	U	J	A	D	J	O	I	P	O	B	W	C	D	A	B	Y
K	E	T	M	T	Q	G	S	O	B	J	A	G	Z	I	Z	Z
G	D	A	G	R	O	E	E	R	N	R	W	N	Y	B	O	I
E	K	L	W	P	R	O	D	U	C	T	O	L	M	E	S	Y
E	P	R	O	P	I	E	D	A	D	I	J	U	W	U	N	O

11. **Dibuja** en tu cuaderno el siguiente diagrama y **completa** con los nombres de los conjuntos que forman los números reales.

$\mathbb{R}$ = números reales



12. **Emplea** una calculadora, luego **compara** los siguientes números reales y **ordénalos** de menor a mayor.

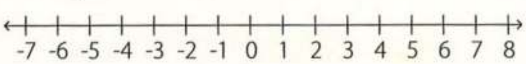
a) π, e, φ

b) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}$

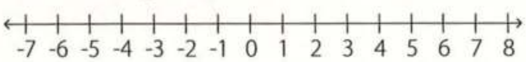
c) $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{2}$; $3{,}\widehat{2}$; $-\sqrt{7}$;0,32

13. **Ubica** los siguientes números en la recta numérica y **ordénalos** de menor a mayor.

a) 0; −4; $\frac{7}{2}$; 3,14; $-\sqrt{2}$



b) 3,9; −2,5; 0 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 3



Trabajo colaborativo

14. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

Albert Einstein determinó que si un cuerpo en reposo de masa m_0 viaja a velocidad cercana a la de la luz, su masa aumenta. Si llamamos m a la masa aumentada, resulta

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

donde v es la velocidad del objeto en movimiento y c es la velocidad de la luz.

En un acelerador utilizado en un tratamiento terapéutico, las partículas viajan a velocidad $v = 0{,}98\,c$ (es decir: 0,98 de la velocidad de la luz). **Encuentren** la relación entre la masa m y la masa en reposo (la velocidad de la luz es $v = 300\,000$ km/s).

15. Una empresa trabaja en el diseño de un tanque en forma cilíndrica para almacenar diésel. Se conoce que su base debe tener un radio de 25 m y su altura 15 m.

a) **Calcula** el volumen de la cisterna trabajando solo con 2 cifras decimales.

Nota:

$V = \pi r^2 h$ Volumen de un cilindro de base circular de radio r y altura h.

b) **Calcula** la longitud de la cerca protectora alrededor del tanque, si esta es circular y estará ubicada a 10 m del tanque.

Nota:

$P = 2\pi r$ Perímetro de la circunferencia de radio r.

Actividad indagatoria

16. **Resuelve** los enunciados.

a) **Revisa** los temas tratados en esta lección y **argumenta** la validez de los siguientes enunciados.

A. $-1 \in \mathbb{N}$

B. $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Q}$

C. $-2 \in \mathbb{Z}$

D. $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Q}^+ = \varnothing$

b) **Indaga** sobre los sistemas de numeración romano, maya y egipcio; luego, **escribe** en cada uno de los sistemas el número 10.

Tema 2

Propiedades algebraicas de los números reales $\mathbb{R}$

¿Sabías que?

En la práctica, existen algunos productos los cuales que se desarrollan mediante la aplicación de las propiedades algebraicas de números reales. Estos productos se denominan productos notables si se leen del lado izquierdo al lado derecho. Si su lectura es al contrario, decimos que se ha factorado.

Competencia socioemocional

Respeta y entiende el criterio y los puntos de vista de tus compañeros cuando trabajes en grupo.

Interdisciplinariedad

Matemática e Ingeniería

Los productos notables son muy utilizados en ingeniería. Por ejemplo, se utilizan para calcular la torsión en estructuras, así como también, para las mediciones y cálculos de áreas y superficies de construcción.

Shutterstock, 538448944.

Saberes previos

Deduce. Sin realizar la multiplicación, ¿cuál es el producto de $(x+2)(x-2)$?

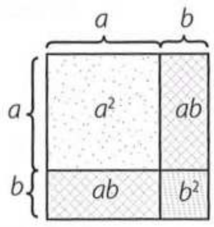
Algunas propiedades algebraicas de los números reales son las siguientes:

Ley cancelativa	Leyes de signos
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces, i) $x+y=x+z \Leftrightarrow y=z$. ii) Si $x \neq 0$; $xy=yz \Leftrightarrow x=z$.	Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces, i) $x(-y)=(-x)y$. ii) $(-x)(-y)=xy$.
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces, $xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$.	Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, i) $a(b-c)=ab-ac$. ii) $-(a+b)=-a-b$.

Archivo Editorial

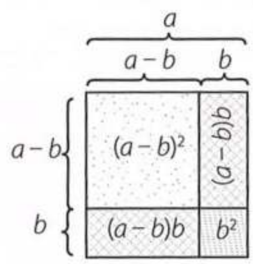
Productos notables

Cuadrado de la suma $(a+b)^2$



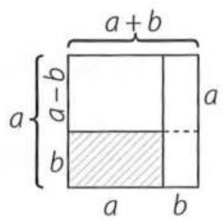
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cuadrado de la diferencia $(a-b)^2$

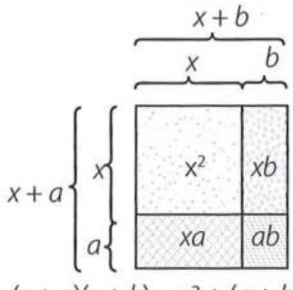


$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Producto de la suma por la diferencia $(a+b)(a-b)$



Binomios con un término común $(x+a)(x+b)$



$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Cuadrado de un polinomio	Cubo de un binomio	Suma y resta de cubos
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$ $+ 2ab + 2ac + 2bc$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Archivo Editorial

M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.
M.4.1.33. Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

Factorización

A continuación, se enlistan las reglas de factorización. La mayoría de estas surge de los productos notables. Escribimos un ejemplo de cada una de ellas.

Factor común

- Factor común monomio: $2xy - 4xz + 8x^2 = 2x(y - 2z + 4x)$
- Factor común polinomio: $x(a + b) - 2y(a + b) = (a + b)(x - 2y)$
- Factor común por agrupación de términos: $ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$ $= x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

Trinomios

- Trinomio cuadrado perfecto TCP: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$: El coeficiente de x^2 es 1. $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$; $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$
- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$: El coeficiente de x^2 es diferente de 1. $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

Binomios

- Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$; $25a^2 - 36b^2 = (5a + 6b)(5a - 6b)$
- Suma o diferencia de cubos: $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$; $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
- Suma o diferencia de potencias iguales: $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$; $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ $= (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$

Archivo Editorial

Recuerda que...

Factorizar es el proceso de encontrar dos o más expresiones cuyo producto sea igual a una expresión dada; es decir, consiste en transformar dicho polinomio en el producto de dos o más factores.

El proceso inverso de la factorización son los productos notables y viceversa.

Glosario

polinomio. Expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos o monomios.

factor. Cantidad que se multiplica con otra para obtener un producto.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace:

lynk.ec/10m01

Imprime las hojas para practicar factoreo.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.2.2.

1. **Utiliza** propiedades de los números reales, los productos notables y **resuelve**.

   a) $(x^3+3)^2=$

   b) $(x^3-3)^2=$

   c) $\left(a^3-b^2\right)\left(a^3+b^2\right)=$

   d) $(1-8xy)\cdot(1+8xy)=$

   e) $\left(a^{x+1}-2b^{x-1}\right)\left(2b^{x-1}+a^{x+1}\right)=$

   f) $(x+y+z)(x+y-z)=$

   g) $\left(a^2-2b\right)^3=$

   h) $\left(x^3+6\right)\left(x^3-8\right)=$

   i) $\left(x^3y^3-6\right)\left(x^3y^3+6\right)=$

   j) $\left(5a^{x+1}-7\right)\left(5a^{x+1}-4\right)=$

   k) $\left(\frac{2}{3}a^6b^4c^{-3}+11ab^2\right)^2=$

   l) $\left(5x^2-3\right)^3=$

   m) $\left(x^m+x^n\right)^2=$

   n) $\left(a^x+b^{x+1}\right)^2=$

   o) $\left(x^{a+1}+y^{x-2}\right)^2=$

   p) $(x+y-2z)^2=$

   q) $(x-7a)(x+2a)=$

   r) $(x+1)(x+2)=$

   s) $(x+5)(x-2)=$

   t) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)=$

   u) $(a-4)(b-4)=$

   v) $(x-1)(x-1)=$

   w) $(2x+1)^2=$

   x) $(x-3)^2=$

   y) $(5x-3b)^2=$

   z) $(x-5)(x+5)=$

2. **Completa** en tu cuaderno las siguientes expresiones utilizando productos notables.

   a) $x^2+2x+1=(x+1)(\ \ )$

   b) $a^2\ \ +1=(a-1)^2$

   c) $a^2+4a+2^2=(a+\ \ )^2$

   d) $b^2-6b+9=(\ \ )^2$

   e) $(2a)^2+2\,(2a)\,b+b^2=(\ \ +b)^2$

   f) $9x^2+6x+1=(\ \ +1)^2$

   g) $9x^2+(\ \ )-24xy=(3x-4y)^2$

   h) $4+4m^2+8m=\ \ (m+1)^2$

3. **Lee** cada enunciado, **plantea** la expresión algebraica y **resuelve**.

   a) El cuadrado de la suma entre a y b.

   b) El cubo de la diferencia entre a y b.

   c) El cuadrado de la suma entre a y el cuadrado de b.

   d) El cuadrado de la diferencia entre 2 y el cubo de x.

4. **Copia** en tu cuaderno y **encierra** en un rectángulo el término incorrecto en los siguientes productos notables.

   a) $a+2ab+b^2=(a+b)^2$

   b) $x^3+y^2=(x+y)(x-y)$

   c) $(a+b)^3=a^3+2a^2b+3ab^2+b^3$

   d) $(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2-b^3$

   e) $(a+b)^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$

   f) $(a-b)^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$

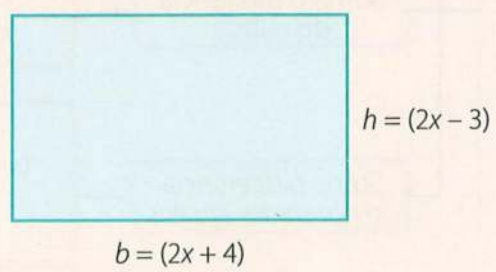
   g) $x^4-y^4=(x-y)(x^2+y^2)$

   h) $(3x+5)\,(3x-5)=6x^2-25$

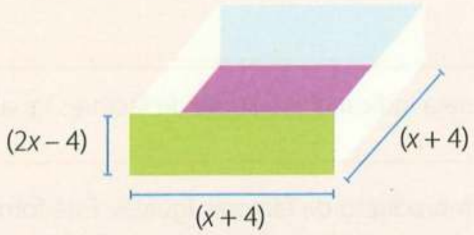
   i) $a^3-8=(a-2)\,(a^2+4a+4)$

5. **Resuelve** los siguientes problemas.

   a) ¿Cuál es la expresión algebraica del área del rectángulo de la figura?



b) ¿Cuál es la expresión algebraica del volumen de una caja de base cuadrangular, cuya longitud de la base es $(x + 4)$ y de altura $(2x - 4)$?



6. **Factoriza** cada expresión completamente. Para ello, **utiliza** las propiedades de los números reales.

a) $2x^4 + 4x^2 =$

b) $x^4 - 16 =$

c) $9 + 6x + x^2 =$

d) $x^4 - 10x^2 + 9 =$

e) $x^4 - 2x^2 - 3 =$

f) $x^4 - 4x^2 =$

g) $x^5 + 20x^3 + 100x =$

h) $3x^5 - 18x^3 + 27x =$

i) $2x^3 - 50x =$

j) $2x^5 - 32x =$

k) $2x^2 + x - 28 =$

l) $xy - 2x - 3y + 6 =$

m) $x^2 - 6x + 9 =$

n) $x + y^2 - 3ax - 3ay^2 =$

o) $ac + bc + ad + bd =$

p) $3b^2 - 5b - 6bc + 10c =$

q) $m^2 - 16m + 64 =$

r) $m^2 - 4 =$

s) $16x^2 - 9y^2 =$

t) $x^2 + 7x + 12 =$

u) $x^2 + x - 2 =$

v) $6x^2 + 19x + 10 =$

w) $15x^2 + 19x + 6 =$

7. **Factoriza** los siguientes polinomios.

a) $x^4 + x^2 + 1 =$

b) $m^4 + m^2n^2 + n^4 =$

c) $9x^4 + 2x^2y^2 + y^4 =$

d) $25a^4 + a^2b^2 + b^4 =$

e) $16x^4 + 8x^2y^2 + 9y^4 =$

f) $9x^4 - 21x^2y^2 + 4y^4 =$

g) $9a^4 + 26a^2 + 25 =$

h) $x^4 + 17x^2 + 16 =$

i) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4 =$

j) $m^4 - 19m^2n^2 + 9n^4 =$

k) $p^4 + 4 =$

l) $64x^4 + y^4 =$

8. **Completa** cada expresión con el factor que falta para que la factorización sea correcta.

a) $(m - 2)^2 - (m - 2) = \quad (m - 3)$

b) $2ab + 2a - b - 1 = (2a - 1)$

c) $81m^4 - n4 = (9m^2 + n^2)(3m + n)$

d) $m^2 - 1m + 24 = \quad (m - 3)$

e) $24a^2 - 38a + 15 = \quad (4a - 3)$

f) $b^3 + 27 = \quad (b^2 - 3b + 9)$

g) $a^4 - 5a^2 - 14 = (a^2 - 7)$

h) $8a^4 - 37a^2 - 15 = \quad (8a^2 + 3)$

i) $8 + x^6 = (2 + x^2)$

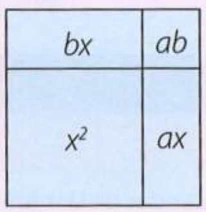
j) $a^6 + b^3 = (a^2 + b)$

Trabajo colaborativo

9. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

a) Si un número aumentado en 12 se multiplica por el mismo número disminuido en 5, resulta el cuadrado del número más 31. ¿Cuál es el número?

b) **Expresen** el área de esta figura como el producto de dos factores.



Actividad indagatoria

10. **Acude** a la biblioteca, **indaga** y **explica** con un ejemplo el método de las aspas para resolver trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Tema 3 Números reales con exponentes enteros

Desequilibrio cognitivo

Recuerda. ¿Qué operación utilizas para indicar el producto de factores iguales? **Escribe** un ejemplo.

Recordemos que una potencia es un producto de factores iguales. Está formada por la base y el exponente. El factor que se repite se llama base y el número que indica las veces que se repite el factor es el exponente.

Shutterstock, 284782904.

El conocimiento matemático es necesario para realizar emprendimientos.

Definición de potencia. El producto de varios factores iguales entre sí se denomina potencia.

$a^1 = a$; $a^2 = a \times a$; $a^3 = a \times a \times a$; ...

En general, si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la *n–ésima* potencia de a es: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces}}$

Uso de la calculadora

Algunas calculadoras traen implementada en su teclado la operación de potenciación, su símbolo es x^y. En el caso del problema planteado, digitas:

2 INV x^y 29 =

Y aparecerá:

536 870 912.

Ahora vamos a analizar la potenciación de números reales con exponentes enteros.

Una persona te propone el siguiente negocio: "Cada día te entrego \$ 1 000 durante 30 días. A cambio, tú me entregas el primer día \$ 1, el segundo día \$ 2, el tercero \$ 4, el cuarto \$ 8 y así sucesivamente… es decir, cada día el doble de dinero del día anterior, hasta el día 30. ¿Aceptarías el negocio?"

Resolvamos el problema planteado:

Si cada día se te entregan \$ 1 000, en un mes de 30 días tendrás \$ 30 000.

Ahora veamos cuánto debes entregar el día 30 al negociante. Observa la tabla.

Días	1.°	2.°	3.°	4.°	....	30.°
En potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	....	2^{29}
Dinero (\$)	1	2	4	8	...	536 870 912

Archivo Editorial

Por lo tanto, no conviene el negocio.

Exponentes cero y negativo

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces:

$a^0 = 1; a \neq 0;. a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ ; a \neq 0; a^1 = a$

Propiedades de la potenciación	
Propiedad	**Notación**
Producto de potencias de la misma base	$\forall a \in \mathbb{R};\ m \text{ y } n \in \mathbb{Z} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias con la misma base	$\forall a \in \mathbb{R};\ m \text{ y } n \in \mathbb{Z} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$\forall a \in \mathbb{R};\ m \text{ y } n \in \mathbb{Z} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Producto de potencias con el mismo exponente	$\forall a,b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z} \quad (a^n \cdot b^n) = (a \cdot b)^n$
Cociente de potencias con el mismo exponente	$\forall a,b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z} \quad (a^n \div b^n) = (a \div b)^n$

Archivo Editorial

M.4.1.34. Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.

Notación científica

En muchas ciencias, como la astronomía, la medicina, la electrónica, entre otras más, es común utilizar cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo:

- El número de átomos de carbono que hay en un gramo es:
  50 150 000 000 000 000 000 000.
- La masa expresada en gramos de un solo átomo de carbono es:
  0,000 000 000 000 000 000 000 019 94 gramos.

Las cantidades anteriores son muy grandes o muy pequeñas, difíciles de leer, nombrar, recordar y se necesita mucho espacio para escribirlas.

Ejemplos

Escribir en notación científica las siguientes cantidades.

a) $5\underbrace{0\ 150\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}_{22\ \text{cifras}} = 5{,}015\times10^{22}$.

b) $1\underbrace{3\ 000\ 000\ 000\ 000}_{13\ \text{cifras}} = 1{,}3\times10^{13}$.

c) $0{,}\underbrace{000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 9}_{25\ \text{cifras}}4 = 9{,}4\times10^{-25}$.

d) $0{,}\underbrace{000\ 000\ 2}_{7\ \text{cifras}}3 = 2{,}3\times10^{-7}$.

Nota que si la coma decimal se recorre a la izquierda, el exponente es positivo y, si se recorre a la derecha, el exponente es negativo.

Adición y sustracción en notación científica

Para resolver adiciones o sustracciones en notación científica, reduce los números a exponente común tomando como referencia el mayor de ellos. Luego, suma o resta los coeficientes y multiplica por la potencia de diez común.

Ejemplo

$2{,}5\times10^{6} - 5{,}2\times10^{4} + 7\times10^{5} =$

Solución

$2{,}5\times10^{6} - 0{,}052\times10^{6} + 0{,}7\times10^{6} =$

$(2{,}5 - 0{,}052 + 0{,}7)\times10^{6} = 3{,}148\times10^{6}$

Multiplicación y división en notación científica

Multiplica o divide por separado los números decimales y aplica las leyes de la potenciación para las bases de diez.

Ejemplo

$$\frac{(20\ 000)(4\ 000\ 000)(0{,}003)^{3}}{(2\ 000\ 000\ 000)^{2}} = \frac{(2\times10^{4})(4\times10^{6})(3\times10^{-3})^{3}}{(2\times10^{9})^{2}}$$

$$= \frac{2\times4\times27\times10^{4}\times10^{6}\times10^{-9}}{4\times10^{18}} = 54\times10^{-17}$$

Los cálculos astronómicos son imposibles sin la notación científica.

Shutterstock, 191438855.

Recuerda que...

La notación exponencial o científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros dos números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero.

El coeficiente debe cumplir con la condición de que sea mayor o igual a 1 y menor que 10.

$C\times10^{n}$

C = coeficiente
$(1 \leq C < 10)$

n = número entero positivo o negativo.

Uso de la calculadora

En las calculadoras puedes encontrar la tecla EXP para escribir números en notación científica. Verifica con los ejercicios planteados en esta página.

Tecla EXP en calculadora

Shutterstock, 92713006.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.2.2.

1. **Completa** en tu cuaderno los datos de la tabla.

a	b	a+b	(a+b)²	a²	b²	(a²+b²)²
−4	3					
2	−5					
$\frac{1}{2}$	4					
0	$-\frac{2}{3}$					

En tu cuaderno

2. **Expresa** el resultado de la operación como una sola potencia.

a) $(6^3 \div 6^2) =$

b) $(8^{-3})^4 =$

c) $[(3{,}5)^4\ (3{,}5)^3]^{-2} =$

d) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\left(\frac{5}{3}\right)^{5}\right]^{12}$

e) $\frac{3\times10^{18}\times10^{-8}}{9\times10^{9}} \approx$

f) $x\left(x^{-2}\right)^3 =$

g) $\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\sqrt{2} =$

h) $\frac{x^3y^{-2}}{2xy} =$

i) $\frac{\left[x^3y^{-5}\left(y^3\right)^{-2}\right]^3}{x^8y^9} =$

3. **Escribe**, en tu cuaderno, la letra de la respuesta correcta perteneciente a cada literal. **Observa** la palabra que se forma.

a) $[(2)^2]^{-1}$ — **P.** 16

b) $\left\{\left[\left(\frac{122}{15}\right)^5\right]^0\right\}^{-3} =$ — **T.** 2

c) $(0{,}9)^{15} \div (0{,}9)^{12}$ — **E.** $\frac{1}{16^3}$

d) $[4]^2$ — **S.** $\left(\frac{9}{10}\right)^3$

e) $\left[\frac{\left(4^2\right)^{-1}}{16^{-2}}\right]^{-3}$ — **O.** $\frac{5}{2}$

f) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)} \times 2$ — **R.** $\frac{1}{4}$

g) $\frac{25^{-1}}{5^{-2}} \div \frac{0{,}05^{-2}}{0{,}1^{-3}}$ — **E.** 1

4. **Aplica** las propiedades de la potenciación, y **determina** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $(3^2)^8 = 3^{10}$

b) $312 \times 10^{-6} = 3{,}12 \times 10^{-4}$

c) $\frac{10^{a-2}}{5^{a-2}} = 2^{a-2}$

d) $(0{,}01)^3 = 10^{-4}$

5. **Expresa** las siguientes cantidades con notación científica y **selecciona** el literal correcto.

a) $0{,}00015 =$ **A)** $1{,}5 \times 10^4$ **C)** $1{,}5 \times 10^5$ **B)** $1{,}5 \times 10^{-4}$ **D)** $1{,}5 \times 10^4$

b) $532\,000 =$ **A)** $5{,}32 \times 10^5$ **C)** $5{,}32 \times 10^{-4}$ **B)** $5{,}32 \times 10^7$ **D)** $52{,}32 \times 10^4$

6. **Resuelve** las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $\frac{5^6\times5^{-5}\times125\times2^4\times2^{-5}}{2^5\times5^{-3}\times2^6}$

b) $\frac{2\times10^4+3\times10^4-6\times10^3}{4\times10^8}$

c) $\frac{2\times10^5+7\times10^4\times5\times10^3}{4\times10^6\div2\times10}$

d) $\left(3\times10^3\right)^4 \div \left(3\times10^5\right)^2 + \frac{3\times10^6-7\times10^6}{\left(4\times10^3\right)^2}$

e) $\frac{10^5+10^4+10^3-5\times10^4}{10^4}$

f) $2{,}46 \times 10^{-6} + 1{,}25 \times 10^{-6} =$

g) $5{,}33 \times 10^{-6} - 2{,}44 \times 10^{-5} =$

h) $3{,}0 \times 10^{12} - 4 \times 10^{11} =$

i) $4{,}2 \times 10^5 - 2{,}3 \times 10^5 + 0{,}2 \times 10^5 =$

7. **Expresa** los siguientes números en notación científica.

a) 1 000

b) 212 000 000 000

c) Mil millones

d) 0,000 000 189

e) 0,000 000 1

f) 0,000 078 46

8. La distancia entre la Tierra y el Sol es $1,5 \times 10^8$ *km*. La distancia entre la Tierra y Júpiter es $9,3 \times 10^8$ *km* y Neptuno está situado a 4 500 000 000 *km* del Sol.

a) **Expresa** en notación científica la distancia del Sol a Neptuno.

b) **Calculen** la distancia a la que está situado Júpiter respecto del Sol.

c) **Calculen** cuántas veces es mayor la distancia del Sol a Neptuno que la que hay a la Tierra.

9. **Expresa** las siguientes cantidades con notación científica.

a) La masa de la Luna es 74 000 000 000 000 000 000 toneladas.

b) El tamaño de un virus es 0,000 015 *mm*.

c) El número de Avogadro es 602 300 000 000 000 000 000 000.

10. **Analiza** y **resuelve**.

La capacidad de un condensador se mide en faradios. Se sabe que 1 *F* = 1 000 000 000 *nF*.

a) **Escribe** esta relación en notación científica.

b) ¿Cuántos faradios equivalen a un nano faradio?

11. En la galaxia Andrómeda existen alrededor de un trillón de estrellas, mientras que en nuestra galaxia solo 250 billones. **Escribe** estos números en notación científica.

12. **Responde**. El diámetro de nuestra galaxia es de 105 700 años luz. Si un año luz equivale a 9 460 000 000 000 km, ¿cuál es su diámetro en kilómetros?

13. Expertos en neurología descubrieron hace mucho tiempo que el cerebro humano tiene alrededor de 100 mil millones de neuronas. Un nuevo estudio probó que realmente contiene 14 mil millones menos. **Escribe** en notación científica la cantidad de neuronas que contiene el cerebro a partir del nuevo estudio.

14. Se estima que el cerebro humano puede tener alrededo 86 mil millones de neuronas. **Escribe** este número en notación científica.

15. **Realiza** los siguientes cálculos.

a) $2,46 \times 10^{-6} + 1,25 \times 10^{-6} =$

b) $5,33 \times 10^{-6} - 2,44 \times 10^{-5} =$

c) $3,0 \times 10^{12} - 4 \times 10^{11} =$

d) $4,2 \times 10^5 - 2,3 \times 10^5 + 0,2 \times 10^5 =$

e) $1,2\times10^3 + 6\times10^4 - 20\times10^2 =$

f) $12,1\times10^7 - 16\times10^6 - 4,8\times10^8 =$

g) $7,1\times10^3 + 4,8\times10^4 - 3,5\times10^3 =$

h) $\dfrac{\left(2\times10^2\right)^3 + \left(3\times10^3\right)^2}{3,4\times10^5} =$

i) $\left(5\times10^2\right)\left(3\times10^3\right) - \dfrac{4,5\times10^8}{3\times10^2} =$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

16. **Escriban** cada expresión simplificada de manera que todos los exponentes sean positivos.

a) $\left(\dfrac{3x^3y^{-2}}{4x^{-5}y^3}\right)^{-1}$

b) $\left(\dfrac{5a^4b^{-5}}{2a^3b^3}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{3a^{-3}b^4}{10a^2b^6}\right)^{-1}$

d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4\left(\dfrac{a^2b}{c^{-3}}\right)^4$

17. **Realicen** las siguientes operaciones.

a) $(3,73 \times 10^{-1}) \times (1,2 \times 10^2)$

b) $(1,365 \times 10^{22}) \div (6,5 \times 10^{15})$

c) $(1,431 \times 10^3) \div (5,4 \times 10^5)$

Actividad indagatoria

18. **Indaga** cuál es el proceso para elevar una fracción a una potencia negativa. **Escribe** dos ejemplos.

19. **Indaga** los nombres de los prefijos usados en el Sistema Internacional y la escritura en notación científica.

Tema 4

Números reales con exponentes racionales

Saberes previos

¿Cuál es la operación contraria a la potenciación? ¿En qué se aplica?

Shutterstock, 220561078.

La velocidad del sonido en el metal, varía. Por ejemplo, es rápido en el hierro y lento en el plomo.

Un exponente racional se escribe en forma de fracción, su uso ayuda a resolver un sinnúmero de problemas de forma ágil y fácil. Veamos en qué consiste.

La velocidad del sonido en los sólidos está dada por la expresión: $v_s = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, donde E es el módulo de Young y ρ es la densidad. De esta manera, se puede calcular la velocidad del sonido en el acero, que es aproximadamente de 5 148 *m/s*. ¿Cuál es el significado del exponente de la expresión $\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$?

Definición de raíz n-ésima. Si n es cualquier entero positivo, entonces, la raíz n-ésima principal de a se define como $\sqrt[n]{a} = b$. Si se cumple que $b^n = a$, la operación $\sqrt[n]{a}$ se puede escribir como $a^{\frac{1}{n}}$.

Si $\boldsymbol{n}$ es un número natural par, entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplos

a) $\sqrt{121} = 11$, porque $11^2 = 121$, **b)** $\sqrt[3]{-64} = -4$, porque $(-4)^3 = -64$,

c) $\sqrt{-4} =$ no está definido $\mathbb{R}$, el cuadrado de cualquier número real es positivo.

Si miramos el ejemplo inicial, la expresión $v_s = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ es igual a $v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, es decir, -el exponente fraccionario $\frac{1}{2}$ implica que es una raíz cuadrada.

Propiedades de las raíces n-ésimas

Propiedad	Notación	Ejemplos
Producto de radicales del mismo índice. Multiplicamos los radicandos y dejamos el mismo índice.	$\forall a, b \in \mathbb{R};\ m$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[3]{-27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{64} = -3 \cdot 4 = -12$
Cociente de radicales del mismo índice. Dividimos los radicandos y dejamos el mismo índice.	$\forall a, b \in \mathbb{R};\ m$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} = \frac{10}{7}$
Potencia de radicales. Elevamos el radicando a la potencia y se deja el índice de la raíz.	$\forall a, b \in \mathbb{R};\ m$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5}$
Raíz de una raíz. Obtenemos otra raíz cuyo índice es el producto del índice de las raíces y el mismo radicando.	$\forall a, b \in \mathbb{R};\ m$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

Archivo Editorial

¿Sabías que?

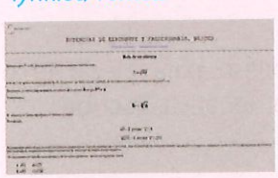
$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ entonces:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ si } n \text{, es impar} \\ |a| \text{, si n es par} \end{cases}$

Competencia digital

Para conocer más acerca de este tema, **ingresa** a: *lynk.ec/10m02*



M.4.1.35. Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en $\mathbb{R}$.
M.4.1.37. Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en $\mathbb{R}$.

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$ expresado en su forma más simplificada, donde m y n son números enteros y $n > 0$, se define $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Las leyes con exponentes enteros también se cumplen para los exponentes racionales.

Introducción y extracción de factores de un radical

Introducción

Para introducir factores en un radical, se elevan los factores al índice de la raíz.

Ejemplos

a) $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x} = \sqrt[4]{x^5}$.

b) $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$.

Extracción

Para extraer factores de un radical, se descompone el radicando en factores. Luego, se extraen aquellos factores que tienen raíz exacta.

Ejemplo

$$\sqrt[5]{a^{14}} = \sqrt[5]{a^5 \times a^5 \times a^4}$$
$$= \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^4} = a^2\sqrt[5]{a^4}$$

Operaciones con radicales

Adición de radicales

Ejemplos

a) Sumar: $5\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} + 8\sqrt[3]{4}$	Como son radicales semejantes, aplicamos la propiedad distributiva: $\sqrt[3]{4}(5-7-1+8) = 5\sqrt[3]{4}$
b) Sumar: $7\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$	Agrupamos los términos de acuerdo con los radicales semejantes y sumamos: $\sqrt{2}(7-6) - \sqrt{3}(4-5) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
c) Sumar: $a\sqrt{x-a} - \sqrt{9a^2(x-a)} + \sqrt{49a^2(x-a)}$	Por extracción de factores, transformamos a radicales semejantes: $a\sqrt{x-a} - 3a\sqrt{(x-a)} + 7a\ \sqrt{(x-a)}$ $= 5a\sqrt{x-a}$

Archivo Editorial

Multiplicación de radicales

Ejemplo

Multiplicar: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{a}$

Transformamos a índice común, obteniendo el m.c.m. de los índices: m.c.m. $(3, 4, 6) = 12$

$$\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3 \cdot a^2} = \sqrt[12]{2^7 a^2}$$

Interdisciplinariedad

Matemáticas y Química

Shutterstock. 55340812.

En los gases, la ecuación de la velocidad del sonido es: $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

donde γ es el coeficiente de dilatación adiabática, R la constante universal de los gases, T la temperatura en kelvin, y M la masa molar del gas.

Responde: ¿qué propiedad de los radicales se puede aplicar en esta ecuación?

Recuerda que...

- Para sumar o restar radicales, es necesario que sean radicales semejantes, es decir, que tengan la misma cantidad subradical y el mismo índice.
- Para multiplicar varios radicales que tienen el mismo índice, aplicamos la propiedad de los radicales. Si los radicales tienen diferente índice, los reducimos a un índice común.

Evaluación formativa

I.M.4.2.3.

1. **Expresa** como potencia de exponente fraccionario o como raíz, según corresponda.

 a) $\sqrt{b^4} =$

 b) $(2-x)^{\frac{1}{2}} =$

 c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}} =$

 d) $\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^3} =$

2. **Indica** si la proposición es verdadera (V) o falsa (F). **Justifica** tu respuesta o **corrige** la proposición en tu cuaderno.

 a) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[12]{3}$

 b) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = 1$

 c) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

 d) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$

 e) $5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}$

 f) $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{4}$

3. **Simplifica** las siguientes expresiones.

 a) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{48}}}}}$

 b) $\left[\sqrt[99]{\sqrt[10]{\frac{10^{10}}{\sqrt[10]{10}}}}\right]^{99}$

 c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{30}b^{50}cd^{-15}}}}$

4. **Suma** las siguientes expresiones.

 a) $\sqrt{17}+4\sqrt{17}-\sqrt{17}+12\sqrt{17}$

 b) $\sqrt{5}-5+2\sqrt{5}-3+6$

 c) $2\sqrt{27}-3\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$

 d) $2\sqrt{45}+2\sqrt{20}-7\sqrt{125}$

 e) $\sqrt{8}-5\sqrt{2}+6\sqrt{128}-\sqrt{28}$

 f) $2\sqrt[3]{24}-3\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}$

5. **Extrae** factores del radical.

 a) $\sqrt{50} =$

 b) $2\sqrt{108} =$

 c) $\sqrt[3]{16} =$

 d) $\sqrt[5]{672} =$

 e) $\sqrt[3]{875} =$

 f) $\sqrt{4\,900} =$

 g) $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} =$

 h) $\sqrt{12} =$

 i) $\sqrt{108} =$

 j) $3\sqrt{405} =$

 k) $2\sqrt{75} =$

 l) $\sqrt[3]{686} =$

 m) $\frac{3}{\sqrt[3]{729}} =$

 n) $\frac{2}{\sqrt[3]{1536}} =$

6. **Simplifica** las siguientes expresiones utilizando las propiedades de las raíces.

 a) $\sqrt{32} =$

 b) $\sqrt{75} =$

 c) $4\sqrt{12} =$

 d) $\sqrt{25x} =$

 e) $\sqrt{x^3} =$

 f) $\sqrt{18x^4} =$

 g) $\sqrt[3]{729x^4} =$

 h) $\left(2\sqrt{5}\right)^2 =$

 i) $\left(\sqrt{x+\sqrt{2}}\right)^2 - x =$

 j) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+5\right) =$

 k) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16} =$

 l) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2} =$

 m) $\frac{\sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{2x}} =$

 n) $\frac{\sqrt[5]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x+1}} =$

 o) $\sqrt[3]{\sqrt{x}} =$

 p) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{(2x+1)^{12}}} =$

 q) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256x^8}}} =$

 r) $\sqrt[8]{2^4x^6(4x)^2} =$

 s) $\sqrt[3]{27x^6y^5} =$

 t) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{x+1} =$

 u) $\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3\cdot\frac{1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^3}} =$

 v) $\frac{\left(\sqrt[3]{216x}\right)^2}{\sqrt[3]{\frac{8}{x}}} =$

7. **Convierte** a radicales de índice común.

 a) $\sqrt{4^3};\ \sqrt[3]{6}$

 b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{5};\ \sqrt{5};\ -4\sqrt{5}$

 c) $\sqrt{5};\sqrt[3]{7}$

8. **Verifica** las siguientes operaciones. En caso de existir un error, **explica** cuál es y **justifica** tu respuesta.

a) $\sqrt[4]{5^6} = 5\sqrt[4]{5^2}$

b) $\sqrt{7}\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{7^3}\sqrt[6]{9}$

c) $\sqrt[8]{2^2} = \sqrt[6]{2^3}$

9. **Une** expresiones equivalentes.

a) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

b) $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 - 2\sqrt{x}$

c) $x^2 - 3$

d) $x - 9$

e) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}$

i) $x + 1$

ii) $x - y$

iii) $\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$

iv) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

v) $x = y$

10. **Halla** el resultado de cada operación.

a) $\frac{3}{7}\sqrt{txr} + \frac{6}{5}\sqrt{txr} + \frac{4}{5}\sqrt{txr}$

b) $5\sqrt{12} + 3\sqrt{75} - 2\sqrt{1\,029}$

c) $\sqrt{20} - 7\sqrt{50} + 4\sqrt{32} - 6$

d) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}$

11. **Realiza** las siguientes operaciones y **escribe** el resultado en forma de raíz.

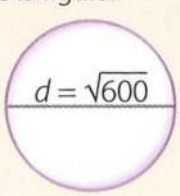
a) $5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} =$

b) $\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} =$

c) $\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

d) $\dfrac{5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} =$

12. **Halla** el área de la figura.



13. **Extrae** factores del radical.

a) $\sqrt[3]{9} =$

b) $\sqrt[8]{3^{10}} =$

c) $\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} =$

d) $\left(\sqrt[5]{x^2 + y^3}\right)^2 =$

14. **Transforma** en raíces las siguientes potencias.

a) $8^{\frac{2}{3}} =$

b) $127^{-\frac{4}{5}} =$

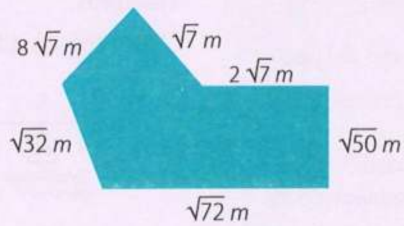
c) $(1+n)^{\frac{1}{n}} =$

d) $\left(x^3 + y^3\right)^{\frac{2}{3}} =$

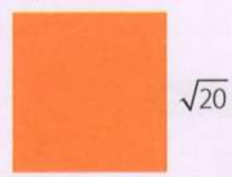
Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

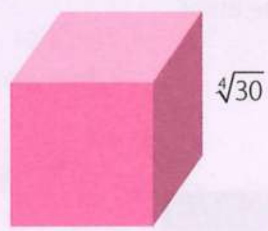
15. Se desea construir un parque infantil en un terreno, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro del terreno?



16. Si el lado de un cuadrado es $\sqrt{20}$, ¿cuáles son su perímetro y su área?



17. La arista de un cubo es $\sqrt[4]{30}$ m. ¿Cuál es su volumen?



18. El volumen de un cubo está dado por la expresión $\sqrt[3]{345\,123\, x^6 y^9}$. ¿Cuál es la expresión que representa la longitud del lado?

Actividad indagatoria

19. **Indaga** y **resuelve**. El diámetro de una mesa circular es $\sqrt{1\,876}$ cm. Si se desea colocarla en un espacio que mide 70 cm, ¿es posible hacerlo?

Tema 5 Racionalización de expresiones numéricas y algebraicas

Desequilibrio cognitivo

Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{24}$ | b) $\sqrt{48}$ | c) $\sqrt[3]{54}$

Recuerda que...

Para racionalizar monomios, puedes tener los siguientes casos:

a) Radicales del tipo: $\frac{a}{b\sqrt{c}}$; multiplica numerador y denominador por: $\sqrt{c}$.

b) Radicales del tipo: $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$; multiplica el numerador y el denominador por: $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

La racionalización de una expresión fraccionaria es el procedimiento mediante el cual se logra transformar el denominador en un número racional.

Racionalización de monomios

a) Cuando el radical es de índice 2

Ejemplos

Observemos diferentes ejemplos de racionalización.

1. $$\frac{5}{\underbrace{\sqrt{3}}_{\text{denominador irracional}}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{5\sqrt{3}}{\underbrace{3}_{\text{denominador racional}}}.$$

2. $$\frac{7}{3\sqrt{2}}=\frac{7}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

3. $\frac{9}{\sqrt{54}}$; para racionalizar, primero extrae factores del radical.

$$\frac{9}{\sqrt{54}}=\frac{9}{\sqrt{3^2 6}}=\frac{9}{3\sqrt{6}}=\frac{9}{3\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{9\sqrt{6}}{3\sqrt{36}}=\frac{9\sqrt{6}}{3\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. $$\frac{4x}{\sqrt{5x}}=\frac{4x}{\sqrt{5x}}\cdot\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}}=\frac{4x\sqrt{5x}}{\sqrt{5^2x^2}}=\frac{4x\sqrt{5x}}{5x}=\frac{4\sqrt{5x}}{5}.$$

b) Cuando el radical no es índice 2

Ejemplos

Observemos varios ejemplos de racionalización.

1. $$\sqrt[7]{\frac{1}{5^3}}=\frac{1}{\sqrt[7]{5^3}}=\frac{1}{\sqrt[7]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^4}}=\frac{\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}}=\frac{\sqrt[7]{5^4}}{5}.$$

2. $$\frac{3}{4\sqrt[5]{2^3}}=\frac{3}{4\sqrt[5]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{3\sqrt[5]{2^2}}{4\cdot\sqrt[5]{2^5}}=\frac{3\sqrt[5]{2^2}}{8}.$$

3. $$\frac{2x\sqrt[3]{xy}}{7\sqrt[3]{y^2}}=\frac{2x\sqrt[3]{xy}}{7\sqrt[3]{y^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}}=\frac{2x\sqrt[3]{xy^2}}{7\sqrt[3]{y^3}}=\frac{2x\sqrt[3]{xy^2}}{7y}.$$

4. $$\frac{2a^2-2b^2}{\sqrt[3]{a+b}}=\frac{2a^2-2b^2}{\sqrt[3]{a+b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=\frac{2(a^2-b^2)\sqrt[3]{(a+b)^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^3}}$$

$$=\frac{2(a-b)(a+b)\sqrt[3]{(a+b)^2}}{(a+b)}=2(a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2}.$$

Glosario

transformar. Hacer que algo cambie o sea distinto, pero sin alterar totalmente todas sus características esenciales.

DFA

Cuando una persona tiene dificultades o problemas de motricidad, es importante tener en cuenta que los desplazamientos y ritmos no siempre se ajustarán a los de los demás.

M.4.1.36. Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador, utilizando propiedades en $\mathbb{R}$ (racionalización).

Racionalización de binomios

Ejemplos

Observemos ejemplos de racionalización de binomios

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ Para obtener un número racional en el denominador, multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador, en este caso, por $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

$$\underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}_{\substack{\textit{número}\\ \textit{irracional}}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Utiliza el producto notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ para obtener el resultado del denominador.

$$\underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}_{\substack{\textit{número}\\ \textit{irracional}}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\underbrace{2}_{\substack{\textit{número}\\ \textit{racional}}}}.$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}.$$

c) $$\frac{10}{2+\sqrt{7}}=\frac{10}{2+\sqrt{7}}\cdot\frac{2-\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}=\frac{10\left(2-\sqrt{7}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{10\left(2-\sqrt{7}\right)}{4-7}=\frac{10\left(2-\sqrt{7}\right)}{-3}.$$

d) $$\frac{6}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}=\frac{6}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\frac{6\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}}=\frac{6\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{6\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{6\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{2-1}=6\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}.$$

e) $$\frac{3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}=\frac{3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}.$$

¿Sabías que?

Para racionalizar radicales del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$, con $b>0, c>0$,

multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

Así:

$\sqrt{b}+\sqrt{c}$, la conjugada es: $\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

Y la conjugada de $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ es: $\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

DFA

Las personas con dificultades en su motricidad necesitan el tiempo suficiente para realizar su trabajo y sus desplazamientos.

Competencia digital

Para conocer más acerca de la racionalización de binomios, **ingresa** a:

lynk.ec/10m03

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.2.3.

1. **Determina** si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) El factor para racionalizar la expresión $\dfrac{4}{4-\sqrt{5}}$ es $4+\sqrt{5}$.

   b) La expresión $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4a}}$ racionalizada, equivale a la expresión $\dfrac{3}{4a}$.

   c) Para racionalizar el denominador de $\dfrac{7x}{\sqrt{6}-3x}$, se debe multiplicar por $\sqrt{6}-3x$.

2. **Encuentra** el factor racionalizante de las expresiones planteadas.

   a) $5\sqrt{x}$

   b) $12x\sqrt[6]{32x^3y}$

   c) $\sqrt{x-y}$

   d) $7\sqrt[3]{14ab^2}$

   e) $\sqrt[5]{4}$

3. **Racionaliza** el denominador de las siguientes expresiones:

   a) $\dfrac{2x^2-2y^2}{\sqrt[3]{x+y}}$

   b) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2m^2n}}$

   c) $\dfrac{5a}{\sqrt{3a}}$

4. **Racionaliza** las expresiones con raíz cuadrada en el denominador.

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{83}}=$

   b) $\dfrac{5}{2\sqrt{11}}=$

   c) $\dfrac{2}{5\sqrt{2}}=$

   d) $\dfrac{1}{\sqrt{3x}}=$

   e) $\dfrac{15}{\sqrt{5x}}=$

   f) $\dfrac{15}{\sqrt{75x}}=$

   g) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}=$

   h) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x-y}}=$

   i) $\dfrac{51}{\sqrt{x+y}}=$

   j) $\dfrac{x}{\sqrt{xyz}}=$

   k) $\dfrac{a^4}{3\sqrt{ab}}=$

   l) $\dfrac{4x^2y^3z}{\sqrt{2xy^3z}}=$

5. **Enumera**, en forma secuencial, los pasos que se emplearon para racionalizar.

   a) $\dfrac{4x}{\sqrt[3]{2x^2y}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{4xy^2}}{\sqrt[3]{4xy^2}}$

   b) $\dfrac{4x\sqrt[3]{4xy^2}}{2xy}$

   c) $\dfrac{4x}{\sqrt[3]{2x^2y}}$

   d) $\dfrac{4x\sqrt[3]{4xy^2}}{\sqrt[3]{8x^3y^3}}$

   e) $\dfrac{2\sqrt[3]{4xy^2}}{y}$

6. **Determina** la conjugada de cada binomio.

   a) $\sqrt{10}+15\ =$

   b) $\sqrt{5}-\sqrt{7}=$

   c) $\sqrt{m}-\sqrt{n}\ =$

   d) $\sqrt{2x}+\sqrt{5y}=$

   e) $\sqrt{4+y}-\sqrt{4-y}\ =$

   f) $\sqrt{a-1}+3\ =$

   g) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{7}\ =$

7. **Racionaliza** las expresiones con binomios en el denominador.

a) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-1}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{1+\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a+3}}{6-\sqrt{a+3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}-3}$

e) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

f) $\dfrac{12\sqrt{3a^2b}}{2\sqrt{a^2}-4\sqrt{b^2}}$

g) $\dfrac{15\sqrt{5x^4y^4}}{3\sqrt{xy}+\sqrt{x}}$

h) $\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}-1}=$

i) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}=$

8. **Racionaliza** las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=$

e) $\dfrac{1}{x+\sqrt{2}}=$

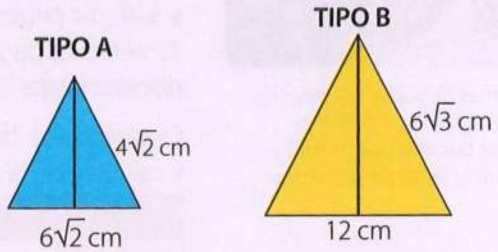
f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=$

g) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}=$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

9. Martín diseña unas pequeñas banderas en forma triangular para el día de los deportes, como se muestra en la imagen. Necesita construir 50 banderines tipo A y 100 tipo B.



a) ¿Cuántos centímetros de cinta necesita para cada tipo de banderín?
Tipo A: Tipo B:

b) ¿Cuántas veces mayor es la cantidad utilizada en los banderines B que la utilizada en los banderines A?

10. **Problema-decisión. Resuelvan** el problema.

Rocío cuenta con hojas de papel *bond* de 20 *cm* × 15 *cm*, los cuales serán recortados a lo largo de una de las diagonales para construir banderines triangulares. Si la cinta de refuerzo se colocara solo en el lado más largo, y Rocío cuenta con 50 *m* de cinta:

a) ¿Cuántos pliegos puede recortar?

b) Si quiere poner la cinta en los tres lados, ¿cuántos banderines puede decorar?

c) Si Rocío es tu amiga y tuvieras que elegir entre ayudarla en la construcción de banderines o ver una película. ¿Qué decisión tomarías? **Justifica.**

Actividad indagatoria

11. **Indaga** y **resuelve**.

Si $A=\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$, $B=\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$ y $C=\dfrac{5}{\sqrt[6]{5}}$

Calcula: $A\cdot B\cdot C$

Tema 6

Medidas de dispersión para datos agrupados

Saberes previos

Responde. En la distribución de datos no agrupados 4, 5, 6, 8, m, ¿qué valor debe tener m para que la media aritmética sea 6?

Shutterstock, 295406468.

Antes de pagar los servicios de agua, luz y teléfono, haz primero una lectura matemática de la planilla.

Las medidas de dispersión son números que indican el grado de separación de los valores de una serie estadística con respecto a las medidas de tendencia central.

Las medidas de dispersión más conocidas son: el rango, la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación .

Se encuestó a un grupo de familias sobre el valor que pagan por el consumo de agua potable y los resultados fueron los siguientes: 10 personas pagan entre \$ 30 y \$ 40; 14 personas pagan entre \$ 40 y \$ 50; 15 personas pagan entre \$ 50 y \$ 60; 20 personas pagan entre \$ 60 y \$ 70; y 11 personas pagan entre \$ 70 y \$ 80. ¿Qué tan dispersos están los valores con respecto al promedio de pago de consumo de agua?

Organizamos la información en una tabla de frecuencias de datos agrupados y calculamos la media aritmética.

Costo de consumo de agua potable			
intervalo	Fi	x_i	$x_i f_i$
[30 – 40)	10	35	350
[40 – 50)	14	45	630
[50 – 60)	15	55	825
[60 – 70)	20	65	1 300
[70 – 80)	11	75	825
Total	70		3 930

Archivo Editorial

Recuerda que...

La media aritmética para datos agrupados se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}.$$

El rango o recorrido es la diferencia entre el límite superior del intervalo mayor y el límite inferior del intervalo menor.

Media aritmética

La media aritmética es: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n} = \dfrac{3930}{70} = 56,14.$

Vamos a determinar las medidas de dispersión, rango, desviación media, varianza y desviación típica o estándar.

Rango o recorrido

R = Límite superior – límite inferior; $R = 80 - 30 = 50$.

Para determinar la desviación media, la varianza y la desviación típica o estándar, completamos la información de la tabla de esta forma:

Costo de consumo de agua potable				
intervalo	fi	x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i$
[30 – 40)	10	35	$\lvert 35 - 56,14\rvert = 21,14$	211,4
[40 – 50)	14	45	$\lvert 45 - 56,14\rvert = 11,14$	155,96
[50 – 60)	15	55	$\lvert 55 - 56,14\rvert = 1,14$	17,1
[60 – 70)	20	65	$\lvert 65 - 56,14\rvert = 8,86$	177,2
[70 – 80)	11	75	$\lvert 75 - 56,14\rvert = 18,86$	207,46
Total	70			769,12

Archivo Editorial

Simbología matemática

$\bar{x}$: media aritmética

Σ: sumatoria

x_i : marca de clase

f_i : frecuencia absoluta

n: número de datos

M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de dispersión, rango, varianza y desviación estándar de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desviación media

Para determinar la desviación media, utilizamos la fórmula:

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_i}{n} = \frac{769{,}12}{70} = 10{,}99.$$

Interpretación: cada valor de la variable difiere de la media aritmética en un promedio de 10,99.

Varianza y desviación típica o estándar

Costo de consumo de agua potable				
intervalo	Fi	x_i	$\|x_i - \bar{x}\|^2$	$\|x_i - \bar{x}\|^2 f_i$
[30 – 40)	10	35	446,90	4 469
[40 – 50)	14	45	124,10	1 737,4
[50 – 60)	15	55	1,30	19,5
[60 – 70)	20	65	78,50	1 570
[70 – 80)	11	75	355,70	3 912,7
Total	70			11 708,6

Archivo Editorial

Para determinar la varianza, aplicamos la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2 f_i}{n} = \frac{11\,708{,}6}{70} = 167{,}3.$$

Para determinar la desviación típica, extraemos la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2 f_i}{n}} = \sqrt{167{,}30} = 12{,}93.$$

Las medidas de dispersión sirven para determinar qué tan dispersos están los datos con respecto a la media aritmética.

Propiedades de la varianza y la desviación típica

1. La varianza y la desviación típica siempre son un valor positivo o cero para el caso de puntuaciones iguales.
2. Si a todos los valores de la variable se les suma un número, la varianza y la desviación típica no variarán.
3. Si todos los valores de la variable se multiplican por un número, la varianza queda multiplicada por el cuadrado de dicho número y la desviación típica queda multiplicada por dicho número.
4. Cuanta más pequeña sea la desviación típica, mayor será la concentración de datos alrededor de la media.

Recuerda que...

La desviación media se calcula así:

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_i}{n}$$

La varianza se determina así:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2 f_i}{n}.$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2 f_i}{n}}.$$

Interdisciplinariedad

Matemática y Estudios Sociales

Las medidas de dispersión son utilizadas en ciencias sociales para describir los datos de una población, para comparar muestras y establecer conclusiones.

Indaga y **escribe** un ejemplo en el que se utilicen las medidas de dispersión en las ciencias sociales.

Shutterstock, 663832300.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.8.1.

1. **Calcula** e **interpreta** la media de los siguientes datos:

   a) La tabla muestra las esturas de 20 niños de un equipo de fútbol.

Estatura	Repeticiones
100	2
108	6
112	2
120	7
129	3

   b) La tabla muestra las estadísticas de tarjetas amarillas de la plantilla de un equipo de fútbol (28 jugadores) en la última temporada.

Cantidad de tarjetas amarillas	Cantidad de jugadores
0	12
1	5
2	1
3	3
4	1
5	0
6	0
7	2
8	4

2. Para realizar un estudio estadístico a un grupo de personas acerca de los minutos de uso diario del celular, se ordenó la información con datos agrupados en la siguiente tabla.

Tiempo de llamadas en el celular	
Intervalo de tiempo	Fi
[0 – 20)	10
[20 – 40)	15
[40 – 60)	25
[60 – 80)	18
[80 – 100)	12
Total	80

   a) Con los datos, en tu cuaderno **completa** la tabla.

intervalo	fi	x_i	$x_i f_i$
[0 – 20)	10		
[20 – 40)	15		
[40 – 60)	25		
[60 – 80)	18		
[80 – 100)	12		
Total	80		

En tu cuaderno

   b) **Determina** la media aritmética de los datos.

   c) **Completa** en tu cuaderno la información.

fi	xi	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert f_i$
10			
15			
25			
18			
12			
80			

En tu cuaderno

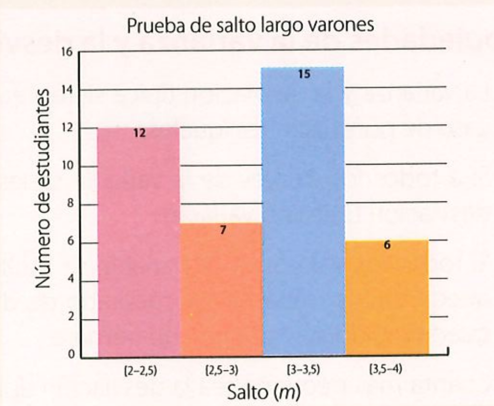
   d) **Encuentra** la desviación media.

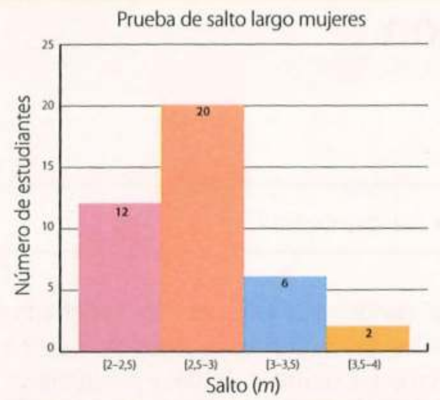
   e) **Calcula** en tu cuaderno la varianza y la desviación típica o estándar.

   f) **Interpreta** los resultados obtenidos tomando en consideración el valor de la media aritmética.

3. **Analiza** los siguientes histogramas de frecuencias. Luego, **responde**.

   Se representaron gráficamente los resultados de un grupo de estudiantes en la prueba de salto largo.





a) **Completa**, en tu cuaderno, las tablas de frecuencias para datos agrupados.

Prueba de salto largo varones		
Intervalos	**Fi**	x_if_i
[2 – 2,5)		
[2,5 – 3)		
[3 – 3,5)		
[3,5 – 4)		
Total		

En tu cuaderno

Prueba de salto largo mujeres		
Intervalos	**Fi**	x_if_i
Total		

En tu cuaderno

b) ¿Cuál es la longitud promedio de salto largo para varones y para mujeres?

c) **Determina** las medidas de dispersión para los dos casos.

d) ¿En qué grupo de datos hay mayor dispersión con respecto al valor promedio de salto largo?

4. La siguiente tabla muestra información sobre los pesos de varios pacientes en un hospital:

Pesos (kg)	Cantidad de personas (f_i)
[60; 65)	16
[65; 70)	17
[70; 75)	13
[75; 80)	16
[80; 85)	19
[85; 90)	4
Total	**85**

a) **Determina** el rango o recorrido de los datos en la tabla y **compáralo** con el del ejercicio anterior.

b) **Calcula** el peso promedio de estos pacientes.

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

5. Un estudio de investigación establece que los niños, a diferencia de los adultos, tienden a recordar las películas, cuentos, historias y anécdotas como una sucesión de acciones más que como un argumento global. En un relato, por lo general, se utiliza la palabra "y entonces...". Una psicóloga pidió a 50 niños que le contaran el relato de una película que hayan visto, y contabilizó la cantidad de "y entonces..." utilizados. Estos son los resultados:

8	15	22	19	15	17	18	20	17	12
16	16	17	21	23	18	20	21	20	20
15	18	17	19	20	23	22	10	17	19
19	21	20	18	18	24	11	19	31	16
17	18	19	20	18	18	40	18	19	16

De igual manera, la psicóloga obtuvo la respuesta de 50 personas adultas. Estos son los resultados:

10	12	5	8	13	10	12	8	7	9
11	10	9	9	11	15	12	17	14	10
9	8	15	16	10	14	7	16	9	1
4	11	12	7	9	10	3	11	14	8
12	5	10	9	7	11	14	10	15	9

Para las dos variables, **realicen** lo siguiente:

a) **Construyan** la tabla de frecuencias con datos agrupados en tu cuaderno.

b) **Determinen** la media aritmética de cada grupo de datos.

c) **Determinen** las medidas de dispersión: rango, desviación media, varianza y desviación típica.

d) **Grafiquen** las dos distribuciones en un histograma de frecuencias; para ello, pueden emplear el programa excel.

e) **Responde**: en el análisis anterior, ¿qué indica respecto de la conducta observada en los niños y en los adultos?

Actividad indagatoria

6. **Plantea** una encuesta a tus compañeros y compañeras. Puede ser sobre notas, tallas, pesos, entre otros temas de interés. Luego, **realiza** lo siguiente:

Ordena la información en una tabla de frecuencias y **determina** las medidas de dispersión.

Medidas de posición

Shutterstock, 519513721.

Las bibliotecas llevan estadísticas de sus usuarios.

Recuerda que...

Los cuartiles son tres valores de la distribución, que la dividen en cuatro partes iguales. Cada uno de ellos concentra el 25 % de los resultados.

Primer cuartil Q1: es el valor que separa el 25 % de los datos de una distribución, ordenada de menor a mayor.

Segundo cuartil Q2: es el valor que separa el 50 % de los datos de la distribución, ordenada de menor a mayor. Coincide con la mediana.

Tercer cuartil Q3: es el valor que separa el 75 % de los datos de la distribución, ordenada de menor a mayor.

Los cuartiles se calculan mediante la expresión:

$$Q_k = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i}\right],$$

k = 1, 2, 3

Desequilibrio cognitivo

Interpreta. ¿Qué significa para ti la palabra cuantil?

Las medidas de posición o cuantiles, dividen a una distribuicón ordenada en partes iguales. Para ello es necesario que los datos estén ordenados de manor a mayor. Las principales medidas de posición son los cuartiles, deciles y percentiles.

En la biblioteca de un colegio, se registró la edad de los estudiantes que acuden en un día. Los resultados se presentaron en la siguiente tabla.

¿Qué valores toman el primero, segundo y tercer cuartil de la distribución?

Edad de estudiantes que acuden a la biblioteca		
Edad en años Intervalos (x)	Núm. de personas Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)
[6 – 8)	5	5
[8 – 10)	12	17
[10 – 12)	14	31
[12 – 14)	13	44
[14 – 16)	4	48
[16 – 18)	2	50
Total	50	

Archivo Editorial

Para calcular el primer, segundo y tercer cuartil, se procede así:

- Ordena los datos de menor a mayor.
- Busca el intervalo que ocupa cada cuartil mediante la fórmula $\frac{kn}{4}$, donde $k = 1, 2, 3$. Este valor se localiza en la columna de frecuencias acumuladas.

Ejemplos

1. Cálculo del primer cuartil. $\frac{kn}{4} = \frac{1(50)}{4} = 12{,}5$. Corresponde al intervalo [8 – 10). Límite inferior $L_i = 8$; amplitud $A = 2$; frecuencia absoluta $f_i = 12$. Frecuencia absoluta acumulada anterior al cuartil: $F_{i-1} = 5$.

$$Q_1 = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i}\right] = 8 + 2\left[\frac{12{,}5 - 5}{12}\right] = 9{,}25.$$

2. Cálculo del segundo cuartil. $\frac{kn}{4} = \frac{2(50)}{4} = 25$. Corresponde al intervalo [10 – 12).
$L_i = 10$; $A = 2$; $f_i = 14$; $F_{i-1} = 17$.

$$Q_2 = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i}\right] = 10 + 2\left[\frac{25 - 17}{14}\right] = 11{,}14.$$

3. Cálculo del tercer cuartil. $\frac{kn}{4} = \frac{3(50)}{4} = 37{,}5$. Corresponde al intervalo [12 – 14).

$L_i = 12$; $A = 2$; $f_i = 13$; $F_{i-1} = 31$.

$$Q_3 = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i}\right] = 12 + 2\left[\frac{37{,}5 - 31}{13}\right] = 13.$$

M.4.3.8. Determinar las medidas de posición: cuartiles, deciles, percentiles, para resolver problemas.

Cálculo de los deciles

Analizamos la tabla del ejercicio anterior.

Edad de estudiantes que acuden a la biblioteca		
Edad en años Intervalos (x)	Núm. de personas Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)
[6 – 8)	5	5
[8 – 10)	12	17
[10 – 12)	14	31
[12 – 14)	13	44
[14 – 16)	4	48
[16 – 18)	2	50
Σ	50	

Archivo Editorial

Calculamos el cuarto decil D_4 de la siguiente manera:

- Ordena los datos de menor a mayor.
- Busca el intervalo que ocupa cada decil mediante la fórmula $\frac{kn}{10}$, donde $k = 1, 2, \ldots, 9$. Este valor se localiza en la columna de frecuencias acumuladas.
- Para el cálculo de cualquier decil, utiliza la fórmula:

$$D_k = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{10} - F_{i-1}}{f_i}\right], \quad k = 1, 2, ..., 9.$$

Cálculo de decil 4. D_4. $\frac{kn}{10} = \frac{4(50)}{10} = 20$. Corresponde al intervalo [10 – 12).

$L_i = 10;$ $A = 2;$ $f_i = 14;$ $F_{i-1} = 17.$

$$D_4 = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{10} - F_{i-1}}{f_i}\right] = 10 + 2\left[\frac{20-17}{14}\right] = 10{,}4.$$

Cálculo de los percentiles

Calculamos el percentil 80 P_{80} de la siguiente manera:

- Ordena los datos de menor a mayor.
- Busca el intervalo que ocupa cada percentil mediante la fórmula $\frac{kn}{100}$, donde $k = 1, 2, \ldots, 99$. Este valor se localiza en la columna de frecuencias acumuladas.
- Para el cálculo de cualquier percentil, utiliza la fórmula:

$$D_k = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{f_i}\right], \quad k = 1, 2, ..., 99.$$

Cálculo de percentil 80. P_{80}. $\frac{kn}{100} = \frac{80(50)}{100} = 40$. Corresponde al intervalo [12 – 14).

$L_i = 12;$ $A = 2;$ $f_i = 13;$ $F_{i-1} = 31.$

$$P_{80} = L_i + A\left[\frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{f_i}\right] = 12 + 2\left[\frac{40-31}{13}\right] = 13{,}38.$$

Recuerda que...

Los **deciles** son nueve valores que dividen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en diez tramos iguales. Los deciles corresponden al 10 %, 20 %, … y 90 % de los datos.

El decil quinto D5 coincide con la mediana.

Los percentiles son 99 valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente, en 100 tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 1 % de los resultados. El percentil 50 coincide con la mediana.

¿Sabías que?

El segundo cuartil Q_2, el quinto decil D_5 y el percentil 50 P_{50} coinciden con la mediana.

Interculturalidad

A pesar que, desde 1974, Ecuador adoptó las medidas del Sistema Internacional, en la cultura popular aún se usan otras unidades de medida como la cuadra o la vara.

Indaga acerca de cuál es la conversión de las unidades de medida, vara y cuadra, a metro. Luego, **realiza** algunas conversiones.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.8.1.

1. **Problema-decisión. Analiza** y **decide** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   - **a)** El percentil 25 es igual al primer cuartil.
   - **b)** El percentil 50 es igual al segundo cuartil.
   - **c)** El percentil 20 es igual al segundo decil.
   - **d)** El tercer cuartil es igual a la mediana.
   - **e)** El percentil 75 es igual al tercer cuartil.

2. **Analiza** la información y **responde**.

   En la distribución de pesos de 300 personas se han obtenido los siguientes parámetros de posición:

   $Q1 = 59$ kg, $Me = 67$ kg, $Q3 = 75$ kg.

   - **a)** ¿Cuántas personas tienen un peso menor que 75 kg?
   - **b)** ¿Cuántas personas tienen un peso comprendido entre 59 kg y 67 kg?
   - **c)** ¿Cuántas personas tienen un peso inferior a 59 kg?

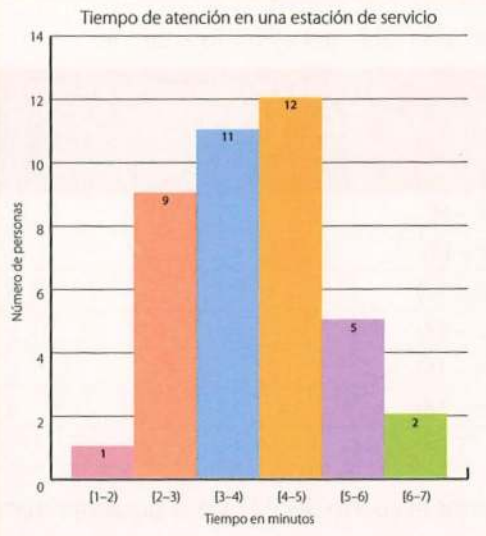
3. **Analiza** y **completa**, en tu cuaderno, la siguiente tabla. Luego, **responde**.

   Se realizó un estudio sobre los salarios de los obreros de una fábrica. Los resultados fueron expresados en la siguiente tabla:

Salarios de los obreros de una fábrica		
Intervalos	**fi**	F_i
[360 – 400)	25	
[400 – 440)	30	
[440 – 480)	42	
[480 – 520)	23	
Total		

   - **a)** ¿Cuál es el valor del primer cuartil y qué representa?
   - **b)** ¿Qué valor tiene el percentil 50 y qué interpretación le puedes dar?
   - **c)** ¿A qué valor corresponde el noveno decil? ¿Qué significa?
   - **d)** Aproximadamente, ¿qué cantidad de personas tiene un sueldo sobre el tercer cuartil?
   - **e)** ¿Cuál es la mediana de los datos en estudio? ¿Coinciden con alguna medida de posición?

4. **Analiza** el siguiente histograma.



   - **a) Completa** en tu cuaderno la tabla de frecuencias a partir del gráfico.

Intervalos	**fi**	F_i

   - **b)** ¿Cuántas personas fueron entrevistadas?
   - **c)** ¿Cuál es el percentil 35?
   - **d)** ¿A qué valor corresponde el tercer cuartil? ¿Qué representa? **Represéntalo** en el histograma.
   - **e)** ¿Qué representa el percentil 75?

5. En una encuesta sobre la estatura de 200 basquetbolistas se han obtenido las siguientes medidas de posición:

   $D30 = 182$ cm, $P50 = 193$ cm. **Responde** con verdadero o falso las siguientes afirmaciones:

   - **a)** 30 basquetbolistas miden menos de 182 cm.
   - **b)** El 50 % de los basquetbolistas miden más de 193 cm.

6. Se realizó un estudio sobre el coeficiente intelectual de 100 personas. Los resultados se detallan en la siguiente tabla:

Coeficiente intelectual	
Coeficiente intelectual Intervalos (x)	**Número de personas. Frecuencia absoluta (fi)**
[80–85)	25
[85–90)	10
[90–95)	40
[95–100)	15
[100–105)	10

a) ¿Cuál es segundo cuartil?

b) ¿Cuál es el percentil 50? ¿Cómo lo interpretas?

c) ¿Qué cantidad de personas tiene un coeficiente intelectual sobre el tercer cuartil?

d) ¿A qué valor corresponde el percentil 25?

e) ¿Cuál es la mediana de los datos en un estudio?

7. **Escribe** en los recuadros verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

a) Para determinar los cuartiles se necesita ordenar los datos.

b) Cada cuartil contiene un 25 % de los datos.

c) Un cuartil mucho más grande que los demás sugiere que los datos se encuentran más dispersos que en los otros.

d) Un cuartil mucho más pequeño que los demás sugiere que los datos en él se encuentran menos dispersos que en los otros.

8. La tabla contiene un resumen de los datos recolectados de 50 personas que vieron la serie de "Los Peques":

i	L_{inf}	L_{sup}	X_i	f_i	F_i
1	3	7	5	6	6
2	7	11	9	7	13
3	11	15	13	13	26
4	15	19	17	15	41
5	19	23	21	8	49
6	23	27	25	2	51
			$n =$	51	

Calcula Q1, Q2, Q3

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

9. **Analicen** el siguiente estudio estadístico, luego, **respondan**. Se requiere realizar un estudio de la estatura de los 50 estudiantes de décimo de básica. Para ello, se dividió a la clase en dos grupos: hombres y mujeres. La información recogida fue la siguiente:

Estatura de hombres (m)				
1,75	1,60	1,71	1,72	1,68
1,65	1,67	1,73	1,8	1,73
1,74	1,75	1,69	1,7	1,72
1,65	1,63	1,75	1,78	1,74
1,68	1,72	1,76	1,76	1,8

Estatura de mujeres (m)				
1,56	1,60	1,54	1,55	1,62
1,56	1,62	1,65	1,68	1,7
1,62	1,68	1,64	1,58	1,56
1,52	1,56	1,59	1,6	1,64
1,63	1,65	1,68	1,64	1,58

a) **Determinen** el rango de cada grupo de datos.

b) **Ordenen** los datos en cinco intervalos, **determinen** la amplitud.

c) En su cuaderno, **ordenen** la información en tablas de frecuencias.

d) ¿Cuál es el tercer cuartil para cada tabla de frecuencias?

Actividad indagatoria

10. **Ingresa** a la página web del INEVAL y **obtén** las notas de la prueba Transformar del último año escolar que corresponde a los estudiantes de tu colegio.

a) **Organiza** la información en una tabla de frecuencias.

b) **Obtén** el segundo cuartil, el quinto decil y el percentil 50.

c) **Compara** los valores obtenidos.

Estrategia: dividir el problema en partes

Problema resuelto

Subida al Monte Fuji

La ruta del Gotemba, que lleva a la cima del Monte Fuji (Japón), tiene unos 9 *km* de longitud. Los senderistas tienen que estar de vuelta de la caminata de 18 *km* a las 20h00. Toshi calcula que puede ascender la montaña caminando a 1,5 *km* por hora, como media, y que desecenderá al doble de velocidad. Estas velocidades tienen en cuenta las paradas para comer y descansar.

Según estas velocidades, ¿a qué hora, como muy tarde, puede iniciar su caminata de modo que pueda volver a las 20h00?

1. **Comprender el problema**

   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿A qué hora, como muy tarde, puede iniciar su caminata de modo que pueda volver a las 20h00?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   La estrategia que se utilizará es dividir el problema en partes.

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

   Paso 1

   Determina el tiempo que se demora en subir y en bajar.

   Velocidad de subida: 1,5 *km/h*

   Distancia recorrida: 9 *km*

   $ts = 9 \div 1{,}5 = 9$ horas

   Velocidad de descenso: 3 *km/h*

   Distancia recorrida: 9 *km*

   $tb = 9 \div 3 = 3$ horas

   Paso 2

   Determina el tiempo total y resta de 20h00.

   $Tt = 20 - 9 = 11$h00

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   Para el ascenso, deben salir máximo a las 11h00

Problema resuelto

En la subida al Monte Fuji, Toshi llevó un podómetro para contar los pasos durante su recorrido por la ruta Gotemba.

El podómetro mostró que dio 22 500 pasos en la ascensión.

¿Cuál es la longitud media del paso de Toshi en su ascensión de 9 *km* por la ruta Gotemba? Expresa la respuesta en centímetros.

Shutterstock, 1597405621.

Cumbre de la montaña Fuji. Fujinomiya, Shizuoka - Japón.

1. **Comprender el problema**

   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿Cuál es la longitud media del paso de Toshi en su ascensión de 9 km por la ruta Gotemba?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   La estrategia que se utilizará es dividir el problema en partes.

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

   Paso1

   Transforma los kilómetros a metros y divide:

   9 km = 9 000 m

   $9\,000 \div 22\,500 = 0{,}4$ m

   Paso2

   Transforma los 0,4 m a centimetros.

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   La longitud media de los pasos de Toshi es de 40 cm.

Problema tomado de las pruebas liberdadas de Pisa
http://educalab.es/documents/10180/425912/monte1.pdf/0300cb59-bc62-4836-9e45-b118a1148ef1

Problemas propuestos

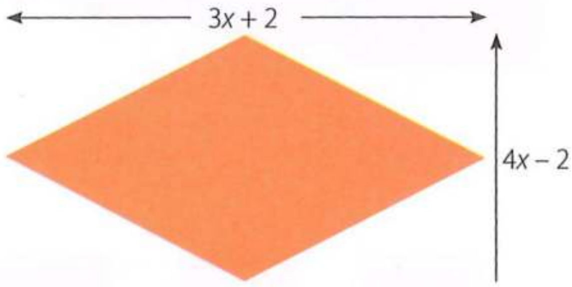
1. Un rombo mide de diagonal mayor 3x + 2 y de diagonal menor 4x – 2. ¿Cuál es el área de este rombo?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.



2. Un jardín rectangular tiene $\sqrt{45}$ m de largo y $\sqrt{20}$ m de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el jardín y cuál es su perímetro?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

3. La distancia desde el Sol a Mercurio es de $5{,}79 \times 10^7$ km y a la Tierra es de $1{,}49 \times 10^8$ km. ¿En cuántos segundos llega un haz de luz de Mercurio a la Tierra, si la velocidad de la luz es de 3×10^5 km por segundo?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

4. ¿Cuál es el rango de un estudio estadístico cuyos intervalos van desde [10 – 30) hasta [70 – 90)?

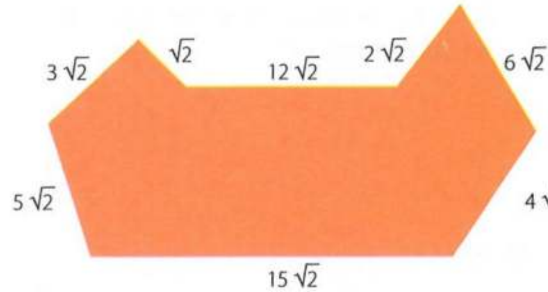
   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

5. **Analiza** y **resuelve**. Se desea construir el cerramiento de una escuela con la forma que se muestra en la figura. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?



6. **Responde**. En un estudio estadístico sobre el tiempo que un grupo de estudiantes dedica a ver televisión diariamente, se ordenó la información con datos agrupados en la siguiente tabla:

Tiempo de ver televisión	
Intervalos	**Fi**
[0 – 30)	12
[30 – 60)	17
[60 – 90)	20
[90 – 120)	22
[150 – 180)	15
Total	86

   a) **Determina** la media aritmética de los datos.

   b) **Encuentra** la desviación media.

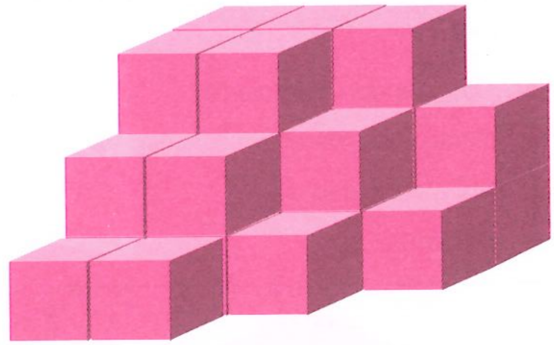
7. La tabla muestra un resumen de los datos obtenidos en una encuesta sobre la calidad de un producto para niños. Los datos fueron agrupados por edades y se contaron solo aquellas personas que consideran que el producto tiene buena calidad.

Clase	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia absoluta
1	5	15	18
2	15	25	17
3	25	35	18
4	35	45	5
5	45	55	4
6	55	65	3
7	65	75	6
8	75	85	9

   a) **Calcula** los tres cuartiles con los datos de la tabla.

Razonamiento numérico

1. En la figura de cubitos de un centímetro de arista, ¿cuántos faltan para formar un cubo de cuatro centímetros de arista?



a) 34

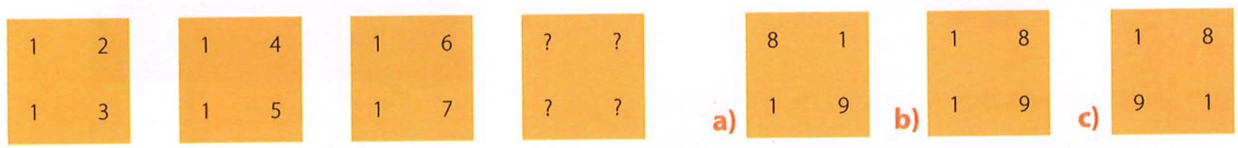
b) 37

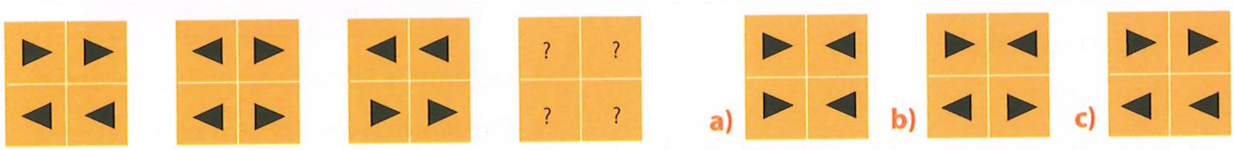
c) 30

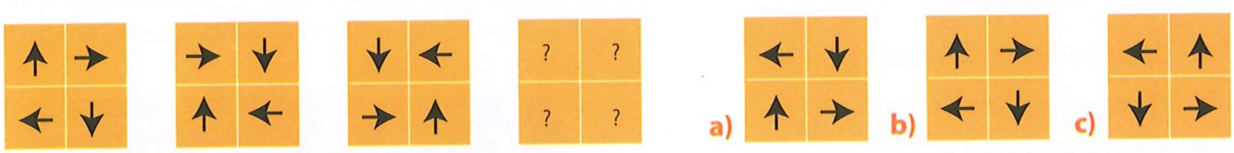
d) 29

e) 35

2. **Escoge** la respuesta correcta.







Cálculo mental

Multiplicar un número múltiplo de 5 por un número múltiplo de 2

En estos casos es muy práctico factorizarlos e ir buscando productos que den 10 o múltiplo de 10.

a) $35 \cdot 8 = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 10 \cdot 28 = 280$.

b) $75 \cdot 12 = 3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 3 = 100 \cdot 9 = 900$.

c) $45 \cdot 16 = 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 = 10 \cdot 72 = 720$.

Ahora, hazlo tú.

a) $45 \cdot 6 =$

b) $75 \cdot 4 =$

c) $85 \cdot 12 =$

d) $15 \cdot 22 =$

Pantallas panorámicas

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Estudios Sociales

Justificación / problemática

Hasta antes de que la irrupción de los DVD entrara a nuestros hogares, ver una película de cine en el televisor convencional significaba visualizarla de manera parcial, ya que se perdía parte de su composición original. Esto se debía a que la relación entre el ancho y la altura era de 4:3 (pantalla ancha), mientras que las películas fueron producidas para mirarlas en pantallas rectangulares, cuya relación entre el ancho y el alto es de 16:9.

El DVD en casa fue la solución para disfrutar de una película, pese a que al ajustar los televisores convencionales, la imagen que se proyectaba generaba dos bandas negras en la parte superior e inferior de la pantalla. De ahí que las industrias fomentaron la aparición de los televisores con pantalla LCD, LED, plasma, CRT, proyectores y retroproyectores.

Texto adaptado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Pantalla_ancha

Shutterstock, 83933887.

Televisor con pantalla LED.

Objetivo

Determinar la pérdida o ganancia de la imagen de una película vista en un televisor en formato *square screen* (4:3).

Recursos

- Televisor de casa
- Película
- Cinta métrica

Actividades

- **Mira** en casa una película, **ponle** pausa y **mide** las dimensiones de la imagen que ves (no las dimensiones de la pantalla de tu televisor).
- **Divide** el valor entre el ancho y el alto. ¿Qué valor obtienes? **Compara** con los valores que obtuvieron tus compañeros y compañeras.
- **Analiza** la relación entre las medidas de la imagen y **determina** a qué formato corresponde.
- **Observa** un video musical u otro en un teléfono celular multimedia y **realiza** las mismas actividades anteriores. ¿Son próximos los resultados?

Shutterstock, 426309313.

Pantallas panorámicas.

Evaluación

1. **Ingresa** a la siguiente página web: *lynk.ec/10m04*
2. **Realiza** un comentario respecto a la pérdida o ganancia de la imagen de una película vista en un televisor en formato *square screen*.
3. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿se aproximan los resultados que obtuviste?
4. ¿Qué conclusión puedes sacar de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Boletos para un concierto

Operaciones con números racionales

Situación cotidiana

Las personas que disfrutan de los deportes o la música suelen ir a un estadio o coliseo. La cantidad de entradas, a veces no abastecen al número de espectadores. Se acostumbra a informar acerca de las entradas vendidas en los puntos de venta; así se puede calcular cuántas quedan o cuál es la cantidad total de entradas. Vamos a aplicar las fracciones.

Shutterstock, 141727294.

Un grupo de música juvenil se va a presentar en pocos días. El primer día se vende $\frac{1}{4}$ de los boletos, el segundo día se expende $\frac{2}{5}$ del resto. Todavía quedan para la venta 540 boletos. ¿Cuántas personas máximo pueden entrar a ver el concierto?

Reflexiona

- ¿Cómo crees que se calcula la cantidad de entradas para un concierto?

Máximo pueden entrar 1 542 personas.

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si la cantidad total de boletos es 6 000 y se mantienen las fracciones vendidas el primero y segundo día, ¿cuántas entradas faltaría vender?

Resuelve la situación

- La utilidad del concierto es de 35 847 USD. Los tres socios se reparten la utilidad de acuerdo con la inversión de cada uno. Si Joel recibe $\frac{1}{2}$ de lo que le corresponde a Cristina y ella recibe $\frac{1}{2}$ de lo que le toca a Jorge, ¿cuánto recibe cada socio?
- En cierta orquesta sinfónica, la tercera parte de los músicos de cuerda más la mitad de los instrumentistas de viento son 13 músicos. Si se ausentan 4 instrumentistas de cuerda, entonces los de viento serían la mitad de los de cuerda. ¿Cuántos músicos son de cada clase de instrumento?
- En una encuesta realizada en un colegio de 1 200 alumnos acerca de las preferencias musicales, se encontró que la tercera parte de los alumnos que les gusta el reguetón es igual al número de alumnos que les gusta el rock y a los que les gusta el pop es el doble de los que les gusta el rock. ¿Cuántos alumnos prefieren cada tipo de música?

Shutterstock, 521200432.

Shutterstock, 363023180.

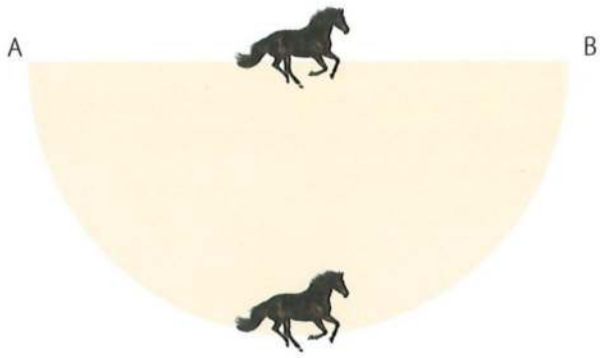
Concierto de la Orquesta Sinfónica Breslavia, Polonia del Foro Nacional de Música bajo la batuta de Ernst Kovaci

Tema: Distancia más corta

Operaciones con números irracionales

Situación cotidiana

Por lo general, hacemos operaciones con números irracionales cuando los utilizamos en distancias al interior de círculos o triángulos rectángulos, donde se aplica el teorema de Pitágoras.



Shutterstock, 412510591.

Dos caballos, Fortuna y Relámpago, corren juntos y, de pronto, se separan sobre un circuito circular de 300 m de diámetro. Fortuna se desplaza sobre el diámetro del circuito, mientras que Relámpago da vuelta a su perímetro.

Si se desvían al mismo tiempo en el punto A y ambos van a igual velocidad, ¿cuál recorrió más distancia y cuánto recorre cada uno?

Reflexiona

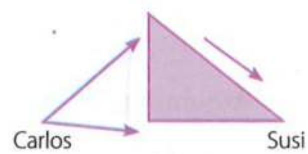
- ¿Qué caballo recorre más distancia?

Fortuna recorre 300 m. Relámpago recorre 471,23 m. La diferencia es de 171,23 m.

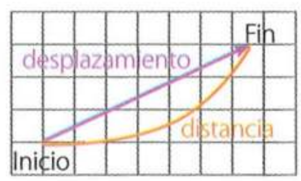
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si la velocidad a la que van es de 800 m por minuto, ¿cuántos minutos más se demora Relámpago que Fortuna para llegar al punto B?
- ¿Es posible teóricamente que se encuentren en algún punto? **Justifica** tu respuesta.

Resuelve las siguientes situaciones

- Carlos recorre 2 km en línea horizontal y después 1 km en ruta vertical. A continuación, vuelve al punto de partida por el mismo camino. Susi se desplaza entre los mismos puntos extremos en línea recta gracias a una rampa. Si ambos salen a la vez y repiten su trayecto a la misma velocidad hasta volver al punto de salida, ¿qué distancia recorre cada uno?

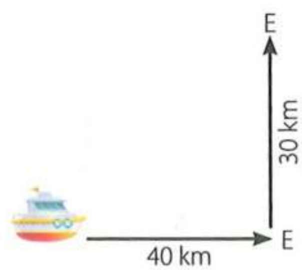


- ¿Llegarán a encontrarse en algún momento si repiten continuamente su trayecto a la misma velocidad?
- Cuando hablamos de distancia y desplazamiento nos hacemos a la idea de una longitud; pero en realidad estos dos términos, aunque se parecen, tienen un significado diferente. La distancia recorrida es la longitud de que recorre un móvil, en tanto que el desplazamiento hace referencia a la línea recta entre la posición inicial y final del móvil.



  La distancia siempre es positiva mientras que el desplazamiento puede ser positivo, negativo o incluso cero.

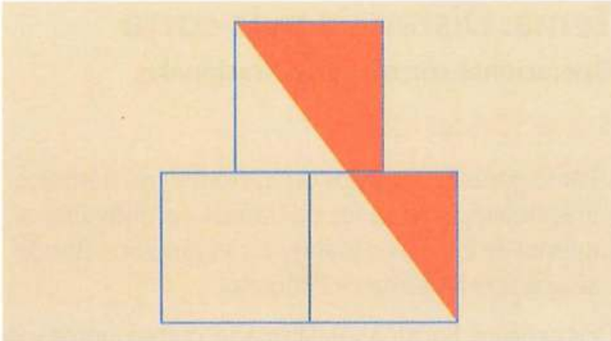
  Un barco sale con dirección Este y recorre 40 km. Luego se dirige al Norte y recorre 30 km. ¿Cuál es la distancia recorrida por el barco y cuál es su desplazamiento desde el lugar de partida?



Shutterstock, 1287229714.

Olimpiadas matemáticas

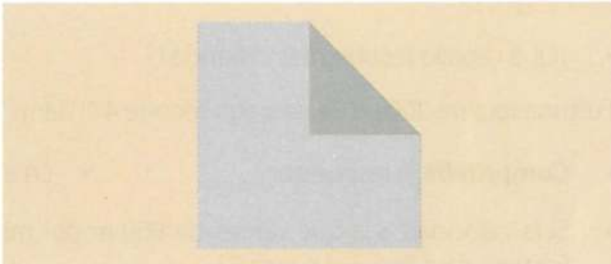
1. En la figura se muestran tres cuadrados con lado de 2 cm. Si el cuadrado de arriba está centrado respecto de los cuadrados de abajo, ¿cuál es el área de la región roja?



Argumenta la solución:

Respuesta:

2. Un cuadrado de papel se dobló hasta colocar una de sus esquinas exactamente en el centro, como se muestra en la figura. Con el doblez se formó un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?



Argumenta la solución:

Respuesta:

3. En un examen, el promedio de las calificaciones obtenidas por los estudiantes fue de 6. Exactamente 60 % de los estudiantes tuvieron una calificación aprobatoria. El promedio de los estudiantes que aprobaron fue 8. ¿Cuál fue el promedio de los estudiantes que no aprobaron?

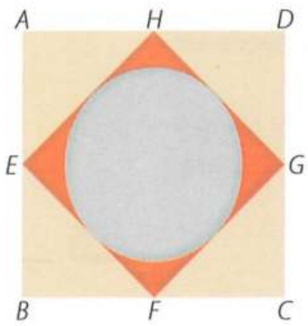
Argumenta la solución:

Respuesta:

Recuperado de: http://www.ommenlinea.org

4. Manejando por la carretera, a velocidad constante, encontré una señal que indicaba AB kilómetros (A y B son dígitos). Una hora después, apareció la señal con BA kilómetros y otra hora más tarde encontré la que indicaba A0B kilómetros. **Calcula** A + B.

5. La figura ABCD es un cuadrado y E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Sabiendo que el círculo que está inscrito en el cuadrado EFGH tiene área π, ¿cuál es el área de ABCD?



6. El código de barras de un libro está formado por barras blancas y dos tipos de barras negras: anchas y delgadas. Sabemos que el código comienza con barras negras y que hay 3 barras negras anchas menos que barras blancas. ¿Cuántas barras negras delgadas hay?

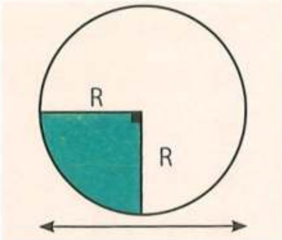
5 3201546801 012345983478976534

Shutterstock, 1908743743.

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y **analiza**.

Una persona decide plantar flores en la sección (figura) del jardín circular de 36 m de diámetro. ¿Cuál es el área?



Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) 9π

b) 81π

c) 18π

d) 324π

2. Lee y **analiza**.

Completa la serie:
3D, 5H, 4L, 6P, 5T, 7X, ,

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) 6A, 8D

b) 9A, 11D

c) 6B, 8F

d) 9B, 11F

3. Lee y **analiza**.

Extrae los factores de los radicales y **calcula** el resultado de la siguiente operación:

$$-3\sqrt{27}-2\sqrt{125}+8\sqrt{75}-10\sqrt{20}$$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $+5\sqrt{3}-12\sqrt{5}$

b) $31\sqrt{3}-30\sqrt{5}$

c) $-7\sqrt{15}$

d) $1\sqrt{15}$

4. Lee y **analiza**.

Simplifica la expresión $\dfrac{91abc^6}{39a^2b^6c^5}$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $-\dfrac{7\,c}{3\,ab^5}$

b) $\dfrac{91\,ab^5c}{39}$

c) $\dfrac{7\,c}{3\,ab^5}$

d) $\dfrac{91\,c}{39\,ab^5}$

5. Lee y **analiza**.

Al racionalizar la expresión $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ se obtiene:

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $\sqrt{xy}$

b) $\dfrac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$

c) $\dfrac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x-y}$

d) $-\sqrt{xy}$

6. Lee y **analiza**.

¿Cuál es el resultado de factorizar: $x(y+2)+y+2$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $2x(y+2)$

b) $(y+2)x$

c) $(y-2)$

d) $(y+2)(x+1)$

7. Lee y **analiza**.

Los dos factores al descomponer

$b(y-1)-(b+2)(y-1)$ son:

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(b+2)(y-1)$

b) $(y-1)$

c) $(y-1)(b+2)$

d) $-2(y-1)$

8. **Lee** y **analiza**.

Factoriza $4a + 4b + xb + xa$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $4x + ab$

b) $4ax + 4bx$

c) $(a + b)(4 + x)$

d) $(4 + a)(b + x)$

9. **Lee** y **analiza**.

Factoriza $4x + 12 + xy + 3y$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(x + 3)(4 + y)$

b) $(x + 4)(y + 3)$

c) $(x + 3)(4 + x)$

d) $(y - 3)(4 + x)$

10. **Lee** y **analiza**.

Si descompones
$2(a + b + 1) - x(a + b + 1) - (a + b + 1)$,
su resultado es:

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(a + b + 1)(1 - x)$
c) $(a + b + 1)(2 - x)$

b) $(a + b + 1)(3 - x)$
d) $(a + b + 1)(x - 1)$

11. **Lee** y **analiza**.

El factor común del polinomio: $x^3 - x^2 + x - 1$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(x + 2)$
c) $(x - 1)$

b) $(x^2 - 1)$
d) $(3x - 1)$

12. **Lee** y **analiza**.

Si descompones $18x^5y^3 - 36x^4y^3 - 54x^2y^8$, su resultado es:

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $2(9x^5y^3 - 18x^4y^3 - 27x^2y^8)$

b) $6xy(3x^4y^2 - 6x^3y^2 - 9x\ y^7)$

c) $18xy(x^4y^2 - 2x^3y^2 - 3x\ y^7)$

d) $18x^2y^3(x^3 - 2x^2 - 3y^5)$

13. **Lee** y **analiza**.

Resuelve la operación:

$$6{,}51 \times 10^8 + 6{,}39 \times 10^7 - 4{,}81 \times 10^9$$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $2{,}33 \times 10^8$
c) $-4{,}095 \times 10^8$

b) $-3{,}905 \times 10^8$
d) $5{,}52 \times 10^8$

14. **Lee** y **analiza**.

Resuelve la operación:

$$3{,}1 \times 10^6 \times 7{,}9 \times 10^{12}$$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $2{,}45 \times 10^{12}$
c) 3×10^6

b) $2{,}449 \times 10^{19}$
d) 2×10^{18}

15. **Lee** y **analiza**.

Resuelve la operación:

$$(2{,}51 \times 10^8) : (3{,}07 \times 10^2)$$

Argumenta la respuesta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $8{,}17 \times 10^4$
c) $8{,}17 \times 10^2$

b) $0{,}817 \times 10^6$
d) $8{,}17 \times 10^6$

16. **Lee** y **analiza**.

La suma de tres números es 103, el primer sumando es 25 y el tercero es la suma de adicionar 10,2 al primer sumando. ¿Cuál es el segundo sumando?

Escoge la respuesta correcta.

a) 67,8
c) 42,8

b) 35,2
d) 80,2

17. Lee y **analiza**.

Racionaliza y **selecciona** la respuesta correcta.

$$\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Escoge la respuesta correcta.

a) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

b) $6\sqrt{5}-\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$

18. Lee y **analiza**.

Calcula el área del polígono.

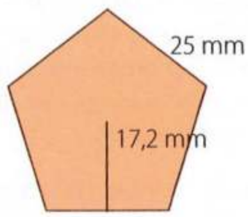
Escoge la respuesta correcta.

a) 1 343 mm^2

b) 1 075 mm^2

c) 1 827 mm^2

d) 1 193 mm^2



19. Lee y **analiza**.

Al factorizar la expresión x^3-8x^2-3x+6, la respuesta correcta es:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(x+3)(x-1)^2$

b) $(x-1)(x+3)^2$

c) $(x-3)(x+1)^2$

d) $(x+1)(x-3)^2$

20. Lee y **analiza**.

Un número excede a otro en 5 unidades. La tercera parte del mayor es igual al 25 % del menor aumentado en 10 unidades. Los números son:

Escoge la respuesta correcta.

a) 15 y 20

b) 10 y 20

c) 10 y 15

d) 15 y 25

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

El cráter más grande de la Tierra de menos de 100 000 años

Shutterstock, 1647555823.

De acuerdo con los científicos, el cráter Yilan mide alrededor de 1,15 millas.

"Un cráter con forma de media luna, hallado en el noreste de China, ha obtenido el récord como el cráter de impacto más grande en la Tierra formado en los últimos 100 000 años, según el Observatorio de la Tierra, dependiente de la NASA. Sus descubridores lo describen en la revista Meteoritics and Planetary Science, donde explican que el cráter Yilan mide aproximadamente unos 1,85 kilómetros de ancho y, probablemente, se formó hace unos 46 000 a 53 000 años, según la datación por radiocarbono del carbón y los sedimentos orgánicos del lago que lo 'esconde'. Los investigadores recolectaron estas muestras de sedimentos extrayendo un núcleo de perforación del centro del cráter.

Debajo de más de 100 metros de sedimentos de lagos y capas de pantano, se encuentra una losa de granito de casi 320 metros de espesor. Formada por muchos fragmentos rocosos pegados en una matriz, esta enorme roca tiene señales de haber sido golpeada por un meteorito. Por ejemplo, hay trozos que muestran señales de haberse derretido y recristalizado durante el impacto, ya que el granito se calentó rápidamente y, luego, se volvió a enfriar. Otros fragmentos escaparon de este proceso de fusión y, en cambio, contienen cuarzo, que se rompió en un patrón distinto cuando la roca espacial se estrelló.

El equipo también descubrió fragmentos de vidrio en forma de lágrima y piezas perforadas con pequeños agujeros hechos por burbujas de gas; ambas características también indican que allí se produjo un impacto de alta intensidad, según el comunicado de la NASA.

Falta una parte del borde sur del cráter Yilan, por lo que la estructura geológica parece tener forma de media luna. Esa forma es relativamente rara, así lo explicó, al Global Times, Chen Ming, uno de los autores del artículo e investigador del Instituto de Geoquímica de Guangzhou. En octubre de 2021, el satélite Landsat-8 capturó una sorprendente instantánea del borde norte del cráter y los científicos, ahora, están investigando cómo y cuándo desapareció el borde sur.

El llamado Meteor Crater, en Arizona, anteriormente ostentaba el récord del cráter de impacto más grande de menos de 100 000 años; tiene entre 49 000 y 50 000 años y mide 1,2 kilómetros de diámetro. El cráter Xiuyan, otro cráter descubierto en China, mide 1,8 kilómetros, si bien se desconoce su edad".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-descubren-crater-mas-grande-tierra-menos-100000-anos-202203050120_noticia.html

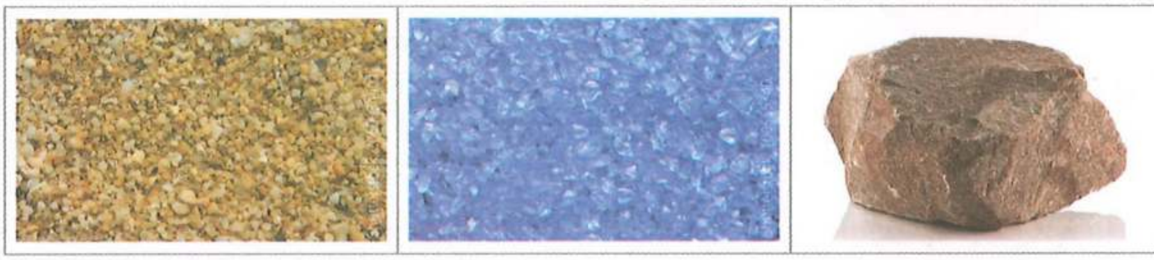
Ficha de comprensión lectora

1. Con base en la lectura, **responde** en tu cuaderno las siguientes preguntas.
   a) ¿Sobre qué trata el artículo?
   b) ¿En dónde está ubicado este cráter?
   c) Lo que escribe el autor, ¿son hechos u opiniones? **Justifica.**
   d) ¿Cómo imaginas que sería el impacto de un meteorito en tu ciudad?

Shutterstock, 1425487130.

Cráter Meteor, Arizona.

   e) ¿Fragmentos de qué materiales reposan en este cráter? **Identifícalos** en las imágenes.



Shutterstock, 2077015429.

2. **Analiza** si, de acuerdo con la lectura, las siguientes oraciones son verdaderas (V) o falsas (F).
   a) El cráter Yilan tiene forma de luna llena.
   b) Para estudiar el centro del cráter Yilan, los investigadores recolectaron muestras de sedimentos extrayendo un núcleo de perforación.
   c) El llamado Meteor Crater, en Arizona, es más grande y más antiguo que el cráter Yilan.

Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** en Internet acerca de otros cráteres similares al de Yilán. **Elabora** un cuadro comparativo de sus tamaños y tiempos de impacto.
2. **Toma** imágenes de la web de diferentes cráteres que se hayan formado por impactos de meteoritos y **elabora** un *collage*.
3. ¿Cuál crees que serían las consecuencias si un meteorito cayera sobre la Tierra en nuestros tiempos?

Trabajo colaborativo

4. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase.

   Tomen en cuenta las siguientes recomendaciones:

   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.

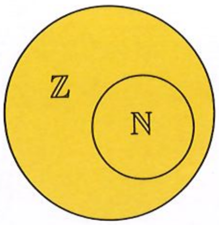
Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

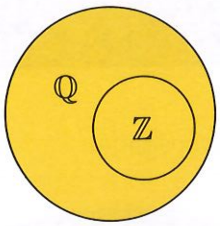
I.M.4.2.2. / I.M.4.2.3. / I.M.4.8.1.

1. **Identifica** la relación que existe en los siguientes conjuntos de números:

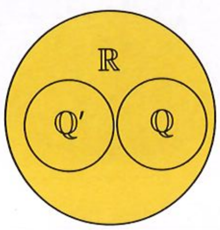
a)



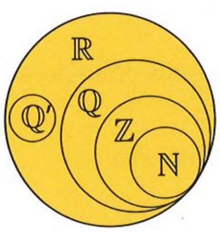
b)



c)



d)



2. **Utiliza** productos notables y **resuelve**.

a) $(3x^4 - 5xy)^2 =$

b) $(2x + y)^3 =$

c) $(x^2 + 3)(x^2 - 3) =$

3. **Descompón** en factores y **simplifica**.

a) $9 - (x + y)^2 =$

b) $4x^2 + 15x + 9 =$

c) $a^2 + ab + ax + bx =$

4. **Utiliza** las propiedades de la potenciación y **resuelve**.

a) $\left[(\pi)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} =$

b) $(0,7)^4\,(0,7)^{-5}\,(0,7)^2 =$

c) $(ab)^{-5} \div (ab)^{-8} =$

5. **Expresa** como potencias de exponente racional.

a) $\sqrt[3]{-8} =$

b) $\sqrt[5]{(ab)^4} =$

c) $\sqrt[3]{(a^2b)^5} =$

6. **Expresa** en forma de radical.

a) $(12)^{3/5} =$

b) $(xy^2)^{1/3} =$

c) $(xy)^{1/2} =$

7. **Realiza** las siguientes operaciones en notación científica.

$(-3 \times 10^7)(2 \times 10^{-3}) + (5 \times 10^8) \div (5 \times 10^{-4})$

8. **Expreso mis emociones. Reflexiona** sobre la solidaridad. **Indica** alguna actividad en la que hayas sido solidario con un compañero de clase.

9. La factorización completa de: $a^3 - 8a^2 + 16a$ es:

a) $a(a^4 - 8a^2 + 16a)$

b) $a(a - 2)^4$

c) $a(a - 4)(a - 4)$

d) $a(a^2 - 4)^2$

10. **Utiliza** tu calculadora científica y **determina** el resultado de la operación.

$1,3 \times 10^{15} + 0,8 \times 10^{-12} - 0,92 \times 10^7$

a) $1,3 \times 10^{15}$

b) $2,3 \times 10^{14}$

c) $0,3 \times 10^{16}$

d) $9,2 \times 10^{20}$

11. Sin realizar la multiplicación, **expresa** el producto de: $(2x + 3y)(2x - 3y)$.

a) $8x^2$

b) $2x^2 - 3y^2$

c) $4x^2 - 9y^2$

d) $4x^2 + 9y^2$

12. El número 0,000 000 000 203 expresado en notación científica es:

a) $2,03 \times 10^9$

b) $2,03 \times 10^{11}$

c) $2,03 \times 10^{-10}$

d) 203×10^{-10}

13. Selecciona la factorización correcta del siguiente binomio.

$9x^4 - 4x^2 =$

a) $x^2(3x + 3)(3x - 1)$ **c)** $x^2(3x + 2)(3x - 2)$

b) $x^3(3x + 2)(3x + 2)$ **d)** $(3x + 2)(3x - 2)$

14. Factoriza el siguiente trinomio y **selecciona** la respuesta correcta

$x^2 + 10x + 25 =$

a) $(x - 1)(x + 5)^2$ **c)** $(x + 5)(x + 12)$

b) $(x + 5)^2$ **d)** $(x + 10)(x + 15)$

15. Escoge la respuesta correcta.

¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

i) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{64}}\right)^{-4} - 0{,}33... + \left(\frac{2}{9} \div \frac{4}{18}\right)^{-3} = \frac{35}{48}$

ii) $\sqrt{pq^{-9}\sqrt{m^2n^{-10}\sqrt{m^{-7}p^8\sqrt{m^{-10}n^8p^{24}q^{40}}}}} = \frac{p^3}{mn^2q^2}$

iii) $\frac{4\times10^5\times3\times10^4\div6\times10^3}{8\times10^6\div4\times10^2} = 2\times10^2$

iv) $\sqrt[3]{500x^6y^3} - \sqrt{243a^2b} + \sqrt{108a^2b} - \sqrt[3]{256x^6y^3} = \sqrt[3]{4}x^2y - 3a\sqrt{3b}$

a)	ii, iii y iv
b)	i, ii y iv
c)	iii, iv y i
d)	i, ii y iii

16. Racionaliza y **simplifica** la expresión. **Selecciona** la respuesta correcta.

$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$

a)	$\frac{2a-6\sqrt{a}}{a+9}$	**c)**	$\frac{2a+6\sqrt{a}}{a+9}$
b)	$\frac{2a+6\sqrt{a}}{a-9}$	**d)**	$\frac{2a-6\sqrt{a}}{a-9}$

Coevaluación

17. Trabajen en equipo y **resuelvan**.

En una investigación estadística se preguntó a un grupo de personas sobre la cantidad de dinero que gastan en alimentación en un mes. Estos fueron los resultados.

105, 197, 245, 163, 134, 218, 199, 160, 196, 221, 154, 228, 131, 180, 178, 157, 151, 175, 201, 183, 153, 174, 190, 220, 143, 220, 221, 180, 230, 245, 180, 222.

a) Ordenen la distribución de menor a mayor.

b) Construyan una tabla de frecuencias con datos agrupados.

c) Determinen el valor del rango.

d) Encuentren el primer, segundo y tercer cuartil.

e) Determinen el segundo y quinto decil.

f) Obtengan el percentil 20 y el percentil 50.

g) Comparen estos valores con la mediana.

h) Dibujen un histograma de frecuencias y **localicen** el segundo cuartil, el decil quinto y el percentil 50.

Autoevaluación

18. Pinta según la clave.

Puedo ayudar a otros **Resuelvo por mí mismo** **Necesito ayuda** **Estoy en proceso**

Contenidos	Resuelvo operaciones con números reales y aplico sus propiedades.	
	Realizo operaciones de forma efectiva con números reales.	
	Racionalizo monomios y binomios.	
	Determino las medidas de posición.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad, en situación de la vida cotidiana?

unidad 2

Ecuaciones e inecuaciones lineales - Lógica proposicional

Exportaciones de banano

Según cifras de la Asociación de Exportadores de Banano del Ecuador (AEBE), la exportación de cajas de 18,14 kilogramos alcanzó, en 2020, el nivel de 386 millones; mientras que, en 2021, llegó a 376 millones de cajas, es decir, una caída del 2,5 % en los envíos de banano.

A lo largo de los meses del 2021, esta tendencia se mantuvo, salvo septiembre y octubre que presentaron crecimientos positivos del 1,9 % y 16,2 %, respectivamente, de acuerdo con las cifras de la AEBE.

Pese a las menores exportaciones, la producción del 2021 fue superior al año anterior. El destino con mayor participación en 2021 fue Europa. Los países de este continente adquirieron el 33 % de la oferta, seguido de Rusia que mantuvo la cuota del 22 %. En tercer y cuarto lugar se ubicaron los países de Medio Oriente, con el 13 %, y Estados Unidos con el 10 %.

Preguntas generadoras

- ¿A qué se debe la caída en los envíos de banano al mundo?
- ¿De qué otras formas se aplica la matemática en la producción?
- ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utilizas ecuaciones o inecuaciones?

Álgebra y funciones

- Ecuaciones e inecuaciones de primer grado en $\mathbb{R}$
- Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Método gráfico
- Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Método gráfico

Geometría y medida

- Lógica matemática, proposiciones valor de verdad, conectores lógicos: disyunción, conjunción
- Condicional, bicondicional, negación. Tautología y contradicción
- Leyes de la lógica proposicional

Objetivos

O.M.4.3. / O.M.4.5.

Tema 1 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado en $\mathbb{R}$

Shutterstock, 118599115.

El salón de clases es un ámbito que se presta para toda clase de cálculos matemáticos.

Recuerda que...

La propiedad del inverso multiplicativo consiste en multiplicar cada miembro de la ecuación por el mismo número, pero invertido. Por ejemplo, en $2x = 4$, si aplicamos el inverso multiplicativo queda:

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x = 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 2$$

¿Sabías que?

El símbolo ∞ significa infinito, es decir, no tiene fin.

$+\infty$: Significa más infinito

$-\infty$: Significa menos infinito

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace web: *lynk.ec/10m05*

imprime la página 90 para resolver ecuaciones.

Saberes previos

Recuerda. En lenguaje algebraico, la expresión "parte de" se refiere a una división y la palabra "veces", a una multiplicación. **Escribe** un ejemplo.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contiene una o más variables. en cambio, una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o varias incógnitas, que se verifica para ciertos valores de las incógnitas; se expresa con los signos $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$.

Ecuaciones de primer grado

En un salón de clases, la cuarta parte son niñas y los niños exceden a la mitad en tres. ¿Cuántos estudiantes tiene el salón de clases?

Traducimos del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático: la variable *x* representa el número de estudiantes en el salón de clases.

La cuarta parte: $\frac{x}{4}$. La mitad excedida en 3: $\frac{x}{2} + 3$.

Entonces, la ecuación buscada es: $\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{2} + 3\right) = x$.

Definición de ecuación lineal. Es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y el grado de la incógnita x es 1.
Resolverla significa encontrar el valor de la variable que satisface la igualdad.

A continuación, resolveremos la ecuación planteada anteriormente.

Primero, eliminamos paréntesis.

$$\frac{x}{4} + \frac{x+6}{2} = x$$

Luego, resolvemos la suma de fracciones y eliminamos el denominador aplicando la propiedad del inverso multiplicativo.

$$\frac{x + 2x + 12}{4} = x$$

$$3x + 12 = 4x$$

Después transponemos los términos agrupando las variables en la izquierda, y las constantes (números) en la derecha.

$$3x - 4x = -12$$

$$-x = -12$$

$$x = 12$$

Finalmente, despejamos la variable x y multiplicamos los dos miembros de la igualdad por (–1)

Propiedades de las ecuaciones

Propiedad	Enunciado
Si $a = b$, entonces $a \pm c = b \pm c$.	Una igualdad no cambia si se le suma o se le resta un mismo número a cada miembro.
Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$.	Una igualdad se mantiene si se multiplica o divide por un mismo número distinto de cero en cada miembro.

Archivo Editorial

M.4.1.38. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$ para resolver problemas sencillos.
M.4.1.39. Representar un intervalo en $\mathbb{R}$ de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$.

Inecuaciones de primer grado

Desigualdades estrictas		Desigualdades no estrictas	
$a > b$	$a - b$ es positiva	$a \geq b$	$a > b$ o $a = b$
$a < b$	$a - b$ es negativa	$a \leq b$	$a < b$ o $a = b$

Archivo Editorial

¿Sabías que?

Una inecuación es una desigualdad de dos cantidades, tal que la una es mayor que la otra. Los símbolos <, >, ≥ y ≤ se denominan signos de la desigualdad.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Expresión algebraica	Ejemplos
Una desigualdad **no cambia** de **sentido** si se **suma** o se **resta** un mismo número a cada miembro.	Si $a < b$, entonces, $a \pm c < b \pm c$.	$8 < 10$; $8 + 4 < 10 + 4$; $12 < 14$ $1 > -7$; $1 - 5 > -7 - 5$; $-4 > -12$
Una desigualdad **no cambia** de **sentido** si se **multiplican** o se dividen sus dos miembros por un mismo **número positivo**.	Si $a < b$ y c es un número positivo, entonces, $ac < bc$. $c > 0$	$3 < 7$; $3(2) < 7(2)$; $6 < 14$ $4 > -2$, $4(5) > -2(5)$; $20 > -10$
Una desigualdad **cambia de sentido** cuando se **multiplican** o se dividen sus dos miembros por un **número negativo**.	Si $a < b$ y c es un número negativo, entonces, $ac > bc$. $c < 0$	$-5 < 2$, $-5(-3) > 2(-3)$, $15 > -6$ $8 > 3$, $8(-10) < 3(-10)$, $-80 < -30$

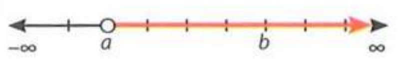
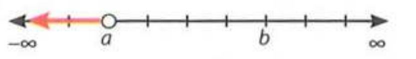
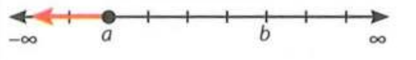
Archivo Editorial

¿Sabías que?

La **ley de tricotomía** dice que si a y b son dos números reales cualesquiera, se cumple solo una de las siguientes relaciones:

$a > b$, $a = b$; $a < b$

Tipos de intervalos

Intervalo	Interpretación	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Abierto	No incluye los extremos *a* y *b*.	(a, b) o $]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Cerrado	Sí incluye los extremos *a* y *b*.	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto por la izquierda	No incluye el extremo izquierdo *a*.	$(a, b]$ o $]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
Semiabierto por la derecha	No incluye el extremo derecho *b*.	$[a, b)$ o $[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Abierto a izquierda y tiende a más infinito	No incluye el extremo izquierdo y tiende $a +\infty$.	$(a, +\infty)$ o $]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
Tiende a menos infinito y abierto a la derecha	No incluye el extremo derecho y tiende $a -\infty$.	$(-\infty, a)$ o $]-\infty, a[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	
Cerrado a izquierde y tiende a más infinito.	Sí incluye el extremo izquierdo y tiende $a +\infty$.	$[a, +\infty)$ o $[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
Tiende a menos infinito y cerrado a derecha.	Sí incluye el extremo derecho y tiende $a -\infty$.	$(-\infty, a]$ o $]-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	

Archivo Editorial

Taller Evaluación formativa

I.M.4.2.4.

1. Relaciona cada ecuación con su respuesta.

a) $4(x-3)=2x-3$ — 1. $x=-12$

b) $\frac{7}{4}x-5=2(x-1)$ — 2. $x=\frac{2}{7}$

c) $\frac{x-4}{2}+3=4x$ — 3. $x=\frac{9}{2}$

d) $\frac{x}{2}-5x+2=-1$ — 4. $x=\frac{2}{3}$

2. Analiza cada proposición y **escribe** si es verdadera (V) o falsa (F).

a) El signo de la desigualdad cambia al multiplicar por –1 toda la inecuación.

b) Una ecuación es una igualdad.

c) El símbolo $\geq$ significa que los extremos no se incluyen en la solución.

d) Si $a>b$ y $b>c$, entonces $a<c$.

3. Escribe la igualdad o desigualdad para cada enunciado.

a) Veinticuatro es mayor o igual que un número.

b) La cuarta parte de un número aumentado en cinco es igual a 30.

c) Un número es mayor o igual a –2 y menor que 7.

d) Seis veces un número disminuido en 3 es igual a 56.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x-5(2x-3)=3(x-1)+4$

b) $\frac{2(x-5)}{3}+4=5x-2$

c) $3-\frac{x+2}{5}=5(3x-2)$

d) $3(x-4)+10=13-x$

e) $2x-15=5$

f) $2x-15=3x+3$

g) $7y+8y-9=4+2$

h) $x+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

i) $x+\frac{2}{3}=\frac{4}{5}$

j) $6x+3(6-x)+8=2x+4$

k) $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}=\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}$

l) $5-\frac{x-2}{4}=(3x-2)-12$

m) $4(x-5)+10=2x+6$

n) $5(2x-1)=3x+20+2x$

o) $\frac{x-3}{4}=\frac{1-x}{3}$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales.

a) $2x-3<3x-6$

b) $7x+\frac{2}{3}>8-\frac{1}{4}x$

c) $-3x\leq 3-x\leq 5x+2$

d) $\frac{1}{3}<-x-\frac{5}{6}<\frac{2}{3}x+4$

e) $5(x+3)\geq\frac{1}{2}(x+2)(5)>-3x-1$

f) $6-2x\geq 0$

g) $3x+5\geq 2x-19$

h) $3x+5<x+15$

i) $3(x+2)\geq 2(x-1)$

j) $1+3x\leq\frac{1}{2}$

k) $3(1-2x)<2x-5$

l) $25-x>3(x+8)$

m) $5x-2\leq -x+6$

6. Expresa el intervalo como una desigualdad en la variable x.

a) $(-5, 8)$

b) $(-\infty, 3]$

c) $[4, \infty)$

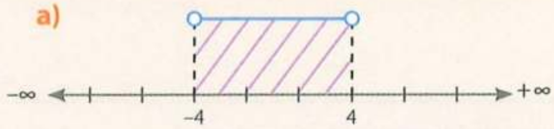
d) $[-7, 12]$

e) $[0, 8)$

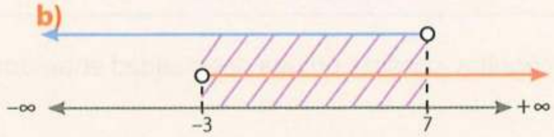
f) $(1, 6]$

7. Escribe el intervalo u operación que está representado en la recta numérica.

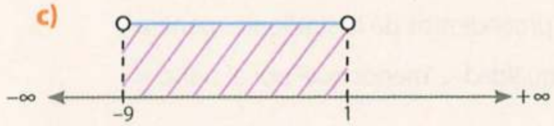
a)



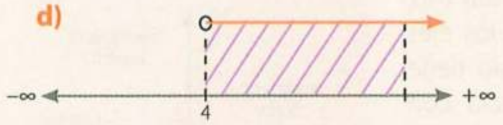
b)



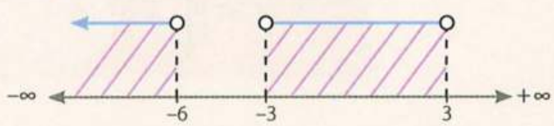
c)



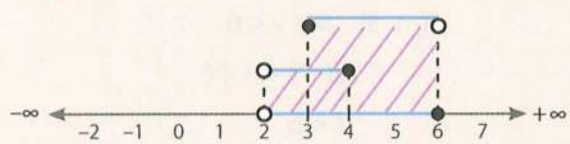
d)



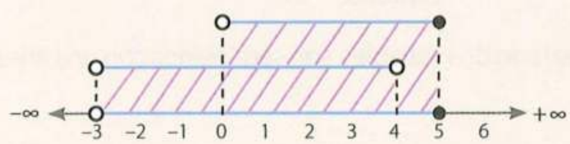
e)



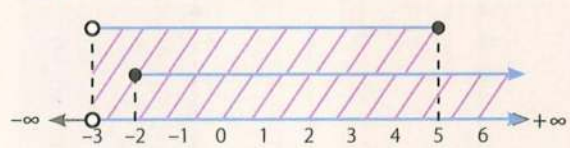
f)



g)



h)



8. Determina qué números enteros se encuentran en cada intervalo.

a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) $(-2\pi, \pi)$

d) $[0,\overline{3}; 5[$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

9. Resuelvan los siguientes problemas:

a) El doble de un número aumentado en 3 es igual al triple de dicho número disminuido en 5.

b) El triple de la edad de María aumentada en 5 años es igual al doble de su edad aumentada en 10.

10. Dado $-3 < 4$, **determinen** la desigualdad obtenida si:

a) Se suma 5 a ambos lados.

b) Se resta 2 a ambos lados.

c) Ambos lados se multiplican por 3.

d) Ambos lados se multiplican por $\frac{1}{3}$.

11. Representen gráficamente en tu cuaderno.

a) $(-\infty, 3]$

b) $(2, \infty)$

c) $[3, 6]$

d) $(3, 7)$

12. Resuelvan las siguientes inecuaciones:

a) $-3 < x - 1 \leq 5$

b) $\frac{1}{2}x + 3 \leq \frac{3}{4}x - 2$

c) $5x + 2 < x - 3 < 4x - 5$

d) $\frac{5 - 3x}{2} > -x - 1 \geq \frac{\frac{3}{4} + x}{\frac{1}{2}}$

e) $3x + 0{,}6 < 1{,}2x - 1 < x + 3{,}4$

f) $2 + \frac{x + 3}{4} < x + 2 \leq \frac{5(x - 4)}{2}$

g) $2x - 5 > 3x + 2$

Actividad indagatoria

13. Indaga y **escribe** en tu cuaderno.

¿Cuándo una ecuación es incompatible?

Tema 2 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

¿Sabías que?

Una inecuación lineal con dos variables x, y es una desigualdad que tiene una de las siguientes formas:

$ax + by + c < 0$,
$ax + by + c > 0$

$ax + by + c \leq 0$,
$ax + by + c \geq 0$

La solución de una inecuación lineal con dos variables es el conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfacen la igualdad, por lo tanto, corresponde a la región sombreada bajo o sobre la recta.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace web: *lynk.ec/10m06*

Imprime la página y **resuelve** los ejercicios, **verifica** los procesos.

Saberes previos

Reflexiona. ¿En cuántos semiplanos divide una recta a un plano?

Una inecuación lineal, con dos incógnitas, consiste en una desigualdad entre dos incógnitas de forma lineal.

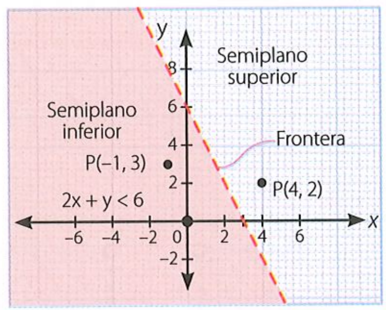
Antonia quiere resolver la siguiente inecuación lineal $2x + y < 6$.

Para resolver la inecuación lineal, procedemos de la siguiente manera:

- Cambiamos el signo de la desigualdad < "menor que" por el signo =.
  $2x + y = 6$ o $y = -2x + 6$.
- Graficamos la recta $y = -2x + 6$. Para ello, buscamos las intersecciones con los ejes coordenados. Como la desigualdad tiene el signo <, representamos la recta con línea punteada para indicar que los puntos que forman la recta no pertenecen al conjunto solución.

  Si $x = 0$, $y = 6$, $(0, 6)$

  Si $y = 0$, $x = 3$, $(3, 0)$



Archivo Editorial

- Tomamos un punto sobre o bajo la recta y reemplazamos en la inecuación para determinar si satisface la inecuación.

$P(4, 2)$ $2x + y < 6$

$2(4) + 2 < 6$

$10 < 6$

10 no es menor que 6.

El punto (4, 2) no satisface la inecuación.

$P(-1, 3)$ $2x + y < 6$

$2(-1) + 3 < 6$

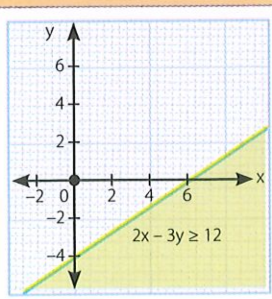
$1 < 6$

El punto $P(-1, 3)$ satisface la inecuación. Pintamos la región donde se encuentra el punto.

La gráfica de una inecuación lineal con dos variables, son semiplanos con una línea recta como frontera.

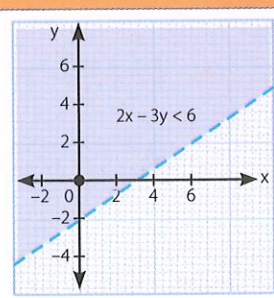
Ejemplos:

$2x - 3y \geq 12$



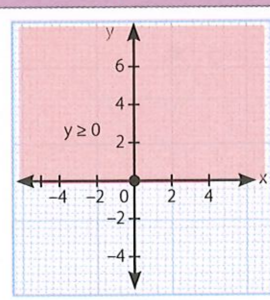
La frontera de la región es la recta continua $2x - 3y = 12$, porque la desigualdad es ≥.

$2x - 3y < 6$



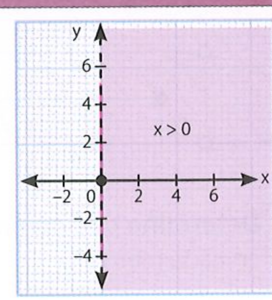
La frontera de la región es la recta punteada $2x - 3y = 6$, porque la desigualdad es <.

$y \geq 0$



La frontera de la región es la recta $y = 0$, es decir, el eje x.

$x > 0$



La frontera de la región es la recta $x = 0$, es decir, el eje y.

Archivo Editorial

M.4.1.40. Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución.

Si la inecuación presenta los signos "≥, ≤", se representa con una **recta continua**. Esto quiere decir que los puntos de la recta también **son soluciones** de la inecuación.

Si la inecuación presenta los signos ">, <", se representa con una **línea punteada**. Esto quiere decir que los puntos de la recta **no forman parte de las soluciones** de la inecuación.

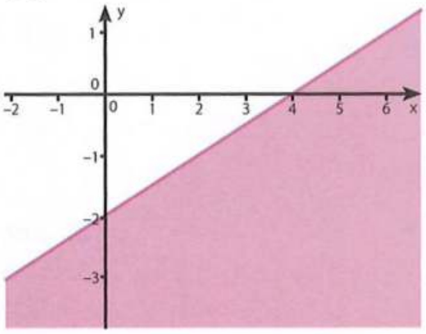
Ejemplos

a) Encontrar el conjunto solución de la inecuación: $2x-4y\geq 8$.

Solución

Cambiamos el signo de la desigualdad por "=" y graficamos.

$$y=\frac{2x-8}{4}$$



Archivo Editorial

Como la inecuación tiene el símbolo ≥, representamos la recta con una línea continua para indicar que los puntos de la recta pertenecen a la solución.

Si $x=4$, $y=0$; (4, 0), sí pertenece a la recta

Si $x=0$, $y=-2$; (0, –2), sí pertenece

Tomamos un punto sobre o bajo la recta.

P (5, 2); $2x-4y\geq 8$	P (2, –3); $2x-4y\geq 8$
$2(5)-4(2)\geq 8$	$2(2)-4(-3)\geq 8$
$2\geq 8$, falso	$16\geq 8$, verdadero
No satisface la inecuación.	Satisface la inecuación, la solución es la parte sombreada.

b) Hallar el conjunto solución de la inecuación: $\frac{2}{3}x-2\left(\frac{1}{4}x-2y\right)<3y-5$.

Solución

$$\frac{2}{3}x-2\left(\frac{x-8y}{4}\right)<3y-5$$

$$\frac{2}{3}x-\frac{x-8y}{2}<3y-5$$

$$\frac{4x-3x+24y}{6}<3y-5$$

$$x+24y<18y-30$$

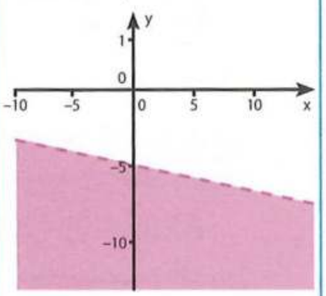
$$x+6y<-30$$

Cambio el signo de la inecuación por "=":

$x+6y=-30$

Archivo Editorial

Graficamos la recta con una línea punteada.



La solución de la inecuación es la parte sombreada.

Encontramos la **región** solución, tomando los puntos:

P (0, 1)

$0+6(1)<-30$

$6<-30$, falso

No satisface.

P(1, –10)

$1+6(-10)<-30$

$1-60<-30$

$-59<-30$

Satisface la inecuación.

Competencia comunicacional

Las inecuaciones se aplican en la vida cotidiana, por ejemplo al ir de compras, controlar la velocidad de un auto o, simplemente, en la relación de nuestro peso con nuestra altura.

Shutterstock, 136758263.

Responde: ¿cuál es la diferencia entre inecuaciones y ecuaciones?

Glosario

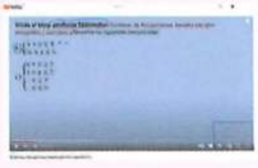
continua. Línea que no tiene interrupciones.

región. Espacio limitado que cumple una determinada condición o circunstancia.

Competencia digital

Refuerza lo aprendido. **Mira** el video del link

lynk.ec/10m07



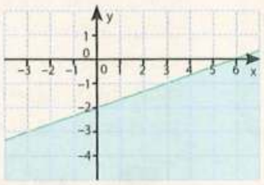
Taller

Evaluación formativa

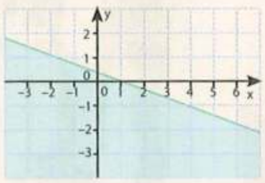
I.M.4.2.4.

1. **Responde** verdadero (V) o falso (F) si las siguientes inecuaciones lineales corresponden a las soluciones pintadas.

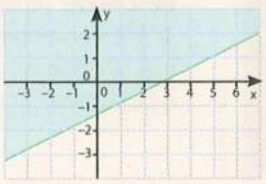
   a) $x + 3y \geq 6$



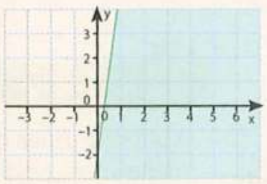
   b) $3x + 4y > x - y + 2$



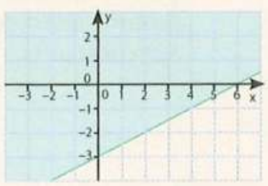
   c) $3x - 5y \leq 8$



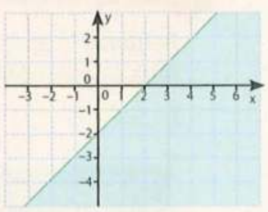
   d) $y < 8x + 2$



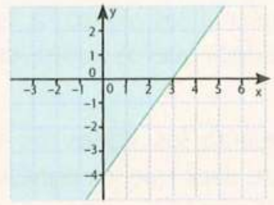
   e) $y \geq \frac{1}{2}x - 3$



   f) $x + y \geq 2$



   g) $4x - 3y \leq 12$



2. **Selecciona** el punto que satisface a cada inecuación.

   a) $x - 5y > 4$

   A(4, 0) B(0, −1) C(0, 1) D(−2, −1)

   b) $y - x \geq 3$

   A(0, 2) B(1, 1) C(1, 3) D(0, 3)

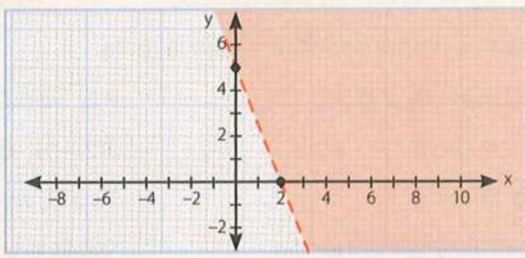
   c) $5x - 3y < 4$

   A(2, 1) B(1, −1) C(2, 2) D(0, 1)

   d) $-12x - 4y > 0$

   A(0, 0) B(0, −1) C(2, 2) D(−1, 3)

3. **Encuentra** la inecuación lineal en dos variables que describa la representación gráfica. **Observa** el ejemplo.



Encontramos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$A(2, 0)$ y $B(0, 5)$

$$\frac{y-5}{x-0} = \frac{5-0}{0-2}$$

$$\frac{y-5}{x} = \frac{5}{-2}$$

$$5x + 2y = 10$$

Tomamos un punto de la parte sombreada y reemplazamos en la ecuación.

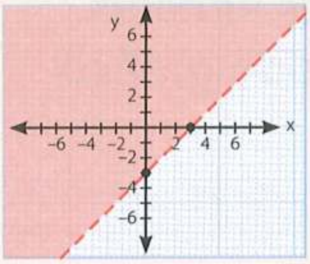
$P(3, 0)$ $5(3) + 2(0) > 10$; $15 > 10$, verdadero

Tomamos el signo > porque la frontera es una recta punteada.

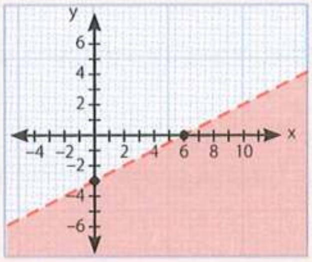
La inecuación lineal en dos variables es:

$$5x + 2y > 10$$

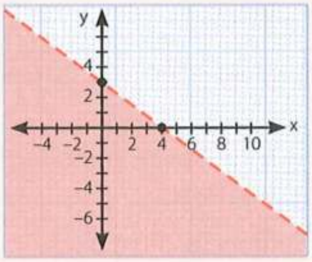
a)



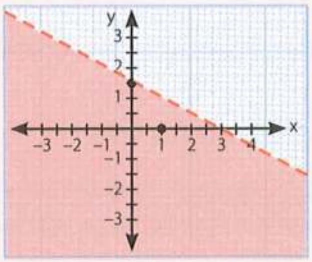
b)



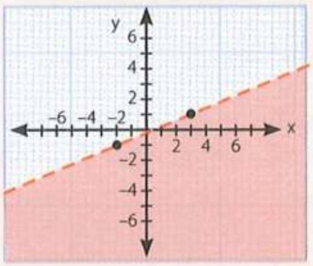
c)



d)



e)



Trabajo colaborativo

4. **Trabajen** en equipo y **resuelvan** gráficamente en su cuaderno.

a) $0{,}2x + y < 3{,}4y - 5$

b) $y \geq 0$

c) $\frac{1}{4}x - 2y \leq 12(y - 1)$

5. **Relaciónen** cada inecuación con su posible conjunto solución.

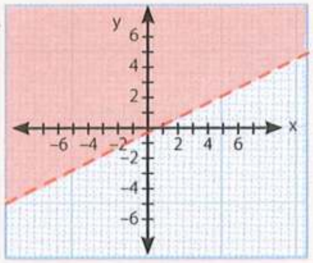
a) $3x - 3y < 1$

b) $x - y > 7$

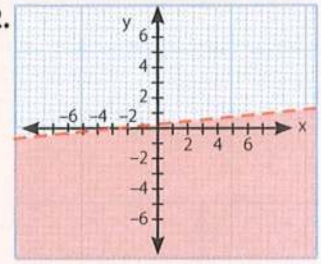
c) $4x - 9y < 2$

d) $x - 12y > 0$

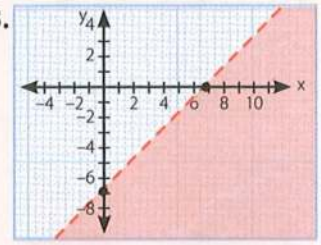
1.



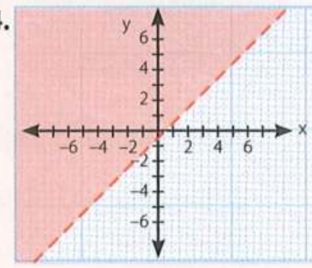
2.



3.



4.



6. **Problema-decisión. Analiza** y **decide** cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a) Una inecuación lineal con dos incógnitas siempre tiene solución.

b) La solución de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano.

c) En la inecuación $2x + y > 0$, los puntos de la recta frontera son parte de la solución de la inecuación.

Actividad indagatoria

7. **Indaga** al menos tres aplicaciones de las inecuaciones en la vida cotidiana.

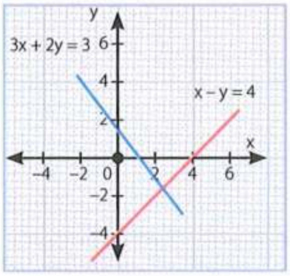
Tema 3

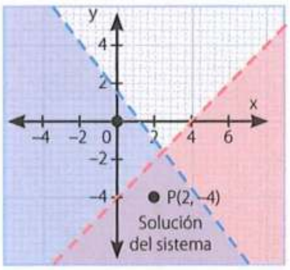
Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Método gráfico

Competencia socioemocional

La base para tener buenas relaciones interpersonales está en reconocer las emociones de los demás, así como conocer y manejar tus propias emociones.

Según tu experiencia, ¿qué importancia tienen para ti las relaciones interpersonales?





Saberes previos

Recuerda. La solución a una inecuación con dos incógnitas es la región que satisface la inecuación.

Para resolver el sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas se utiliza el proceso gráfico de la siguiente manera:

Representamos gráficamente cada inecuación. Cambiamos el signo de la desigualdad por igual y buscamos dos puntos de cada recta para graficarla.

$x - y = 4$	$3x + 2y = 3$
Si $x = 0, y = -4$ $A(0, -4)$	Si $x = 0, y = 3/2$ $C(0, 3/2)$
Si $y = 0, x = 4$ $B(4, 0)$	Si $y = 0, x = 1$ $D(1, 0)$

Sombreamos la solución de cada inecuación. La solución del sistema es la intersección de las regiones sombreadas.

Verificamos la solución, tomamos un punto de la parte donde coinciden los dos sombreados y reemplazamos en el sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} x - y > 4 \\ 3x + 2y < 3 \end{cases} \quad P(2, -4) \begin{cases} 2 - (-4) > 4 \\ 3(2) + 2(-4) < 3 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} 6 > 4 \\ -2 < 3 \end{cases}$$

Un **sistema** de **inecuaciones lineales** con dos incógnitas es un conjunto de dos o más de estas inecuaciones:

$ax + by + c > 0$; $ax + by + c < 0$; $ax + by + c \geq 0$; $ax + by + c \leq 0$.

El par ordenado (x, y) es solución del sistema si satisface simultáneamente a todas las inecuaciones. A la región solución, si existe, se le llama región factible. Si es vacía, el sistema es incompatible.

Resolvemos el siguiente sistema de inecuaciones lineales con dos incóginitas.

Sistema de inecuaciones lineales

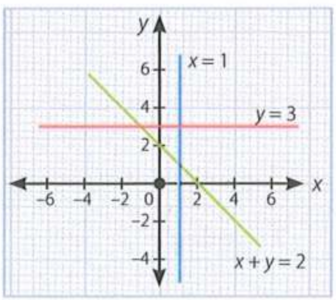
$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 3 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

Representamos gráficamente.

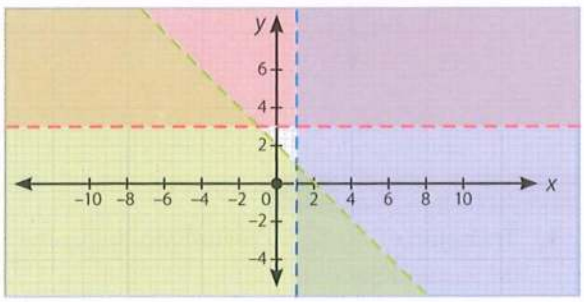
$x = 1$, recta paralela al eje y.

$y = 3$, recta paralela al eje x.

$x + y = 2$, (0, 2) y (2, 0)



Sombreamos la solución de cada inecuación y buscamos la intersección de las regiones sombreadas.



En esta representación gráfica no existe una región común para las tres inecuaciones. Por lo tanto, el sistema es incompatible.

M.4.1.41. Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.

Ejemplo

Un fabricante de *jeans* obtiene una ganancia de \$ 30 por cada *jean* de marca Blue y \$ 15 por cada *jean* de marca Victoria. Para la fabricación de sus pantalones, utiliza dos máquinas: A y B. Para la fabricación del pantalón de marca Blue, la máquina A demora 15 minutos y la máquina B, 9 minutos. Para la elaboración del pantalón de marca Victoria, la máquina A demora 5 minutos y la máquina B, 3 minutos. Si diariamente cuenta con la máquina A un máximo de 200 minutos y con la B, un máximo de 90 minutos, ¿cuántos pantalones de cada tipo debe producir para obtener la máxima utilidad?

Shutterstock, 444837757.

Identificamos las variables y organizamos en una tabla.

Solución

	Máquina A	Máquina B	Ganancia
Pantalones marca Blue *(x)*	15	9	\$ 30
Pantalones marca Victoria *(y)*	5	3	\$ 15
Tiempo disponible *(min)*	200	90	

Archivo Editorial

Como la producción de un artículo no puede ser negativa tenemos: $y \geq 0$, $x \geq 0$. Al referirse el problema a la máxima ganancia, significa menor o igual $\leq$. Entonces,

$15x + 5y \leq 200$; $9x + 3y \leq 90$

Por lo tanto, el sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} 15x+5y \leq 200 \\ 9x+3y \leq 90 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Graficando las rectas, obtenemos: *(Ilustración 1)*

Sombreamos la solución de cada inecuación; recuerda que la solución del sistema es la intersección de las regiones sombreadas (región factible). *(Ilustración 2)*

Verificamos la solución tomando un punto de la intersección de las regiones sombreadas. P (0, 10)

$$\begin{matrix} 15(0)+5(10) \leq 200 \\ 9(0)+3(10) \leq 90 \\ 10 \geq 0 \end{matrix} \; ; \; \begin{matrix} 50 \leq 200 \\ 30 \leq 90 \\ 10 \geq 0 \end{matrix}$$

La solución satisface el sistema de inecuaciones.

Vértice	f(x, y) = 30x + 15y
(0, 30)	30(0) + 15(30) = 450
(0, 0)	30(0) + 15(0) = 0
(10, 0)	30(10) + 15(0) = 30

Archivo Editorial

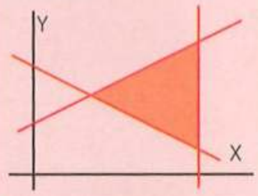
La función que representa la ganancia máxima es $f(x, y) = 30x + 15y$. Para determinar la ganancia máxima, reemplazo los vértices en esta función.

La ganancia máxima es \$ 450 y se produce cuando se fabrican 30 pantalones marca Victoria.

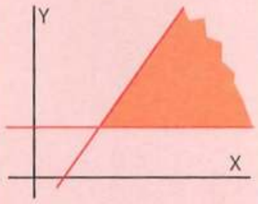
¿Sabías que?

La región factible puede ser:

Acotada



No acotada



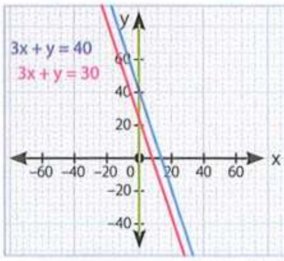


Ilustración 1

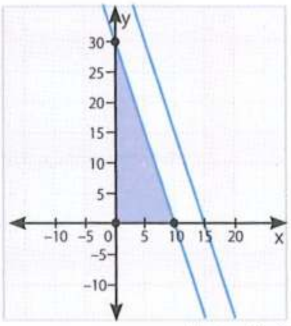


Ilustración 2

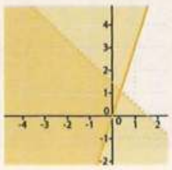
Taller

Evaluación formativa

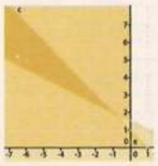
I.M.4.2.4.

1. **Responde** con V o F si los siguientes sistemas de inecuaciones lineales corresponden a las soluciones graficadas.

a) $\begin{cases} y \geq 3x \\ 2x + y < 3 - y \end{cases}$

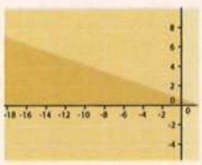


b) $\begin{cases} x + y < 1 \\ 2y < 3 - x \\ y \geq 0 \end{cases}$



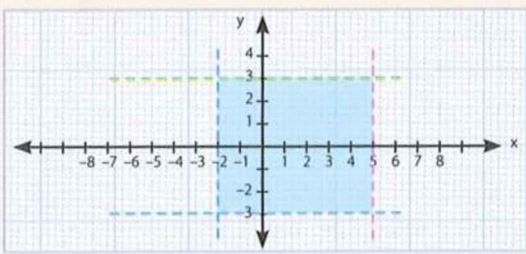
c) $\begin{cases} y \geq 4x \\ 2y \leq 5x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y < 2 \end{cases}$

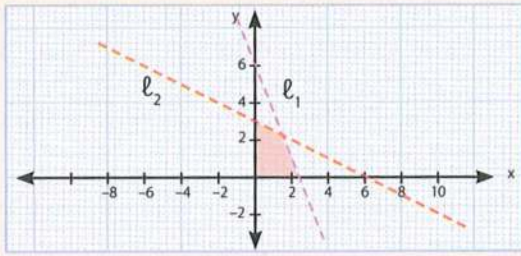


2. **Resuelve** las siguientes situaciones.

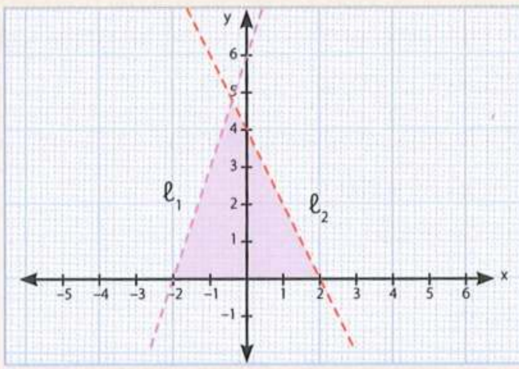
a) **Encuentra** el sistema de desigualdades que describe la región sombreada.



b) La región común tiene como fronteras las rectas continuas ℓ_1, ℓ_2, el eje x el eje y. ¿Cuál es el sistema de inecuaciones lineales de esta representación?

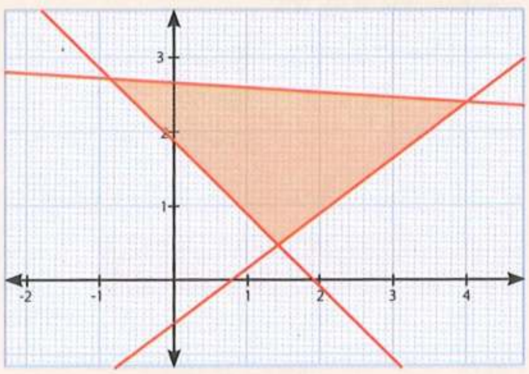


c) La región común tiene como fronteras las rectas punteadas ℓ_1, ℓ_2 y la recta continua determinada por el eje x. ¿Cuál es el sistema de inecuaciones lineales que representa la parte sombreada?

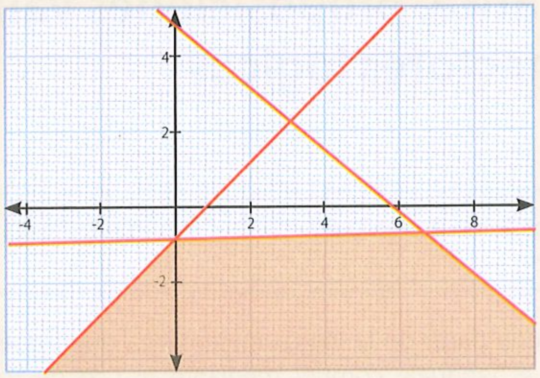


3. **Contesta**: ¿las siguientes regiones son acotadas o no acotadas?

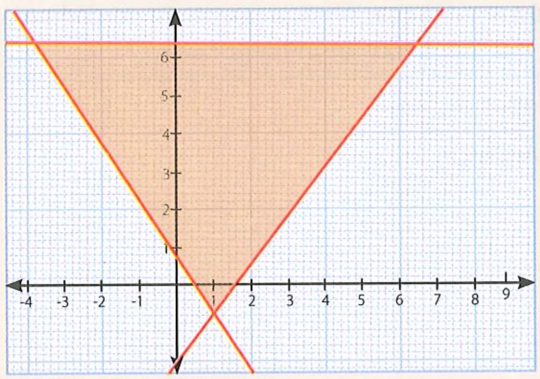
a)



b)



c)



4. **Representa** gráficamente en tu cuaderno la región solución del sistema.

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2y \geq -4 \\ y \leq 3 \\ -y + x \geq -2 \end{cases}$

5. Rosa ha decidido criar pollos y patos en el patio de su casa. Ella tiene \$ 30 y desea comprar al menos 16 animalitos pequeños. Cada pollito cuesta \$ 1 y cada patito \$ 1,50.

a) **Escribe** un sistema de desigualdades que represente al problema.

b) **Identifica** las posibles combinaciones de compras usando una gráfica.

Trabajo colaborativo

5. **Trabajen** en equipo y **resuelvan** los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables en sus cuadernos.

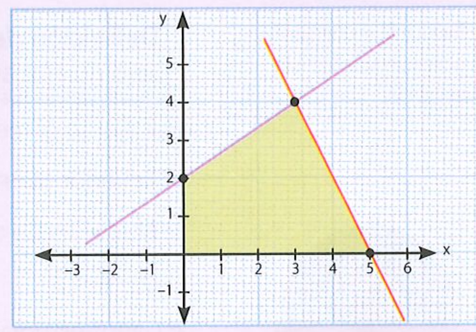
a) $\begin{cases} x - 3y < 7 \\ y > 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2x - 3 \\ 2y < 5x - 1 \end{cases}$

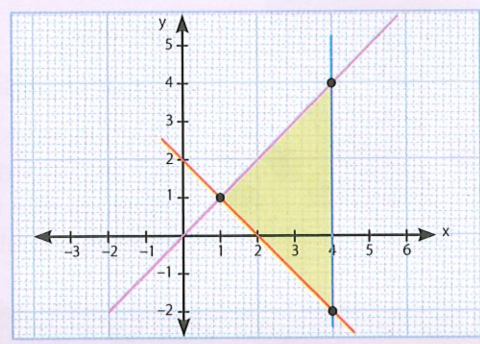
c) $\begin{cases} 3x + 2y \leq -3 \\ y \geq 4x - 2 \\ 6x + 2y \geq 3 \end{cases}$

6. **Encuentren** el sistema de inecuaciones lineales que forma la región factible.

a)



b)



7. **Problema-decisión.** **Resuelvan** el siguiente problema:

Una panadería produce dos tipos de guaguas de pan: pequeña y grande. Para elaborar la guagua pequeña, se necesita una hora; para la guagua grande, tres horas. Cada guagua también debe ser decorada. Para decorar la guagua pequeña, se necesita una hora; para la guagua grande, también una hora. La panadería dispone para decorar de 2 horas y 5 horas para la elaboración. La ganancia por unidad es de \$ 2 para la guagua de pan pequeña y \$ 3 para la grande. ¿Cuál sería tu decisión en la planificación de producción para obtener un máximo beneficio?

Actividad indagatoria

8. **Indaga** en qué consisten los problemas de optimización.

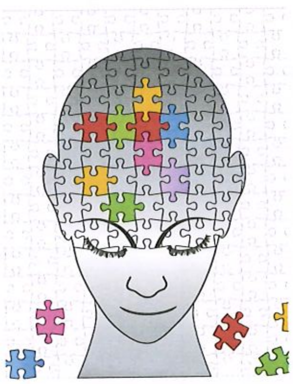
Tema 4

Lógica matemática, proposiciones valor de verdad, conectores lógicos

Competencia comunicacional

El razonamiento lógico se emplea en matemática para demostrar teoremas. Sin embargo, se usa de forma constante para realizar cualquier actividad en la vida.

Reflexiona y **comenta** tu opinión sobre esta afirmación.



Shutterstock, (2020). 78033109

Saberes previos

Analiza si la siguiente proposición es verdadera o falsa: "El número 2 es el único número primo par".

La lógica proposicional es una parte de la lógica matemática que sigue reglas y técnicas para formalizar el lenguaje común, mediante el uso de variables proposicionales y conectivos lógicos.

Definición de proposición: es una oración que puede ser verdadera o falsa pero no ambas a la vez, se representa por letras minúsculas.

Por ejemplo, tenemos las proposiciones:

p: Ecuador se encuentra en América.

q: Nueve es un número par.

r: $2x - 4 < 3$

s: Carlos estudia y trabaja.

t: ¡Auxilio!

w: ¿Cómo estás?

Los enunciados p, r y s son proposiciones porque pueden tomar un valor de verdad, sea verdadero o falso. Por su parte, las proposiciones t y w no son proposiciones, ya que no pueden tomar un valor de verdad , no se puede decir si son verdaderas o falsas.

Tipos de proposiciones

Tipo	Definición	Ejemplos
Simples	Tienen un sujeto, un verbo y un complemento. No hay términos de enlaces entre oraciones.	p: Pitágoras fue un matemático. r: Claudia es mi hermana. t: 19 es un número primo.
Compuestas	Son proposiciones que tienen términos de enlace entre oraciones o la palabra "no" (negación). Los conectores de enlace entre oraciónes son "y", "o", "si... entonces", "si solo si" entre otros.	−3 no es un número mayor que 1. Mario come galletas y bebe leche. No todos los números primos son impares. Si un número se multiplica por 2, entonces, la respuesta es un número par.

Archivo Editorial

Conectores lógicos

Son símbolos que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta.

M.4.2.1. Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para relacionarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicionante y bicondicionante; y formar proposiciones compuestas.

Principales conectores lógicos

Disyunción y conjunción

Disyunción. Utiliza el símbolo "v" y la palabra "**o**". Dadas las proposiciones p, q, la disyunción $p \vee q$ es aquella proposición que es verdadera cuando **alguna** de las proposiciones es **verdadera**. Si las dos proposiciones son falsas, entonces, el valor de verdad también es falso.

Ejemplo

Google es un buscador o una red social.

El conectivo lógico es la palabra "o".

Tenemos las proposiciones:

p: Google es un buscador.

q: Es una red social.

La representación de la disyunción es: $p \vee q$.

En la tabla tenemos que la proposición es verdadera, ya que Google sí es un buscador.

Tabla para la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción. Utiliza el símbolo "∧" y significa "**y**". Dada las proposiciones p, q, la conjunción $p \wedge q$ es aquella proposición que solo es verdadera cuando **ambas proposiciones son verdaderas**. En cualquier otro caso, es falsa.

Ejemplos

a) Sea el siguiente enunciado: "Tengo dinero y me voy de viaje".

p: Tengo dinero; q: Me voy de viaje.

La representación lógica del enunciado es: $p \wedge q$

Según la tabla, es verdadera si tengo dinero y me voy de viaje, en el resto de alternativas es falso.

Tabla para la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

b) Un pentágono tiene 5 lados o 5 es impar.

p: Un pentágono tiene 5 lados.

q: 5 es impar.

V(p): Verdadero

V(q): Verdadero

V ($p \vee q$): Verdadero

Porque basta con tener una proposición verdadera.

c) $2 + 1 = 3$ y 4 es primo.

p: $2 + 1 = 3$

q: 4 es primo.

V (p): Verdadero.

V (q): Falso.

V ($p \wedge q$): Falso.

Porque ambas proposiciones no son verdaderas.

Shutterstock, (2020). 701350606

Los buscadores de internet funcionan mediante lógica matemática.

DFA

Si hay una discapacidad o dificultades visuales, es necesario ayudarnos unos a otros, ya sea con una explicación de los sucesos visuales o con un resumen de lo que sucede alrededor.

Competencia digital

Ingresa al siguiente video para conocer más acerca de los conectores lógicos:

lynk.ec/10m08

Interculturalidad

Nuestros ancestros indígenas utilizaban varias herramientas para realizar cálculos matemáticos. Una de ellas es la *taptana*, una tabla similar a un ábaco.

Indaga en internet y **resume** cómo se utiliza la *taptana*.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.4.1.

1. **Completa**, en tu cuaderno, la tabla con los valores de verdad correspondientes.

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge q$	$q \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee r$	$p \wedge r$
V	V	V						
V	V	F						
V	F	V						
V	F	F						
F	V	V						
F	V	F						
F	F	V						
F	F	F						

En tu cuaderno

2. **Indica** cuáles de las siguientes proposiciones son simples y cuáles son compuestas.
   a) Está lloviendo.
   b) Está lloviendo y hay sol.
   c) Somos responsables del agujero en la capa de ozono y del derretimiento de algunos glaciales.
   d) Hoy es lunes y voy a clases.
   e) El cambio climático es resultado de nuestras acciones.
   f) Estoy estudiando o me estoy divirtiendo.

3. **Expresa** simbólicamente las siguientes proposiciones compuestas.
   a) Juanita estudia y trabaja.
   b) Toma un taxi o coge un bus para llegar a la oficina.
   c) 10 es un número par y es múltiplo de 5.
   d) Lava los platos o cocina la merienda.
   e) A la vez Cristina es cantante y violinista.
   f) Manuela es arquitecta o vive en Quito.
   g) Un cuadrado es un cuadrilátero y un paralelogramo.
   h) 3 es un número primo e impar.
   i) Un triángulo equilátero es a la vez isósceles.
   j) Quito es la capital del Ecuador o de Pichincha.
   k) 36 es múltiplo de 4 o de 9.
   l) 6 es divisor de 12 o de 60.

4. **Determina** si las siguientes expresiones son o no proposiciones. En caso de no serlo, **escribe** por qué.
   a) ¿Cuántos años tienes?
   b) Héctor vive cerca de Cuenca.
   c) Ordena la casa y limpia tu cuarto.
   d) Camila y Joaquín trabajan en un banco.
   e) Si ahorro dinero, entonces en cuatro años me compraré un departamento.
   f) Para llegar a la reunión puedo tomar la ruta A o la ruta B.

5. Asumiendo que p y q son proposiciones verdaderas, **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

   p: estoy estudiando Matemática.

   q: me estoy divirtiendo.
   a) Estoy estudiando Matemática o me estoy divirtiendo.
   b) Estoy estudiando Matemática y me estoy divirtiendo.
   c) Estoy estudiando Matemática y no me estoy divirtiendo.

6. **Escribe** (V) si los siguientes enunciados son verdaderos o (F) si son falsos. **Justifica** tu respuesta.
   a) La conjunción es verdadera cuando los dos valores de las proposiciones son verdaderos.
   b) Una proposición simple tiene conectores lógicos.
   c) La disyunción es verdadera cuando un solo valor de verdad de las proposiciones esverdadero.
   d) "Quito es la capital de Ecuador y es cantón de Pichincha" es una proposición simple.

7. **Completa** en tu cuaderno la tabla de verdad de las siguientes expresiones:

a) $(p \vee q) \wedge p$

p	q	$(p \vee q)$	p	$(p \vee q) \wedge p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

En tu cuaderno

b) $[p \vee (q \wedge r)] \vee r$

p	q	r	$(q \wedge r)$	$[p \vee (q \wedge r)]$	$[p \vee (q \wedge r)] \vee r$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

En tu cuaderno

c) $[(r \wedge p) \wedge q] \wedge p$

p	q	r	$[(r \wedge p)$	$[(r \wedge p) \wedge q]$	$[(r \wedge p) \wedge q] \wedge p$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

En tu cuaderno

8) **Determina** el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Primero, **determina** el valor de verdad de las proposiciones simples y, luego, el valor de verdad de la proposición compuesta. **Guíate** con el ejemplo.

- Madrid está en España o Londres está en Francia.

$p \vee q$

$V \boxed{V} F$

a) Un cuadrado es un rombo y un cuadrilátero.

i) VVV

ii) VFV

iii) VVF

iv) FFF

b) $\sqrt[5]{32} = 2$

i) VVV

ii) VFF

iii) VVF

iv) FFF

c) $(-3)^3 < |-25| \text{ o } \sqrt{-25} = -5$

i) VVV

ii) VFF

iii) VVF

iv) FFF

Trabajo colaborativo

9. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

Escriban en lenguaje común, utilizando los conectores lógicos. **Interpreten** y **expresen** verbalmente.

a) Sean p: Carla es deportista y q: Carla es bailarina.

i) $p \wedge q$ **ii)** $p \vee q$ **iii)** $(p \wedge q) \vee q$

b) Sean p: Miguel viaja a México y q: Miguel viaja a Colombia.

i) $p \wedge q$ **ii)** $p \vee q$ **iii)** $(p \vee q) \wedge q$

c) Sean p: Estudio matemática, q: Estudio inglés, r: Estudio artes escénicas

i) $p \wedge r$ **ii)** $q \vee r$ **iii)** $(p \vee q) \wedge r$

10. **Realicen** las siguientes operaciones, empleando tablas de valores de verdad.

a) $[(r \wedge p) \vee r] \wedge q$

b) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

c) $r \wedge (q \vee p)$

d) $p \vee (p \wedge r \wedge q)$

Actividad indagatoria

11. **Visita** la biblioteca e **indaga** en qué consiste la disyunción inclusiva y exclusiva; **escribe** dos ejemplos.

12. **Indaga** acerca de otros conectores lógicos y **escribe** dos ejemplos de proposiciones compuestas que utilicen estos conectores.

Tema 5

Condicional, bicondicional, negación

Competencia comunicacional

En Ecuador, la velocidad del Internet supera el promedio regional. Existen más de quince millones de conexiones moviles con amplia cobertura y conectividad.

Shutterstock, 514764796.

La velocidad del Internet depende de diversos factores.

Tabla para el condicional

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 1

Tabla para el bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 2

Desequilibrio cognitivo

¿Cómo obtendrías un valor verdadero en la proposición *p*: Si estudio, entonces paso el examen?

En matemática, las proposiciones condicionales son muy utilizadas en los teoremas. El antecedente se llama hipótesis y el consecuente, tesis.

Condicional ($\to$). Una implicación o proposición condicional está formada por dos proposiciones de esta manera $p \to q$. Se lee "Si p, entonces q", y es falsa cuando la primera proposición es verdadera y la segunda es falsa, en el resto de casos es verdadera.

Ejemplo

Analizamos el siguiente enunciado: "Si se sigue trabajando en la conectividad, entonces la cobertura de Internet será mayor". Las proposiciones son:

p: Se sigue trabajando en la conectividad.

q: La cobertura de Internet será mayor.

De tal manera que el enunciado se puede expresar como: $p \to q$ *(Tabla 1)*.

En todos los casos resulta la proposición verdadera, excepto si se trabaja en la conectividad y la cobertura de Internet no mejora.

Bicondicional ($\leftrightarrow$). Es una doble implicación o proposición bicondicional. Está formada por dos proposiciones de esta manera $p \leftrightarrow q$. Se lee "*p* si y solo si *q*", y es verdadera cuando *p* es verdadera si y solo si *q* también es verdadera. O bien *p* es falsa si y solo si *q* también lo es.

Ejemplo

En el siguiente enunciado "Una persona puede comprar un carro, si y solo si, es mayor de edad", las proposiciones son:

p: Una persona puede comprar un carro.

q: Es mayor de edad.

Tenemos $p \leftrightarrow q$, y su tabla de verdad esta en la tabla 2.

Cuando *p*: *V*, significa que puede comprar el carro, y *q*: *V* significa que es mayor de edad. Entonces, si *p*: *V* y *q*: *V*, la respuesta es verdadera.

Si *p*: *V* y *q*: *F*, significa que la persona no puede comprar el carro porque no es mayor de edad. Si *p*: *F* y *q*: *V*, significa que la persona no puede comprar el carro aunque sea mayor de edad.

Si *p*: *F* y *q*: *F*, se interpreta que no puede comprar el carro y tampoco es mayor de edad, por lo tanto, el enunciado es cierto.

M.4.2.1. Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para relacionarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicionante y bicondicionante; y formar proposiciones compuestas.
M.4.2.2. Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad.

Negación (~). Su función es negar la proposición. Sea *p* una proposición, la negación de *p* es la proposición ~ *p*, que se lee "no *p*", lo que cambia el valor de verdad de la proposición.

Ejemplo

Sea el siguiente enunciado: "Carlos nació en 1993".

La proposición es:

p: Carlos nació en 1993, ~ *p*: Carlos no nació en 1993.

Su tabla de verdad es:

Solución

Tabla de la negación	
p	$\sim p$
V	F
F	V

El valor de *p*: V significa que Carlos nació en 1993, y ~*p*: F significa que no nació en ese año.

Tautología. Es una proposición compuesta que es cierta para todos los valores de verdad de sus proposiciones, es decir, su valor de verdad depende de las relaciones establecidas entre las proposiciones.

Ejemplo

Construir la tabla de verdad de: $(p \wedge q) \wedge p \rightarrow (p \vee q)$

Solución

- Identificamos el conectivo principal (→) para establecer el resultado final.
- Determinamos la cantidad de proposiciones, en este caso (*p*, *q*). La tabla de verdad tendrá $2^n = 2^2 = 4$ filas.
- Resolvemos aplicando el siguiente orden:

		1	3	2	5	4
p	q	$(p \wedge q)$	$\wedge$	p	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

1. Conjunción
2. Valores de p
3. Conjunción
4. Disyunción
5. Condicional

Como la columna principal tiene solo valores verdaderos, es una tautología.

Contradicción. Es una proposición compuesta si en todos los casos posibles de su columna principal su valor de verdad es falso.

Interdisciplinariedad

Matemática y programación

El sistema binario se ha utilizado desde la Antigüedad hasta nuestros días. Hoy se utilizan circuitos lógicos aplicando lógica matemática. Los valores de verdad V y F pueden ser reemplazados por los valores binarios 1 y 0, respectivamente.

Indaga y **responde:** ¿por qué se utiliza el sistema binario en los computadores?

Recuerda que...

Una tabla de verdad que tiene valores verdaderos y falsos en su columna principal se denomina **contingencia**.

Competencia socioemocional

Si has tenido experiencias positivas en tu actuar académico o personal, procura transmitirlas a tus compañeros sin menospreciar sus capacidades.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.4.1.

1. **Expresa** simbólicamente las siguientes proposiciones.
   - **a)** No es el caso que estudies licenciatura y arquitectura.
   - **b)** Samsung es una marca de celulares o es una marca de televisores.
   - **c)** Si Óscar realiza una recarga electrónica, entonces, podrá realizar llamadas.
   - **d)** Si no tienes el pasaporte vigente, entonces no podrás viajar.
   - **e)** Si Mateo no aprueba o no resuelve este problema, entonces, es falso que haya estudiado o que domine la deducción lógica.
   - **f)** $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x + 1 = y + 1$ si y solo si, $x = y$.
   - **g)** Los precios son bajos si y solo si los costos son bajos.
   - **h)** Si Andrés estudia lógica matemática, entonces podrá efectuar demostraciones matemáticas.
   - **i)** Si tengo 18 años y cuento con cédula de identidad entonces podré votar en las próximas elecciones.

2. **Niega** verbalmente cada afirmación.
   - **a)** No es cierto que –5 es mayor que –3.
   - **b)** Postulé a una maestría en Ciencias.
   - **c)** No es cierto que 4 sea un número primo.
   - **d)** Yahoo es un buscador de información.
   - **e)** La mandarina es una fruta de la Costa.

3. **Encuentra** los valores de verdad correspondientes para que se cumpla el valor indicado.
   - **a)** $P \wedge q$

	V	

     En tu cuaderno
   - **b)** $\sim p \rightarrow \sim q$

		F		

     En tu cuaderno
   - **c)** $p \rightarrow q$

	V	

     En tu cuaderno
   - **d)** $p \leftrightarrow q$

	V	

     En tu cuaderno

4. **Realiza** en tu cuaderno la tabla de verdad de las siguientes fórmulas lógicas. **Escribe** si es tautología, contradicción o contingencia.
   - **a)** $[p \wedge (p \rightarrow q)] \wedge \sim p$

p	q	[p ∧	(p → q)]	∧	~p
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

     En tu cuaderno

     Es una
   - **b)** $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)] \wedge (q \rightarrow \sim r)$

p	q	r	[(p↔q)	∨	(p↔r)]	∧	q→~r
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

     En tu cuaderno

     Es una
   - **c)** $(p \wedge q) \leftrightarrow [\sim (p \wedge q)]$

p	q	(p ∧ q)	↔	~(p∧q)]
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

     En tu cuaderno

     Es una
   - **d)** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	(p → q) ↔ (¬p ∨ q)
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

     En tu cuaderno

     Es una

5. **Halla** los valores de verdad de las siguientes fórmulas lógicas.

a) $[(p \leftrightarrow q) \wedge r] \rightarrow (r \rightarrow q)$ si los valores de verdad de las proposiciones *p, q* y *r* son V V F, respectivamente.

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge r] \rightarrow (r \rightarrow q)$$

La fórmula lógica es verdadera.

b) $[(p \wedge q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [\sim p \rightarrow (\sim r \vee s)]$ si los valores de verdad de las proposiciones *p, q, r* y *s* son F V V F, respectivamente.

c) $[(p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim s] \leftrightarrow [r \wedge \sim s]$ si los valores de verdad de las proposiciones *p, q, r* y *s* son V F F V, respectivamente.

d) $\sim(q \vee r) \rightarrow (p \wedge \sim q)$ si los valores de *p, q* y *r* son F V F, respectivamente.

6. **Evalúa** estas proposiciones.

a) Si te preparas para triunfar, entonces, triunfarás. Sin embargo, no te preparas para triunfar.

b) Si mi archivo no abre, entonces volveré a mi casa y mandaré la información por correo.

c) Volveré a mi casa y mandaré la información por correo porque mi archivo no abre.

7. **Determina** el valor de verdad de las proposiciones compuestas, dado el valor de verdad de cada proposición.

a)	$V(p)=V; V(q)=V$	$V(\sim p \wedge q)=$
b)	$V(p)=V; V(q)=F$	$V(p \vee \sim q)=$
c)	$V(p)=F; V(q)=F$	$V[\sim(p \rightarrow q)]=$
d)	$V(p)=F; V(q)=V$	$V(\sim p \underline{\vee} \sim q)=$
e)	$V(p)=V; V(q)=V$	$V[(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p]=$

8. **Selecciona** la respuesta correcta.

a) Si $V[\sim(p \rightarrow q)]=F$, **determina** los valores de verdad de p y q.

i) VV

ii) VF

iii) FV

iv) FF

b) Si $[\sim p \wedge (p \vee q)]$ es verdadera, determinar los valores de verdad de *p* y *q*.

i) VV

ii) VF

iii) FV

iv) FF

c) Si $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ es falsa, determina los valores de verdad de *p* y *q*.

i) VV

ii) VF

iii) FV

iv) FF

d) Si $p \vee (q \rightarrow r)$ es falsa, determinar los valores de verdad de *p, q* y *r*.

i) VVV

ii) VFV

iii) FVV

iv) FFF

e) Si $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ es falsa, determinar los valores de verdad de *p, q* y *r*.

i) VVV

ii) VFF

iii) VVF

iv) FFF

Trabajo colaborativo

9. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

Evalúen las siguientes fórmulas lógicas mediante tablas de valores de verdad.

a) $[(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge \sim p$

b) $p \wedge [(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \sim q)]$

c) $[(\sim p \rightarrow q) \vee p] \wedge (\sim q \rightarrow p)$

d) $p \wedge \{q \wedge [(p \rightarrow q) \vee (r \wedge s)] \leftrightarrow \sim r\}$

Actividad indagatoria

10. **Indaga** y **resuelve**.

Un letrero aparece en la entrada a un concierto. "Para ingresar, las personas deben presentar su boleto y ser mayores de edad, o bien estar acompañadas de una persona adulta". **Representa** el enunciado mediante una fórmula lógica y **evalúa** la tabla para identificar los casos en los que una persona no podrá entrar al concierto.

Tema 6 Leyes del álgebra proposicional

Simbología matemática

$\cong$: lógicamente equivalente a

$\Leftrightarrow$: equivale

Recuerda que...

Para simplificar una fórmula lógica podemos seguir estos pasos:

1. Analizar e identificar conectores condicional y bicondicional, entonces, aplicar las respectivas leyes.
2. Asociar términos para poder aplicar las leyes del álgebra proposicional.

Competencia digital

Visita el siguiente enlace para conocer más del tema.

lynk.ec/10m09

Interculturalidad

La etnomatemática es el área de la educación que busca reflexionar sobre el conocimiento matemático que se genera a partir de la interacción en un grupo cultural en particular.

Indaga y responde con tus palabras: ¿qué importancia tiene la etnomatemática?

Saberes previos

¿Cuándo son verdaderas la disyunción y la conjunción?

Las Leyes del álgebra de proposiciones son equivalencias lógicas que nos permiten reducir fórmulas lógicas complejas y expresarlas en forma más sencilla. Las leyes del álgebra proposicional son:

Leyes del álgebra proposicional

Ley	Símbolos
De equivalencia	$p \Leftrightarrow p$
De Idempotencia	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad p \wedge p \Leftrightarrow p$
Asociativa	$p \vee q \vee r \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Conmutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De identidad	$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $\quad p \wedge V \Leftrightarrow p$ $p \vee F \Leftrightarrow p$ $\quad p \vee V \Leftrightarrow V$
De complemento	$p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$ $\quad p \vee \sim p \Leftrightarrow V$ $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ $\quad \sim F \Leftrightarrow V$ $\sim V \Leftrightarrow F$
De Morgan	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
De absorción	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
Condicional simple	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim q$
Bicondicional	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Archivo Editorial

Ejemplos

a) Usando el álgebra de proposiciones, simplifica la proposición.

$$\sim \{(\sim p) \vee (\sim q) \vee \sim q\}$$

Solución

$\cong \sim \{\sim p \vee (\sim q \vee \sim q)\}$ Asociativa

$\cong \sim [\sim p \vee \sim q]$ De idempotencia

$\cong \sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q)$ De Morgan

$\cong p \wedge q$ De complemento

M.4.2.3. Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas.

b) Simplifica a una fórmula lógica más sencilla, utilizando las leyes de la lógica proposicional.

$(\sim p\wedge q)\wedge(\sim q\wedge\sim p)$

Solución

$\cong (\sim p\wedge\sim p)\wedge(q\wedge\sim q)$ Asociativa

$\cong (\sim p\wedge\sim p)\wedge F$ De complemento

$\cong \sim p\wedge F$ De idempotencia

$\cong F$ De identidad

c) Simplifica la expresión aplicando las leyes de proposiciones.

$[\sim(p\to q)\to\sim(q\to p)]\wedge(p\vee q)$

Solución

$\cong[\sim(\sim p\vee q)\to\sim(\sim q\vee p)]\wedge(p\vee q)$ Condicional

$\cong[(p\wedge\sim q)\to(q\wedge\sim p)]\wedge(p\vee q)$ De Morgan

$\cong[\sim(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)]\wedge(p\vee q)$ Condicional

$\cong[(\sim p\vee q)\vee(q\wedge\sim p)]\wedge(p\vee q)$ De Morgan

$\cong[(q\wedge\sim p)\vee(\sim p\vee q)]\wedge(p\vee q)$ Conmutativa

$\cong\{[(q\wedge\sim p)\vee\sim p]\vee q\}\wedge(p\vee q)$ Asociativa

$\cong(\sim p\vee q)\wedge(p\vee q)$ De absorción

$\cong(q\vee\sim p)\wedge(q\vee p)$ Conmutativa

$\cong q\vee(\sim p\wedge p)$ Distributiva

$\cong q\vee F$ De complemento

$\cong q$ De identidad

d) Emplea las leyes del álgebra proposicional y simplifica.

$[(\sim p\to q)\leftrightarrow\sim q]$

Solución

$\cong[(\sim p\vee q)\leftrightarrow\sim q]$ Condicional

$\cong[(\sim p\vee q)\to\sim q]\wedge[\sim q\to(\sim p\vee q)]$ Bicondicional

$\cong[\sim(\sim p\vee q)\vee\sim q]\wedge[\sim(\sim q)\vee(\sim p\vee q)]$ Condicional

$\cong[(p\wedge\sim q)\vee\sim q]\wedge[q\vee(q\vee\sim p)]$ De Morgan

$\cong\sim q\wedge[(q\vee q)\vee\sim p]$ De absorción y asociativa

$\cong\sim q\wedge[q\vee\sim p]$ De idempotencia

$\cong(\sim q\wedge q)\vee(\sim q\wedge\sim p)$ Distributiva

$\cong F\vee(\sim q\wedge\sim p)$ De complemento

$\cong V\wedge V\cong V$ Distributiva y de identidad

Interdisciplinariedad

Matemática y lógica proposicional

Augustus De Morgan y George Boole a mediados del siglo XIX, presentaron un novedoso sistema matemático para modelar operaciones lógicas. Obtuvieron una herramienta apropiada para la investigación de los fundamentos de la matemática.

George Boole

Augustus De Morgan

Wikimedia Commons, www.wikipedia.org

Indaga sobre Augustus De Morgan y George Boole, luego **confecciona** una ficha bibliográfica a cada uno.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.4.1.

1. **Determina** si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) El condicional es igual a la negación de la primera proposición o la segunda proposición.

   b) La ley de identidad es extraer la proposición que se repite.

   c) El valor de verdad falso y una proposición da como resultado falso.

   d) La negación de una negación de una proposición da como resultado la misma proposición negada.

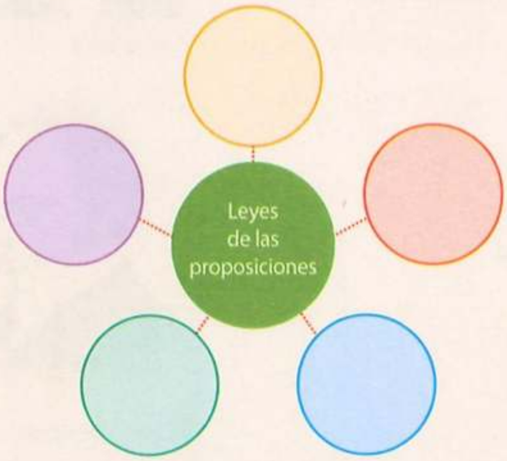
   e) "Si me pagan, entonces iremos a la playa".

   Se sabe que le pagaron, pero no fueron a la playa.

   f) "Si hoy es sábado, entonces mañana es domingo".

   g) "−1 es un número entero y menor que cero, entonces todo número entero es menor que cero".

2. **Completa**, en tu cuaderno, el organizador gráfico con las principales leyes de proposiciones.



3. Dadas las proposiciones simples:

   p: Jugué fútbol q: Anoté varios goles

   Escribe en tu cuaderno, el enunciado de las siguientes proposiciones compuestas.

   a) $\sim p \wedge \sim q$

   b) $\sim (p \wedge q)$

   c) $p \wedge \sim q$

   d) $\sim p \wedge q$

   e) $p \rightarrow q$

   f) $\sim p \rightarrow \sim q$

   g) $q \leftrightarrow p$

4. **Niega** verbalmente las siguientes proposiciones:

   a) No es cierto que rojo es un color primario.

   b) Fernando es diseñador y pintor.

   c) Pitágoras fue un reconocido filósofo.

   d) Mi estatura es 1,50 o 1,60.

5. **Selecciona** la proposición equivalente a la siguiente: "no es cierto que, si usted ve un gato negro, entonces, tendrá mala suerte".

   a) Usted no tiene mala suerte si ve un gato negro.

   b) Usted ve un gato negro y tiene mala suerte.

   c) Ve un gato negro si tiene mala suerte.

   d) Ve un gato negro y no tiene mala suerte.

6. **Determina** la proposición equivalente a esta:

   "Si amo las matemáticas, pasaré este curso".

   a) Si no amo las matemáticas, no pasaré este curso.

   b) Pasaré este curso o no amo las matemáticas.

   c) Pasaré este curso y amo las matemáticas.

   d) No amo las matemáticas.

   e) No pasaré este curso, luego, no amo las matemáticas.

7. Sean las proposiciones p: Hace frío q: Estamos en invierno, **relaciona** cada una con su simbolización.

a) Hace frío y no estamos en invierno.	1. $\sim p$
b) Si no hace frío, entonces, estamos en invierno.	2. $p \vee q$
c) Estamos en invierno si y solo si no hace frío.	3. $p \wedge q$
d) Hace frío y estamos en invierno.	4. $p \wedge \sim q$
e) Hace frío o estamos en invierno.	5. $\sim (\sim p)$
f) No hace frío.	6. $q \leftrightarrow \sim p$
g) No es cierto que no hace frío.	7. $\sim p \rightarrow q$

8. **Simplifica** las siguientes fórmulas lógicas aplicando las leyes proposicionales.

a) $\sim[(p\rightarrow q)\wedge\sim(p\vee\sim q)]$

b) $[(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)]\wedge\sim p$

c) $(p\rightarrow\sim q)\vee(\sim q\vee p)$

d) $\sim[\sim(p\wedge q)\wedge\sim q]\leftrightarrow p$

e) $[(p\rightarrow q)\wedge p]\vee(\sim q\rightarrow\sim p)$

f) $[(p\vee\sim q)\wedge q]\rightarrow p$

g) $\sim[\sim(p\wedge q)\rightarrow\sim q]\vee q$

h) $\sim[(\sim p\rightarrow q)\leftrightarrow\sim p]$

9. **Identifica** la ley en cada paso.

a) $\neg(\neg q)=q$

b) $r\equiv r$

c) $(r\wedge q)\vee(z\wedge q)\equiv q\wedge(r\vee z)$

d) $p\wedge(q\vee\neg q)\equiv p\wedge V$

e) $z\vee(p\rightarrow q)\equiv z\vee(\neg p\vee q)$

f) $z\vee(p\rightarrow q)\equiv z\vee\neg p\vee q$

g) $z\vee(p\rightarrow q)\equiv\neg p\vee q\vee z$

h) $p\vee(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge r$

10. **Calcula** o **simplifica** las siguientes expresiones lógicas utilizando las leyes del cálculo proposicional.

a) $\neg\neg p\equiv$

b) $\neg(p\wedge\neg q)\equiv$

c) $\neg(\neg p\vee q)\equiv$

d) $\neg(\neg p\wedge\neg q)\equiv$

e) $[p\wedge(q\wedge F)]\vee(r\vee V)\equiv$

f) $p\wedge[(q\wedge F)\vee(r\vee V)]\equiv$

g) $p\wedge(p\rightarrow F)\equiv$

h) $p\wedge(p\rightarrow V)\equiv$

i) $\neg(p\wedge q)\vee(p\rightarrow q)\equiv$

j) $\neg(p\vee q)\wedge(p\vee q)\equiv$

k) $(\neg p\vee\neg q)\vee(p\wedge q)\equiv$

l) $\neg(p\vee q)\vee\neg(\neg p\wedge\neg q)\equiv$

11. **Escribe** la propiedad que se ha aplicado en la simplificación de la siguiente expresión.

$\sim[(q\vee\sim p)\leftrightarrow p]$

$\sim\{[(q\vee\sim p)\rightarrow p]\wedge p\rightarrow(q\vee\sim p)]\}$

$\sim\{[\sim(q\vee\sim p)\vee p]\wedge[\sim p\vee(q\vee\sim p)]\}$

$\sim[\sim(q\vee\sim p)\vee p]\vee\sim[\sim p\vee(q\vee\sim p)]$

$\sim[(\sim q\wedge\sim\sim p)\vee p]\vee\sim[\sim p\vee(q\vee\sim p)]$

$\sim[(\sim q\wedge p)\vee p]\vee\sim[\sim p\vee(q\vee\sim p)]$

$\sim[(\sim q\wedge p)\vee p]\vee\sim[(\sim p\vee\sim p)\vee q]$

$\sim[p]\vee\sim[(\sim p\vee\sim p)\vee q]$

$\sim[p]\vee\sim[\sim p\vee q]$

$\sim p\vee(\sim\sim p\wedge\sim q)$

$\sim p\vee(p\wedge\sim q)$

$(\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee\sim q)$

$V\wedge(\sim p\vee\sim q)$

$(\sim p\vee\sim q)$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

12. **Escriban** en su cuaderno la ley que se aplicó en cada paso.

a) $[(\sim p\wedge q)\rightarrow(r\vee\sim r)]\wedge\sim q$

$\equiv[(\sim p\wedge q)\rightarrow F]\wedge\sim q$

$[\sim(\sim p\wedge q)\vee F]\wedge\sim q$

$[(p\vee\sim q)\vee F]\wedge\sim q$

$(p\vee\sim q)\wedge\sim q$

$\sim q$

b) $[(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)]\vee(\sim p\vee\sim q)$

$[p\wedge(q\vee\sim q)]\vee(\sim p\vee\sim q)$

$[p\wedge V]\vee(\sim p\vee\sim q)$

$p\vee(\sim p\vee\sim q)$

$(p\vee\sim p)\vee\sim q$

$V\vee\sim q$

V

13. **Simplifiquen** las siguientes fórmulas lógicas.

a) $(p\vee p)\wedge(\sim p\vee q\vee q)=$

b) $(\sim p\wedge q)\wedge(p\vee q)\vee p)=$

Actividad indagatoria

14. **Indaga** las leyes que puedes aplicar y **resuelve**.

$[(p\downarrow q)\vee\sim q]\vee\sim q$

Estrategia: dividir el problema en partes

Problema resuelto

Una florícola realiza dos procesos: el de corte y el de empaquetado. Para la producción de rosas se necesitan dos horas en el proceso de corte y cuatro horas en el proceso de empaquetado. Para la producción de margaritas se necesitan tres horas para el corte y cinco horas para el empaquetado. Para el proceso de corte pueden utilizarse hasta ocho horas, y para el empaquetado, hasta diez horas. Si cada producción de rosas deja una ganancia de $ 6 500 y cada producción de margaritas deja una ganancia de $ 3 400, ¿con qué flores se obtiene la mayor producción?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuántas producciones de cada flor deben hacerse para obtener la mayor ganancia?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

La estrategia que se utiizará es dividir el problema en partes.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso 1

Determina las variables del problema y organiza los datos en una tabla.

	Proceso de corte	Empaquetado	Ganancia
Rosas (x)	2	4	6 500
Margaritas (y)	3	5	3 400
# máx. horas	8	10	

Paso 2

Determina el sistema de inecuaciones y resuélvelo.	Identifica los vértices y reemplaza en la función.
$\begin{cases} 2x+3y \le 8 \\ 4x+5y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$	$f(x) = 6\,500x + 3\,400y$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

$P(2{,}5;\, 0)$ $f(x) = 6\,500(2{,}5) + 3\,400(0)$

La mayor producción se obtiene al cultivar únicamente rosas.

Problema resuelto

Una florícola exporta claveles y debe enviar al menos 1 000 a Europa. La empresa tiene dos bodegas, A y B. En la bodega A hay 600 flores y en la B hay 800. Enviar flores de la bodega A cuesta $ 500, y enviarlas de la bodega B, $ 400. ¿Cuántas flores deben enviarse de cada bodega para minimizar el costo?

Shutterstock, 671495245.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuántas flores deben enviarse a cada bodega para minimizar el costo?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

La estrategia que se utiizará es dividir el problema en partes.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso1

Determina las variables del problema y organiza los datos en una tabla.

	Claveles	Costo de envío
Bodega A (x)	600	500
Bodega B (y)	800	400

Paso2

Determina el sistema de inecuaciones y resuélvelo	Identifica los vértices y reemplaza en la función
$\begin{cases} x+y \ge 1000 \\ x < 600 \\ y > 800 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$	$f(x) = 500x + 400y$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

$P(200;\, 600) = 500(200) + 400(600) = 340\,000$

Problemas propuestos

1. Un vendedor necesita calcular el costo de un artículo, cuyo impuesto de venta es de 8,25 %. Escribe una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares. Si el artículo cuesta 1 200 USD, calcula el precio final.

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder

2. Daniela compra un auto y una moto por \$ 15 500. Luego de arreglarlos, los vende por \$ 20 850. ¿Cuál fue el precio de compra de cada vehículo si en la venta del coche ganó 15 % y en la de la moto 10 %?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

3. Para una fábrica de calentadores, el costo es de \$ 21 por calentador más \$ 7 000 en gastos generales. Si el precio de venta es de \$ 35, ¿cuántos calentadores se deben vender para obtener utilidad? Recuerda que para que haya utilidad Ingreso total – costo total > 0.

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

4. Dadas las siguientes variables proposicionales:
   - *p*: Rolando es primo de Paula
   - *q*: Diego es hermano de Rolando
   - *r*: Diego es primo de Paula

   Determina la estructura lógica de la siguiente proposición compuesta: Si Rolando es primo de Paula y Diego no es hermano de Rolando, entonces Diego no es primo de Paula.

   a) Comprender el problema.

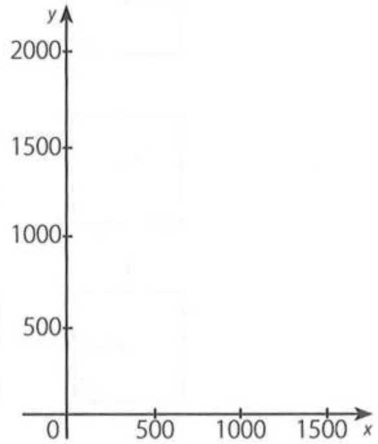
   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

5. Rosa decide criar pollos y patos en el patio de su casa. Ella tiene \$ 30 y desea comprar al menos 16 animalitos pequeños. Cada pollito cuesta \$ 1 y cada patito \$ 1,50. ¿Podría Rosa comprar 20 pollitos y 4 patitos? Justifica tu respuesta.

6. Una camioneta con una capacidad máxima de carga de 2 t es utilizada para transportar picudos y pargos, con precios de \$ 5 y \$ 3 el kilo respectivamente. En cada viaje, el valor de la mercancía no debe sobrepasar los \$ 8 000. Describe estas restricciones matemáticamente y confecciona un gráfico para mostrar las posibles combinaciones de pescado a transportar.



7. Luis va a ver un espectáculo artístico con sus hijos, pero solo tiene 14 dólares. Si compra entradas de 4 dólares el dinero le alcanza, pero si compra entradas de 5 dólares, no. ¿Cuántos hijos tiene Luis?

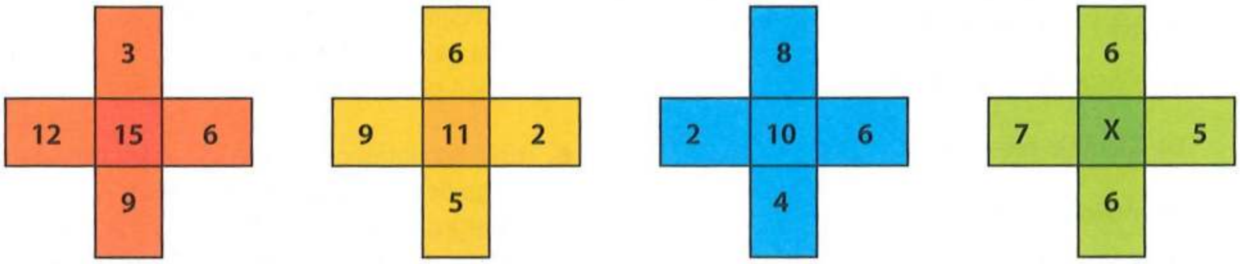
8. Un ganadero tiene un presupuesto de \$ 30 para comprar dos tipos de balanceado. El balanceado tipo I cuesta \$ 0,25 por kilo y el tipo II, \$ 0,10 por kilo. ¿Cuántos kilos del balanceado tipo I puede adquirir conociendo que necesita el triple del balanceado tipo II para elaborar la receta del alimento para sus animales?

www.freepik.es

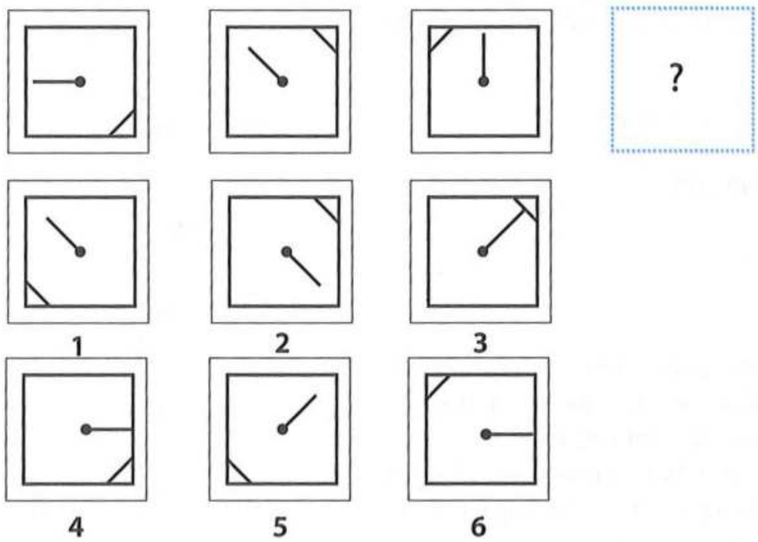
Competencia matemática

Razonamiento numérico

1. **Observa** los valores de las cruces y **encuentra** el valor de x.



2. ¿Qué figura completa la secuencia?



Cálculo mental

Multiplicar un número por 5

En estos casos, hay que identificar si el número por multiplicar es par o impar.

Números pares

Obtengo la mitad del número y le aumento un cero.

a) $84 \cdot 5 = 84 \div 2 = 420$

b) $26 \cdot 5 = 26 \div 2 = 130$

Números impares

Resto 1 al número que voy a multiplicar, obtengo la mitad de dicho número y aumento el número 5.

c) $45 \cdot 5 = 44 = 44 \div 2 = 225$

d) $79 \cdot 5 = 78 = 78 \div 2 = 395$

Ahora, hazlo tú.

a) $85 \cdot 5 =$

b) $34 \cdot 5 =$

c) $105 \cdot 5 =$

d) $62 \cdot 5 =$

e) $112 \cdot 5 =$

f) $19 \cdot 5 =$

g) $22 \cdot 5 =$

h) $47 \cdot 5 =$

i) $71 \cdot 5 =$

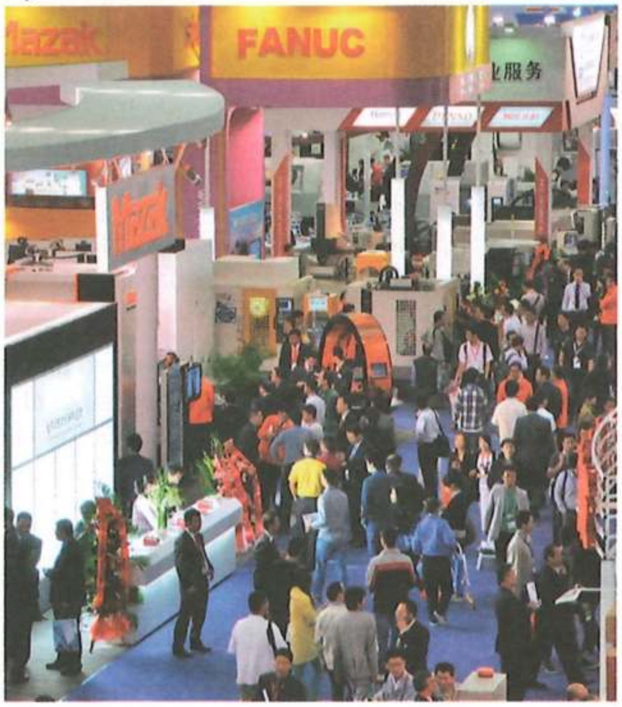
j) $124 \cdot 5 =$

Pequeña empresa

Áreas asociadas al proyecto: Matemática, Emprendimiento y Gestión

Justificación / problemática

Ecuador es uno de los países más emprendedores de América Latina. Así lo señala el estudio Global Entrepreneurship Monitor (GEM Ecuador 2015), conocido por ser uno de los termómetros del emprendimiento. Según este reporte, Ecuador obtuvo una actividad emprendedora temprana (TEA) alta de 33,6 %, ubicándose en el primer lugar entre los países de América Latina y el Caribe que participaron en el GEM 2015. Este estudio también revela que el 73,6 % de los emprendedores tenía menos de 45 años. Varios jóvenes ecuatorianos han logrado emprender y en el camino han cosechado éxitos. Muchos negocios están cargados de creatividad, la cual les da un toque de originalidad para destacar sus productos. También hay que señalar la importancia de los espacios para que estos emprendimientos puedan darse a conocer: ferias o mercaditos, una nueva tendencia que brinda un espacio y un apoyo para que los emprendedores se contacten con los consumidores.



Shutterstock, 101447341.

(Texto adaptado de: https://www.metroecuador.com.ec/ec/noticias/2017/01/16/ecuador-pais-emprende.html)

Objetivo

Crear un proyecto emprendedor y determinar los costos y el tiempo de inversión mediante un sistema de inecuaciones para obtener la mayor ganancia posible.

Shutterstock, 561569389.

Recursos

- Producto que se venderá
- Costos y tiempo de producción del producto
- Forma de distribución del producto

Actividades

- **Forma** un grupo con tus compañeros. **Piensen** y **elaboren** un producto innovador.
- **Obtengan** los costos de producción, tiempo de producción y proceso. Con esos datos, **armen** un sistema de inecuaciones lineales.
- **Encuentren** qué cantidad de cada producto deben elaborar para obtener la ganancia máxima.

Evaluación

1. ¿Qué es lo más importante que aprendiste con el desarrollo de este proyecto?
2. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿obtuviste la mayor ganancia?
3. ¿Qué conclusión puedes obtener de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Concursos intercolegiales

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Situación cotidiana

Los estudiantes que gustan de ciertas asignaturas y tienen buenas bases, pueden participar en concursos realizados por otros colegios, dar pruebas o presentar proyectos para ser los ganadores. La cantidad de estudiantes que participan y las bases o normas varían.

Shutterstock, 578815669.

Se realiza una convocatoria para participar en un concurso dirigido para los estudiantes de décimo de Básica que son 77. Se forman equipos constituidos por el 50% de los alumnos del paralelo A y el 60% del paralelo B. Si el número de participantes para el concurso es el mismo de alumnos del 10° A, ¿Cuántos educandos hay en cada paralelo?

Reflexiona

- ¿Aproximadamente cuántos alumnos son el 50 % del total?

  Hay 40 en el paralelo A y 25 en el B.

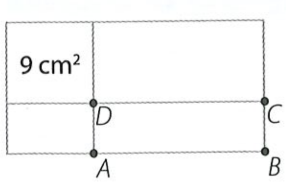
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si la cantidad total de estudiantes fueran 55 y las condiciones de participación se mantienen iguales, ¿cuántos educandos hay en cada paralelo?
- Si entre los décimos, A y B, suman 70 alumnos y para el concurso se selecciona la mitad de estudiantes de cada paralelo, tal que para el concurso acudirán 35 alumnos, ¿Cuántos estudiantes hay en cada paralelo?

Resuelve las situaciones

- Voy a participar en un concurso y quiero saber: ¿cuántas respuestas correctas necesito para obtener 65 puntos en el test de 100 preguntas, si la respuesta correcta obtiene + 2, la incorrecta –1, y contesto a todas?
- José se prepara para el concurso de matemática. Debe escribir números en las celdas de una cuadrícula de 3×3, para que la suma de los números en cualquiera de los cuatro cuadrados posibles de 2×2 sea la misma. José ya ha escrito los números en tres de las celdas de las esquinas, como se muestra en la figura. ¿Qué número debe escribir en la celda marcada con el signo de interrogación?

2		4
?		3

- Un rectángulo con perímetro 30 cm se divide en cuatro partes por una línea vertical y una línea horizontal. Una de las partes es un cuadrado de área 9 cm², como se muestra en la figura.



¿Cuál es el perímetro del rectángulo ABCD?

- Hay 20 preguntas en un cuestionario. Cada respuesta correcta puntúa 7 puntos, cada respuesta incorrecta puntúa –4 puntos y cada pregunta dejada en blanco puntúa 0 puntos. Enrique rindió la prueba y obtuvo 100 puntos. ¿Cuántas preguntas dejó en blanco?

Tema: Ingresos

Inecuaciones con una incógnita

Situación cotidiana

Utilizamos las inecuaciones cuando no se tiene un valor exacto de lo que buscamos, pero sabemos si es mayor o menor que una referencia que ubicamos. Por ejemplo, en una receta de galletas no usar más de dos huevos o utilizar menos de una cucharada de vainilla, entre otros ejemplos.

Shutterstock, (2020). 114675025

Sebastián tiene un contrato de trabajo con una empresa en el que figuran las siguientes cláusulas:

- Un sueldo fijo mensual de $ 750.
- Un incentivo de $ 8 por lote vendido.
- Un pago de $ 0,1 por kilómetro recorrido.

Calcula el número mínimo de lotes que vendió durante un mes en que recorrió 1 500 km si al final de este, percibió un sueldo superior a $ 1 300.

Reflexiona

- ¿Qué cláusula del contrato es la que más aporta al sueldo de Sebastián?

Vende 51 lotes

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si Sebastián necesita ganar $ 1 500 y tiene el mismo recorrido en el kilometraje, ¿cuántos lotes de producto debe vender?
- ¿Qué diferencia hay en el procedimiento que realizas en el primer caso respecto del segundo?

Resuelve las situaciones

- En una sala de cine, con capacidad para 400 personas, se obtuvo una recaudación superior a los $ 1 650 un día en que se proyectó una película de estreno. Si el precio de cada entrada era de $ 4,50, ¿cuántas butacas quedaron vacías como máximo?

Shutterstock, 130498385.

- Rodrigo debe comprar varios pliegos de cartulina. Si cada pliego cuesta $ 0,15 y dispone de $ 1,50 ¿cuántos pliegos de cartulina como máximo puede comprar?
- Sergio y Nora conjuntamente deben comprar un regalo y como máximo pueden gastar $120. Si Nora debe aportar la tercera parte que Sergio, ¿cuál es la máxima cantidad de dinero que aporta él?
- Para obtener un café de óptimo sabor, se mezcla dos tipos de este grano: uno de tipo A y otro de tipo B. Si la concentración del de tipo B debe ser mínimo un cuarto que del tipo A y se quiere conseguir como máximo 80 g de café mezclado, ¿cuál es la máxima cantidad de café del tipo A que debe tener la mezcla?

Shutterstock, 519452827.

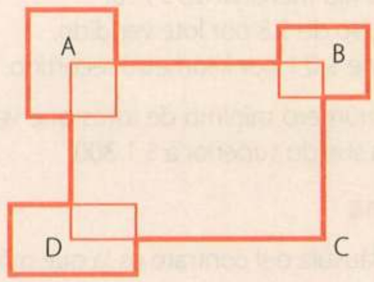
Olimpiadas matemáticas

1. En un partido de fútbol un sexto de la audiencia son niños. Dos quintos de los adultos son hombres. ¿Qué fracción de la audiencia son mujeres adultas?

Argumenta la solución:

Respuesta:

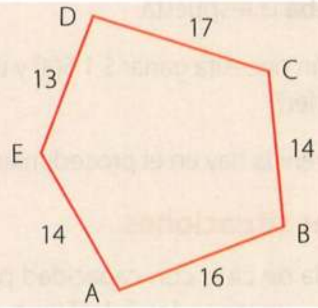
2. El perímetro de un rectángulo ABCD es 30 cm. Otros 3 rectángulos se ponen de manera que sus centros son los puntos A, B y D, como se muestra en la figura. Si la suma de los perímetros de los tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es la longitud de la línea gruesa?



Argumenta la solución:

Respuesta:

3. En el pentágono de la figura se dibujaron cinco círculos, con centros en A, B, C, D y E. Para cada uno de los lados del pentágono, se cumple que los dos círculos que tienen centro en sus extremos se tocan exactamente en un punto. Si las longitudes de los lados del pentágono son las que se muestran en la figura, ¿cuál vértice es el centro del círculo más grande que se dibujó?



Argumenta la solución:

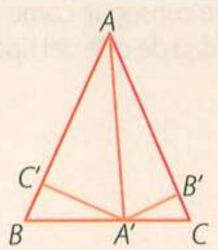
Respuesta:

Recuperado de: http://www.ommenlinea.org/

Completar:

4) Un número excede a otro en 5 unidades. La tercera parte del mayor es igual al 25 % del menor aumentado en 10 unidades. ¿Cuáles son estos números?

5) La figura ABC es un triángulo isósceles de área 1, $AC = 2u$ y A' es cualquier punto sobre BC. **Calcula** $B'A' + A'C'$.



Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Calcula y: $y - 5 = 3y - 25$

Escoge la respuesta correcta.

a) $y = 10$

b) $y = -10$

c) $y = \frac{15}{2}$

d) $y = -\frac{15}{2}$

2. Lee y analiza.

Calcula x:

$30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = -(-5x + 6) + (-8 + 3x)$

Escoge la respuesta correcta.

a) $x = -\frac{8}{9}$

b) $x = \frac{8}{9}$

c) $x = -\frac{2}{3}$

d) $x = \frac{2}{3}$

3. Lee y analiza.

Resuelve: $x + 3(x - 1) - 6 + 4(2x + 3) = 0$

Escoge la respuesta correcta.

a) $x = -\frac{3}{4}$

b) $x = \frac{3}{4}$

c) $x = -\frac{1}{4}$

d) $x = \frac{1}{4}$

4. Lee y analiza.

La suma de dos números es 108 y el doble del mayor excede al triple del menor en 156. **Halla** los números.

Escoge la respuesta correcta.

a) 74,4 y 33,6

b) 96 y 12

c) 52,8 y 55,2

d) 90 y 18

5. Lee y analiza.

La edad de *A* es triple que la de *B* y hace 5 años era el cuádruplo de la de *B*. **Halla** las edades actuales:

Escoge la respuesta correcta.

a) 5 y 15

b) 10 y 30

c) 20 y 60

d) 15 y 45

6. Lee y analiza.

Encuentra el intervalo solución de la inecuación:

$$5x - 1 \geq 8 + 2x$$

Escoge la respuesta correcta.

a) $(3, -\infty)$

b) $(-\infty, 3]$

c) $[3, +\infty)$

d) $(-\infty, 3)$

7. Lee y analiza.

Si $a \leq b$, indica cuál de las siguientes desigualdades es incorrecta:

Escoge la respuesta correcta.

a) $a + c \leq b + c$, para todos los valores de c

b) $a \cdot c \geq b \cdot c$, cuando $c > 0$

c) $a : c \leq b : c$, cuando $c > 0$

d) $a \cdot c \geq b \cdot c$, cuando $c < 0$

8. Lee y analiza.

Indica para cuál de las siguientes inecuaciones el valor $x = 3$ no es solución:

Escoge la respuesta correcta.

a) $3 - 2x < \frac{4x}{3} - 4$

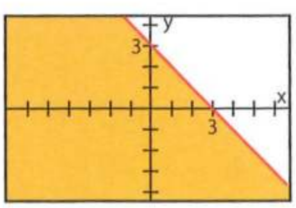
b) $\frac{7(2x - 1)}{5} \geq \frac{3x - 1}{2}$

c) $5 \cdot (2x - 3) > 4x + 7$

d) $-2(x - 1) < 8 - x$

9. Lee y analiza.

Señala cuál de estas inecuaciones tiene como solución la región sombreada en la figura:



Escoge la respuesta correcta.

a) $3 - x \leq y$

b) $3 + x > y$

c) $3 - x \geq y$

d) $3 + x < y$

10. Lee y **analiza**.

¿Cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a la inecuación $12x - 8 > 4x + 8$?

Escoge la respuesta correcta.

a) $6x \geq 10$

b) $5x < 2x + 10$

c) $3x > 10$

d) $2x + 1 > 5$

11. Lee y **analiza**.

Determina la fórmula lógica de la proposición compuesta, si las simples son:

p: Pepe es hermano de Lali
q: Cecy es prima de Luis

Si Pepe no es hermano de Lali, entonces Cecy es prima de Luis.

Escoge la respuesta correcta.

a) $\neg (p \rightarrow q)$

b) $p \rightarrow q$

c) $\neg p \rightarrow q$

d) $\neg p \rightarrow \neg q$

12. Lee y **analiza**.

Determina la fórmula lógica de la proposición compuesta si las simples son:

r: Sergio es hijo de Andrea
s: Laura es hermana de María

No es cierto que Sergio es hijo de Andrea y Laura es hermana de María.

Escoge la respuesta correcta.

a) $\neg r \wedge s$

b) $\neg (r \wedge s)$

c) $\neg r \wedge \neg s$

d) $\neg (r \wedge \neg s)$

13. Lee y **analiza**.

Indica qué clase de proposición es:

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

Escoge la respuesta correcta.

a) Tautología

b) Contradicción

c) Contingencia

d) Ninguna

14. Lee y **analiza**.

Indica qué clase de proposición es:

$$(p \rightarrow q) \wedge p$$

Escoge la respuesta correcta.

a) Tautología

b) Contradicción

c) Contingencia

d) Ninguna

15. Lee y **analiza**.

Indica qué clase de proposición es:

$$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

Escoge la respuesta correcta.

a) Tautología

b) Contradicción

c) Contingencia

d) Ninguna

16. Lee y **analiza**.

La solución para la ecuación

$2x - [6 - 2(5x - 4)] = 6x - 2$ es:

Escoge la respuesta correcta.

a) 2

b) 4

c) -2

d) 3

17. Lee y **analiza**.

La solución para el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y - 3x = 4 \end{cases}$$

Escoge la respuesta correcta.

a) $(-1,-1)$

b) $(1, 1)$

c) $(1,-1)$

d) $(-1; 1)$

18. Lee y **analiza**.

La proposición $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es:

Escoge la respuesta correcta.

a) Contingencia

b) Contradicción

c) Tautología

d) Ninguna de las anteriores

19. Lee y **analiza**.

Matías es 12 años mayor que su hermano Julián y se conoce que, hace 6 años, Matías le doblaba en edad. La edad de Julián expresada en años es:

Escoge la respuesta correcta.

a) 18 años

b) 30 años

c) 12 años

d) 24 años

20. Lee y **analiza**.

Racionaliza y **simplifica** la expresión.

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$$

Escoge la respuesta correcta.

a) $\dfrac{2a-6\sqrt{a}}{a+9}$

b) $\dfrac{2a+6\sqrt{a}}{a-9}$

c) $\dfrac{2a+6\sqrt{a}}{a+9}$

d) $\dfrac{2a-6\sqrt{a}}{a-9}$

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

En tu cuaderno

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

¿Y si los continentes se mueven a causa de la interacción gravitatoria con la Luna y el Sol?

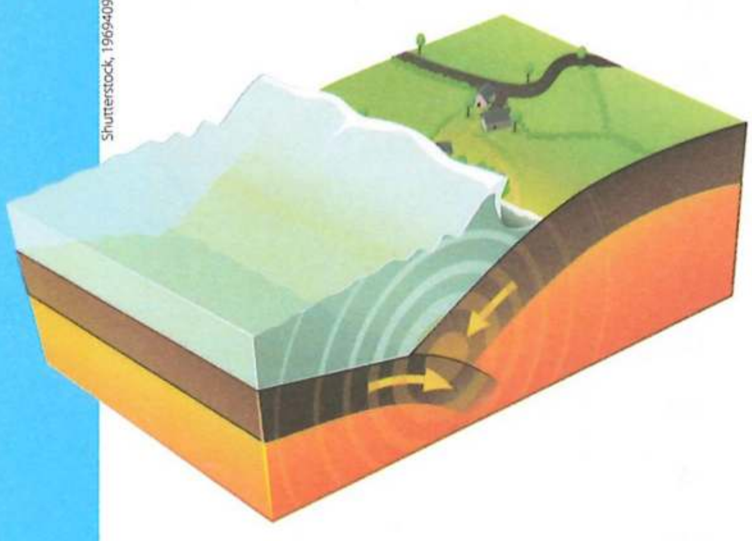
"En el interior de la Tierra, todo se mueve. Desde el núcleo externo, hecho de hierro y níquel fundidos, hasta el manto, la capa de roca de más de 3 000 kilómetros de grosor cuyos movimientos de convección ponen en marcha la tectónica de placas y el movimiento de los continentes... o por lo menos eso es lo que se pensaba hasta el momento.

Un equipo de geólogos de la Universidad de Washington, en St. Louis, dirigido por Anne M. Hofmeister, acaba de proponer una nueva hipótesis sobre la dinámica interna de la Tierra, según la que sería la interacción gravitatoria con la Luna y el Sol, no el calor interno del planeta, lo que mueve el manto terrestre.

Según los investigadores, es la fuerza y no el calor lo que mueve los objetos más grandes. Y esa fuerza surge de la gravedad.

La teoría más aceptada sobre el funcionamiento de la Tierra dicta que sus movimientos internos dependen de la disipación del calor, generado por la radiactividad, y por la energía sobrante de antiguas colisiones de los tiempos en que se formó nuestro planeta. Pero incluso los defensores más acérrimos de la convección del manto reconocen que esa cantidad de energía térmica interna es insuficiente para impulsar la tectónica a gran escala. Sin embargo, Hofmeister y sus colegas sostienen que las placas de la Tierra podrían estar cambiando porque el Sol ejerce una atracción gravitacional tan fuerte sobre la Luna que ha provocado que su órbita alrededor de la Tierra se alargue.

Shutterstock, 1969409797.



Una nueva hipótesis desafía la creencia de que la convección del manto terrestre es la responsable de la tectónica de placas.

Con el tiempo, la posición del baricentro, el centro de masa entre la Tierra y la Luna se ha ido acercando a la superficie terrestre y ahora oscila unos 600 kilómetros por mes en relación con el geocentro, dijo Hofmeister. Esto genera tensiones internas, ya que la Tierra sigue girando.

La rotación diaria de la Tierra, además, está aplanando el planeta que no es una esfera perfecta y eso también contribuye a la fragilidad de la corteza. Juntas, estas dos tensiones independientes, han creado el mosaico de placas que se observa en la capa exterior de nuestro planeta. Según los autores de la investigación, la variedad de movimientos de las placas proviene de los cambios de tamaño y dirección de las fuerzas gravitatorias desequilibradas con el tiempo".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-y-si-continentes-mueven-causa-interaccion-gravitatoria-luna-y-202201270202_noticia.html

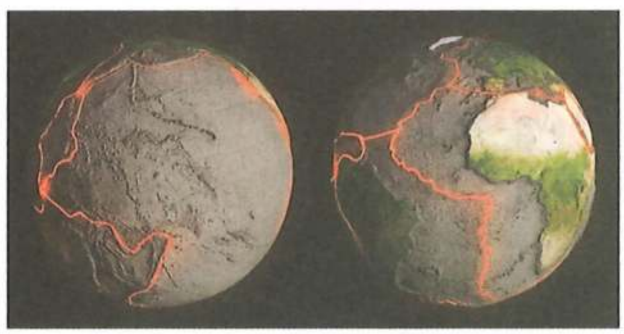
Ficha de comprensión lectora

1. Con base en la lectura, **responde** en tu cuaderno las siguientes preguntas.
   a) ¿Sobre qué trata el artículo?
   b) ¿Qué otro título sugerirías para este texto?
   c) ¿Qué es el manto y cuánto mide?
   d) Según la teoría actual, ¿cuál es la causa de la tectónica de placas y el movimiento de los continentes?
   e) Según la nueva teoría, ¿qué causa estos movimientos?
   f) Según los investigadores, es la fuerza y no el calor lo que mueve los objetos más grandes. ¿De dónde surge esta fuerza?
   g) ¿Qué opinas acerca de la nueva hipótesis del equipo de geólogos de la Universidad de Washington, relacionada con la dinámica interna de la Tierra?

Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** en Internet acerca de la tectónica de placas y el movimiento de los continentes. **Elabora** una redacción y **compártela** en clase.
2. **Toma** de la web diferentes imágenes sobre el tema y **elabora** un *collage*.
3. ¿Qué opinas sobre esta nueva teoría de la causa del movimiento de los continentes?
4. **Averigua** el significado de las siguientes palabras: convección, tectónica, interacción gravitatoria, baricentro, geocentro.



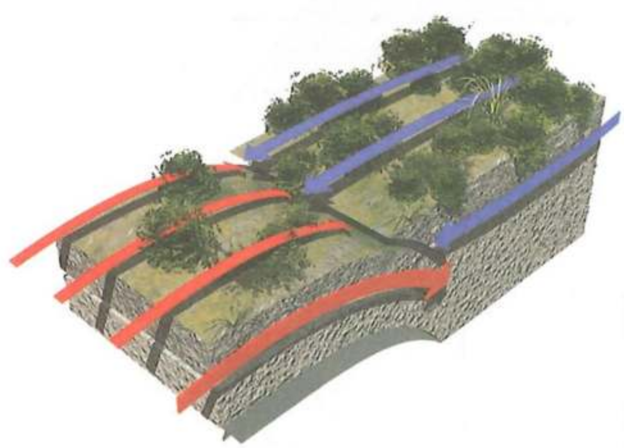
Shutterstock, 180937673.

Líneas de falla de la Tierra entre placas tectónicas

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:
   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 191813528.

Interacciones de placas tectónicas

Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

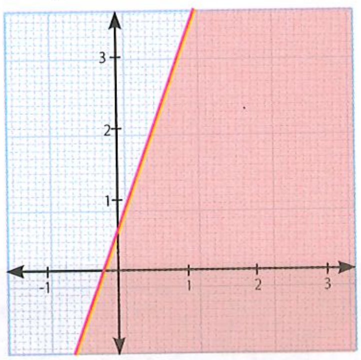
I.M.4.2.4. / I.M.4.4.1.

1. **Relaciona** cada ecuación e inecuación con su respuesta.

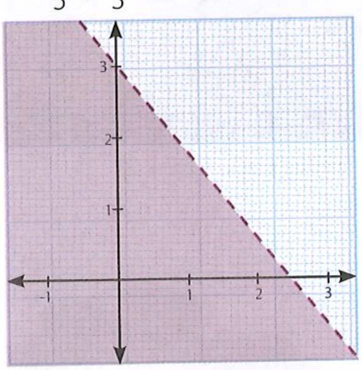
a) $4x-20=2x-14$	1. $x \geq \frac{38}{5}$
b) $8(x-7) \geq 3(x-6)$	2. $x=\frac{12}{5}$
c) $\frac{5}{4}x-5(x-2)=1$	3. $x=3$
d) $\frac{1}{3}x-\frac{6}{5} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}x-2\right)$	4. $x \leq -\frac{6}{25}$

2. **Escribe** dos puntos solución de cada inecuación con dos incógnitas.

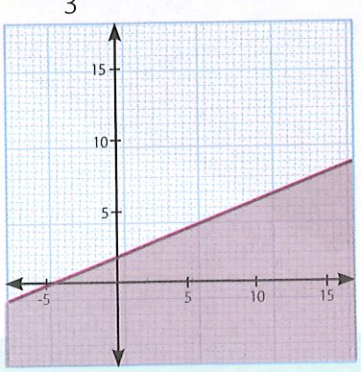
a) $\frac{2}{3}x - 3y < 5x - 5y + 1$



b) $\frac{6}{5}x-\frac{2}{3}y > 2(x-1)$



c) $\frac{x-1}{3} \geq 3y - 2$



3. **Resuelve** las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

a) $3x-2x=4(x-3)+5x$

b) $\frac{2}{3}x-6 \leq 3(x-4)$

c) $\left(\frac{5}{3}-9\right)2=\frac{x+1}{2}$

d) $\frac{x-4}{2} \leq 4$

4. **Completa** la siguiente tabla de verdad usando las definiciones de los conectores lógicos. **Escribe** si es tautología, contradicción o contingencia.

a) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

p	q	$p \wedge \sim q$	$\leftrightarrow$	$\sim p \vee q$

En tu cuaderno

Es una

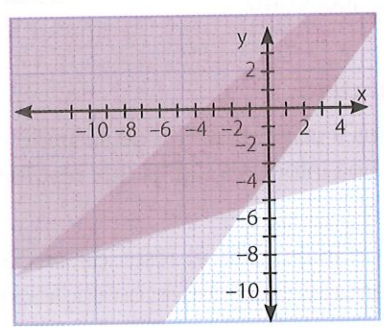
b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow$	$p \wedge \sim q$

En tu cuaderno

Es una

5. Un punto de la región factible del sistema de inecuaciones es:



a) P (–2, 2)

b) P (–2, 4)

c) P (–1, –1)

d) P (3, –4)

6. La proposición ($p \rightarrow q$) es igual a:

a) ($p \vee q$)

b) ($q \rightarrow p$).

c) ($\sim p \wedge q$)

d) ($\sim p \vee q$)

7. **Selecciona** el valor de verdad correcto.

a) $V \rightarrow F = F$

b) $F \leftrightarrow F = F$

c) $V \wedge V = V$

d) $F \rightarrow V = F$

8. **Simboliza** la proposición compuesta para cada enunciado y **determina** su valor de verdad.

a) Si $4^2 = 16$ y $4 \cdot 4 = 16$ entonces $\sqrt{16} = 4$

b) No es cierto que si Guayaquil es la ciudad más grande o la más poblada, entonces es la capital del Ecuador.

c) Un cuadrado es un cuadrilátero o un paralelogramo si y solo si tiene sus diagonales iguales.

d) Si la Luna es un satélite y gira alrededor de la Tierra, entonces gira alrededor del Sol.

9. **Identifica** el valor de verdad de cada fórmula lógica.

a) $[(p \leftrightarrow q) \wedge r] \rightarrow (r \rightarrow q)$ si los valores de vedad de la preposiciones p, q y r son F F V respectivamente

b) $[(p \rightarrow \sim q) \vee r] \rightarrow (\sim r \vee q)$ si los valores de verdad de las proposiciones p, q y r son V F V, respectivamente.

Coevaluación

10. **Trabajen** en equipo y **resuelvan** la siguiente situación:

En una pastelería se hacen postres de tres leches y selva negra. Diariamente se producen máximo 50 postres entre los dos. Se conoce que no se pueden fabricar más de 45 postres de tres leches y 30 pasteles selva negra. Se sabe además que la pastelería vende toda la producción.

a) **Planteen** el conjunto de restricciones del problema.

b) **Escriban** el sistema de inecuaciones y **resuélvanlo**.

c) **Grafiquen** la región factible del problema y **determinen** sus vértices.

d) ¿Cuántos pasteles tres leches y selva negra deben producirse diariamente?

11. **Determinen**, sin realizar la tabla de verdad, el valor de verdad de la siguiente fórmula lógica: si p, q, r y s son V, F, V, F, respectivamente.

$$[(p \rightarrow \sim q) \vee \sim r] \vee \sim q$$

12. **Expreso mis emociones.** Si ves a un compañero con problemas de sociabilidad, acércate a él e intégralo a tu grupo de amigos. ¿Qué otras actividades puedes proponer para que se integre al grupo?

Autoevaluación

13. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros **Resuelvo por mí mismo** **Necesito ayuda** **Estoy en proceso**

Contenidos	Resuelvo ecuaciones e inecuaciones lineales en R.	
	Resuelvo sistemas de inecuaciones lineales.	
	Aplico las leyes de la lógica proposicional y el valor de verdad de proposiciones usando conectores lógicos.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad en situación de la vida cotidiana?

unidad 3

Funciones y triángulos rectángulos

Las funciones

Con las funciones se pueden modelar matemáticamente relaciones entre variaciones de magnitudes. Por esta razón, a través de fórmulas podemos cuantificar variaciones y predecir comportamientos de los fenómenos.

Por ejemplo, en física los movimientos están modelados con fórmulas como la de la velocidad final $V_f = V_o + at$ o aquella para el desplazamiento en función del tiempo, $S(t) = V_o t + \frac{1}{2}at^2$, entre otras. De igual manera en química, las leyes que regulan fenómenos como la relación entre la presión y densidad, presión y volumen o solubilidad de sustancias químicas son funciones.

Entonces podemos concluir que las funciones ayudan a entender el mundo en el que vivimos, pues la matemática se encuentra aplicada en todas partes y gracias a esta se han dado grandes avances en la ciencia. ¿Te has puesto a pensar cómo investigarían los científicos sin usar la matemática? ¿Cómo expresarían sus datos?

Preguntas generadoras

- ¿Qué otro fenómeno se puede modelar con una función?
- ¿Cuál sería una función aplicada a la vida cotidiana?
- ¿Cómo se aplicarían las funciones a la economía?

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Producto cartesiano, relaciones reflexivas, simétricas y transitivas
- Funciones, modelos matemáticos como funciones
- Función real. Monotonía
- Función lineal. Pendiente
- Función potencia. Monotonía. Modelos matemáticos

Geometría y medida

- Teorema de Pitágoras. Aplicaciones

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.5.

Tema 1 Producto cartesiano

Saberes previos

¿Qué es para ti un par ordenado?

Shutterstock, 743088820

Expansión de colores

Definición. El producto cartesiano es una operación entre dos conjuntos. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de A por B y se indica $A \times B$ al conjunto de pares ordenados (a, b), donde a pertenece al conjunto A y b pertenece al conjunto B.

Veamos el siguiente ejemplo: Martina y Camilo tienen como favoritos los siguientes colores: rojo, lila y rosado. ¿Cómo relacionamos a Martina y Camilo con sus colores favoritos?

Se puede relacionar de la siguiente manera:

El conjunto **A** es el de Martina y Camilo: A = {Martina, Camilo}

El conjunto **B** son los colores: B = {rojo, lila, rosado}

Entonces realizamos el producto cartesiano $A \times B$:

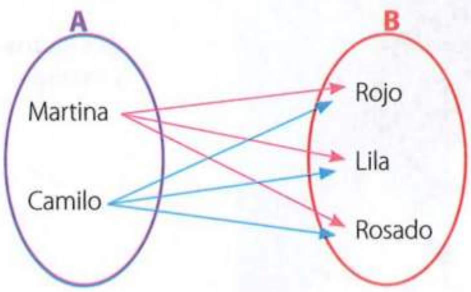
$A \times B$ = {(Martina, rojo); (Martina, lila); (Martina, rosado);
(Camilo, rojo); (Camilo, lila); (Camilo, rosado)}

¿Sabías que?

La relación binaria es una correspondencia de los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B, que relacionan dichos elementos respectivamente con un criterio dado.

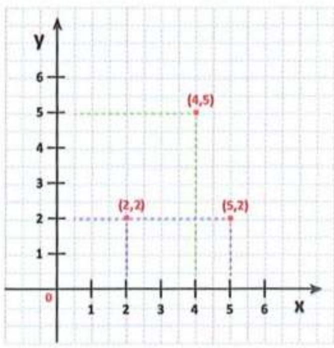
R es una relación de A en B si $R \in A \times B$.

Representación en un diagrama sagital



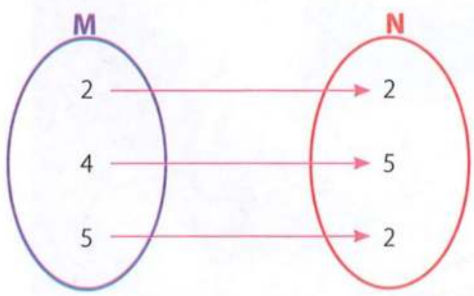
El producto cartesiano se puede presentar de diferentes maneras, por ejemplo:

Diagrama cartesiano



Shutterstock, 146258981

Diagrama sagital o diagramas de Venn



Competencia matemática

Se puede utilizar el producto cartesiano cuando en una empresa de transporte se le asigna un código a los camiones de acuerdo con nombre del chofer y la ruta.

M.4.1.42. Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos), representándolas con pares ordenados.
M.4.1.43. Identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.

Relaciones binarias: reflexiva, simétrica y transitiva

Ejemplo1

Dado el conjunto M = {1, 2, 4, 8} considerando que se establece la relación R de M en M definida por "*x* divide a *y*", ¿qué pares ordenados definen esta relación y qué propiedad se aplica?

Solución

Encontramos la relación "x divide a y"

a) 1 divide a 1, 2, 4, y 8

b) 2 divide a 2, 4, y 8

c) 4 divide a 4 y 8

d) 8 divide a 8

Los pares ordenados que definen la relación son:

R = {(1, 1); (1, 2); (1, 4); (1, 8); (2, 2); (2, 4); (2, 8); (4, 4); (4, 8); (8, 8)}

Como podemos observar, se cumple la **propiedad reflexiva**.

Ejemplo 2

Dado el conjunto Q = {Teresa, Martha, Ana} considerando que se establece la relación R de Q en Q definida por "*x* es hermana de *y*", ¿cómo relacionamos el problema?

Solución

a) T es hermana de M

b) M es hermana de T

c) T es hermana de A

d) A es hermana de T

e) M es hermana de A

f) A es hermana de M

Los pares ordenados que definen esta relación son:

R = { (T, M); (M, T); (T, A); (A, T); (M, A); (A, M) }

Se cumple la **propiedad simétrica**.

Ejemplo 3

Dado el conjunto S = {5, 6, 7, 8}, se establece la relación R de S en S definida por "*x* es mayor que *y*". ¿Cómo verificamos la propiedad transitiva?

Solución

a) 6 es mayor que 5

b) 7 es mayor que 5, 6

c) 8 es mayor que 5, 6, 7

Los pares ordenados que definen esta relación son:

R = { (6, 5); (7, 5); (7, 6); (8, 5); (8, 6); (8, 7) }

La relación cumple la **propiedad transitiva**.

R es transitiva si un elemento está relacionado con un segundo y este con un tercero, y si el primero está relacionado con el tercero.

¿Sabías que?

Las relaciones binarias pueden cumplir las siguientes propiedades, pero no necesariamente todas.

Propiedad reflexiva

Los elementos del conjunto están relacionados entre sí de tal manera que: para todo elemento *x* de A, entonces $\rightarrow x\,R\,x$.

$\forall\, x \in A, x\,R\,x.$

Propiedad simétrica

Si dos elementos de un conjunto cumplen que, si el primer elemento está relacionado con el segundo, entonces se cumple también que el segundo está relacionado con el primero:

si $x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x$.

$\forall\, x, y \in A, x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R\,x.$

Propiedad transitiva

Dados tres elementos del conjunto, si el primer elemento está relacionado con el segundo, y el segundo está relacionado con el tercero, entonces, el primero está relacionado con el tercero:

si $x\,R\,y$ e $y\,R\,z \rightarrow x\,R\,z$

$\forall\, x, y, z \in A, (x\,R\,y) \wedge (y\,R\,z) \Leftrightarrow x\,R\,z.$

Taller Evaluación formativa

I.M.4.3.1.

1. **Analiza** cada proposición y **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
   a) Se puede representar el producto cartesiano en un diagrama sagital.
   b) El producto cartesiano está formado por pares ordenados.
   c) Un par ordenado está formado por un solo elemento.
   d) En el diagrama cartesiano se puede representar una relación binaria.
   e) Las relaciones binarias tienen que cumplir necesariamente todas las propiedades.

2. **Determina** el producto cartesiano de los siguientes conjuntos.

   $A = \{1, 3, 5\}$ $\quad B = \{ a, e, o\}$

   $C = \{ i, u\}$ $\quad D = \{ 2, 4, 6, 8\}$

   a) $A \times B$ $\quad$ d) $C \times D$

   b) $A \times C$ $\quad$ e) $B \times D$

   c) $B \times C$ $\quad$ f) $A \times D$

3. **Determina** el producto cartesiano que se solicita en cada literal, dados los siguientes conjuntos.
   $A = \{n, s, v\}$, $B = \{a, e\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$
   a) $A \times B =$
   b) $B \times C =$
   c) $A \times D =$
   d) $D \times A =$
   e) $A \times A =$

4. Dados los conjuntos $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, **determina** y **representa** en tu cuaderno el diagrama cartesiano y el diagrama sagital de $A \times B$.

5. **Representa** en tu cuaderno el producto cartesiano $A \times B$ y $A \times A$ utilizando los diagramas sagital y cartesiano.
   a) $A = \{1, 2, 3\}$, $\quad B = \{2, 4, 6\}$
   b) $A = \{1, 2, 3\}$

6. **Indaga** cómo resolver el siguiente problema empleando producto cartesiano. **Resuelve** en tu cuaderno.

   En un pueblo existen tres centros comerciales: Tito-I (*TI*), Sergio Montenegro (*SM*) y Casa Miguel (*CM*); también existen dos fábricas de refrescos: MiKola (*M*) y Rico (*R*). Cada fábrica quiere vender sus productos en todos los centros comerciales. ¿Cuál es la relación para lograrlo?

   a) **Representa**, con pares ordenados, las relaciones entre fábricas y centros comerciales.
   b) Un posible comprador representó en un diagrama sagital el número de refrescos que compró. ¿Cuáles son los pares ordenados de la relación?

7. **Determina** las siguientes relaciones:
   Dados los conjuntos $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{1; 3\}$
   a) $M \times N$ $\quad$ c) $R_2 = \{(x, y) \in M \times N / y = x + 1\}$
   b) $R_1 = \{(x, y) \in M \times N / x > y\}$

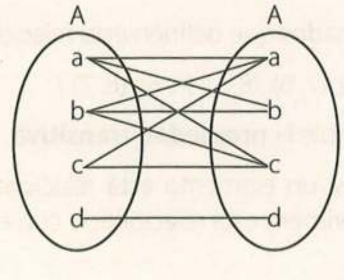
8. **Representa** aparte gráficamente en un diagrama sagital la relación $M \times N$ del ejercicio 7.

9. **Completa** con argumentos la siguiente tabla.

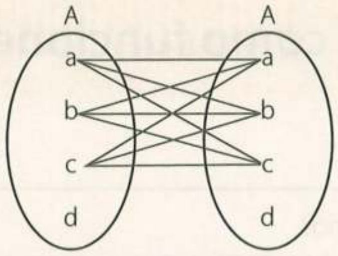
Relación R sobre A	No se cumple cuando
Reflexiva	
Simétrica	En tu cuaderno
Transitiva	

10. **Describe** las propiedades de las siguientes relaciones utilizando las siguientes letras: *R* (reflexiva), *S* (simétrica), *T* (transitiva).

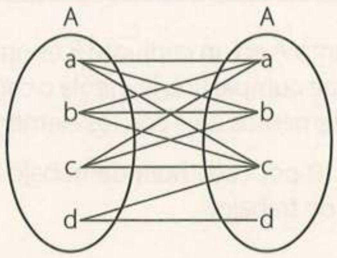
    a)



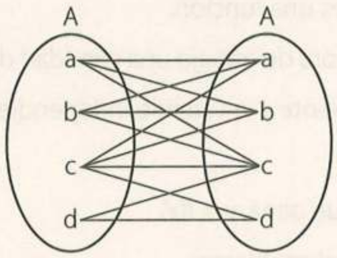
b)



c)



d)



11. Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

En $\mathbb{Z}$ la relación definida por $xRy \Leftrightarrow$ "*x divide a y*", es reflexiva y simétrica.	En tu cuaderno
En $\mathbb{Z}$ la relación definida por $xRy \Leftrightarrow$ "*x – y es impar*", es simétrica.	
La relación *mRh*, definida por "*m es madre de h*", no es ni reflexiva ni simétrica, pero es transitiva.	
La relación "*es primo de*" es simétrica.	
La relación "es pariente de" es reflexiva, simétrica y transitiva.	
En $\mathbb{N}$ la relación definida por $nRm \Leftrightarrow$ "*m es múltiplo de n*", es transitiva.	

12. Construye dos relaciones binarias sobre $A = \{a, b, c, d\}$, con las siguientes propiedades.

a) Reflexiva:

b) Simétrica:

c) Transitiva:

13. Representa en tu cuaderno gráficamente en un diagrama cartesiano la relación R1 del ejercicio 7.

14. Responde en tu cuaderno las preguntas y **completa** la actividad.

Considera el conjunto $T = \{2, 3, 4, 5\}$, en el que se establece una correspondencia de T en T denominada R y está definida por x es menor que y.

a) ¿Qué pares ordenados definen esta relación?

b) **Representa** en tu cuaderno gráficamente la relación R en un diagrama sagital y un diagrama cartesiano.

c) ¿Qué propiedades cumple esta relación? **Justifica** la respuesta en tu cuaderno.

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

15. Grafiquen el producto cartesiano de los siguientes conjuntos. **Utilicen** el diagrama sagital y el cartesiano.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1, 3, 5\}$

a) $A \times B$ **b)** $B \times C$ **c)** $A \times C$

16. Resuelvan. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, se establece la relación R de A en A definida por x menor que y.

a) **Definan** los pares ordenados de R.

b) **Representen** gráficamente en un diagrama sagital y cartesiano la relación R. **Utiliza** una hoja a cuadros.

c) **Identifiquen** qué propiedades cumple esta relación.

Actividad indagatoria

17. Resuelve en tu cuaderno.

Dado el conjunto Q = {Carla, Ana, María}, se establece la relación R de Q en Q definida por x es amiga de y.

a) **Define** los pares ordenados de R.

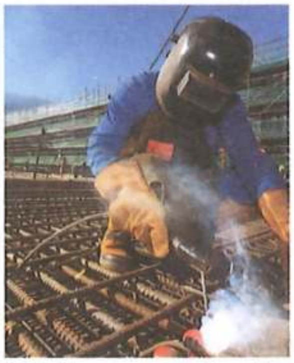
b) **Representa** gráficamente en un diagrama sagital y cartesiano la relación R.

c) **Identifica** qué propiedades cumple esta relación.

Tema 2 Modelos matemáticos como funciones

¿Sabías que?

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.



Soldador en una construcción

Shutterstock, 102584774

Recuerda que...

Se lee la función f del conjunto A en el conjunto B y su ecuación es $y = f(x)$.

Variable independiente. Está representada con la letra x se le asigna cualquier valor que permita el dominio.

Variable dependiente. Se la representa con la letra y porque depende de los valores que se le asigne a x.

Evaluación de funciones. Evaluar una función es encontrar la imagen de un valor x, reemplazando en la función.

Por ejemplo:

$f(x) = 3x - 1$.

La imagen de $x = 5$ es:

$f(5) = 3(5) - 1 = 14$.

Saberes previos

¿Cómo se representa un producto cartesiano?

Recordemos que una relación R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano entre $A \times B$, que cumple una ley, regla o característica particular, la cual hace corresponder los elementos de A con los elementos de B.

Un trabajador gana en una construcción \$ 10 por cada hora de trabajo. ¿Cuánto recibirá por un número cualquiera de horas de trabajo?

A continuación plantearemos la función:

Primero: verificamos si la relación anterior es una función.

Es una función debido a que asigna a cada hora de trabajo una cantidad de dinero.

Segundo: identificamos la variable dependiente y la variable independiente.

Variable independiente: horas trabajadas, (x)

Variable dependiente: cantidad de dinero que gana, $y = f(x)$

Tercero: escribimos la función que modela el problema:

$$f(x) = 10x.$$

Definición. Una **función** es una relación o correspondencia que **asigna** a cada elemento de un **conjunto A, uno y solo un** elemento de un **conjunto B**.

$$f: A \rightarrow B$$

Se lee "la función f del conjunto A en el conjunto B" y su ecuación es $y = f(x)$.

Realizamos la representación gráfica de la función planteada, utilizando una tabla de valores, en la cual asignamos cantidades a la variable dependiente.

Horas de trabajo	1	2	3	4	5
Cantidad de dinero	10	20	30	40	50

Ejemplo

Un comerciante de ropa vende cada camisa en \$ 25.

Las variables son:

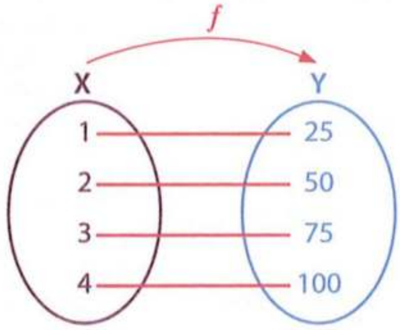
- **Variable independiente:** número de camisetas, (x)
- **Variable dependiente:** valor, (y)

La función que modela el problema es: $f(x) = 25x$.

M.4.1.45. Representar funciones de forma gráfica, con barras, bastones y diagramas circulares, y analizar sus características.
M.4.1.46. Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas.

Diagrama sagital

N.º de camisetas	Valor
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125

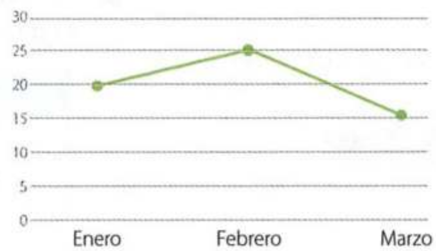


Aplicación de funciones

Adriana observa, en una revista, un gráfico que muestra la producción (en toneladas) de arroz, en los meses de enero, febrero y marzo.

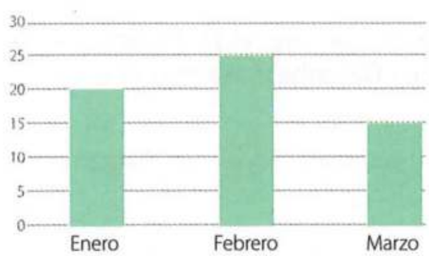
Obtenemos la tabla de valores observando el gráfico

Producción (toneladas)



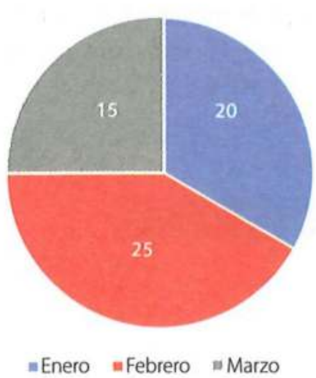
Meses	Enero	Febrero	Marzo
Producción (toneladas)	20	25	15

Producción (toneladas)



Graficamos un diagrama de barras. Como podemos observar, se cumple la propiedad reflexiva.

Producción (toneladas)



Analizamos la gráfica:

Se puede observar, claramente, que en el mes de febrero hubo mayor producción de arroz, alcanzando 25 toneladas, pero que este valor decreció a 15 toneladas en el mes de marzo.

A continuación, graficamos un diagrama circular.

¿Sabías que?

Para obtener el número de grados en un diagrama circular, se multiplica la frecuencia relativa por 360°.

Diagrama circular

El diagrama circular (también llamado diagrama de pastel) sirve para representar variables cualitativas o discretas. Se utiliza para representar la proporción de elementos de cada uno de los valores de la variable.

DFA

Es importante, para aquellas personas que tienen dificultades de motricidad, que tengan tiempo suficiente para que realicen su trabajo.

Competencia socioemocional

Es importante que realices todos los ejercicios que te propongan resolver. Conforme avances con los contenidos, adquirirás destrezas que te ayudarán a resolver ejercicios más complejos.

Comenta en la clase: ¿qué importancia tiene para ti resolver bien los ejercicios?

Taller Evaluación formativa

I.M.4.3.2.

1. **Analiza** cada proposición y **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
   a) Toda relación es una función.
   b) Para obtener la tabla de valores se asignan valores a x.
   c) Se puede utilizar un diagrama sagital para representar una función.
   d) A la variable dependiente se la representa con la letra x, y se le asigna cualquier valor.
   e) Para obtener el número de grados en un diagrama circular, se multiplica la frecuencia relativa por 360°.

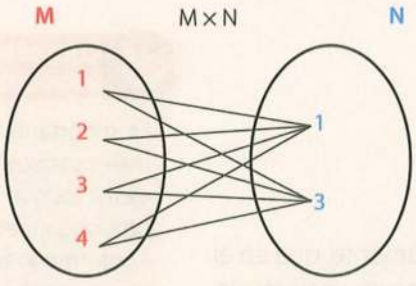
2. **Determina** la tabla de valores de la función $y = x - 3$ para cada valor de x.

x	y
−2	
0	
1	
3	

En tu cuaderno

3. **Grafica** en tu cuaderno, la función anterior en un diagrama cartesiano.

4. **Responde**. ¿El siguiente diagrama sagital **representa** a una función? En tu cuaderno **justifica** la respuesta.



5. **Evalúa** las siguientes funciones, para $x = 3$.
   a) $f(x) = x^2 + 1$
   b) $f(x) = -x^3 + 3$
   c) $f(x) = x^2 + x + 1$

6. **Evalúa** la función $f(x) = 2x^2 - 3$ para cada valor de x:

$f(-3) =$ $f(-1) =$

$f(0) =$ $f(2) =$

7. **Elabora** en tu cuaderno un diagrama de barra y circular para la siguiente información.

Ventas semanales ($)	
Lunes	200,00
Martes	225,00
Miércoles	115,00
Jueves	110,00
Viernes	170,00
Sábado	268,00
Domingo	300,00

8. La tabla muestra el tiempo, en segundos, que tarda en llegar cada auto de 0 a 100 km/h.

Auto	Tiempo (s)
Ferrari	2,4
Bugatti Chiron	2,5
Porsche 918 Spyder	2,5
Veyron Super Sport	2,6
Rimac Concept One	2,6
Koenigsegg Agera RS	2,7
Tesla S P100D	2,7
Porsche 911 GT2 RS	2,7

   a) **Identifica** la variable independiente y la dependiente. **Describe** la relación entre ambas.
   b) **Grafica** en tu cuaderno, en un diagrama de barras.

9. Un colegio privado cobra $ 100 por la matrícula y una pensión mensual de $ 130.

Busca una función que modele los gastos acumulados en cada mes del año para un familia que tiene un niño en ese colegio.

10. **Determina** la tabla de valores de la función $f(x) = x^2 + 6$.

x	$f(x)$
1	
2	
3	
4	
5	

En tu cuaderno

11. **Identifica** la variable independiente y la variable dependiente.

a) El costo de un producto

b) Horas de trabajo y salario

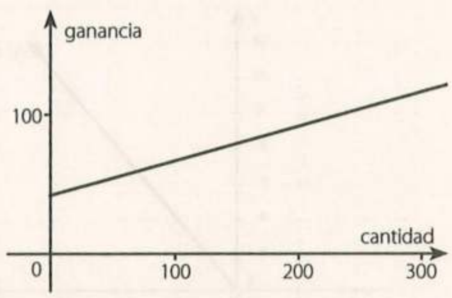
c) Aprobar una materia y horas de estudio

d) Edad de una persona y su estatura

12. El costo de producción de un tamal es de $ 0,50 y se vende a $ 0,75. **Construye** la función que describe el beneficio que se obtiene por la venta de tamales.

a) ¿Cuánto ganarías vendiendo 200 tamales diarios?

b) **Grafica** en tu cuaderno la función beneficio construida y **verifica** si es la que se muestra a continuación.



13. **Construye** una función para calcular el volumen de un cilindro con radio $r = 25\ m$ y una altura h.

14. Keila va a comprar un teléfono móvil y está estudiando la oferta de dos compañías. La compañía "A" cobra $ 0,16 por el establecimiento de cada llamada y $ 0,11 por cada minuto de llamada; la compañía "B" cobra $ 0,10 y $ 0,15, respectivamente.

a) **Encuentra** la función de oferta de las dos compañías y **grafícalas** en tu cuaderno, luego **verifica** con la representación que se muestra.

b) Si Keila realiza alrededor de 90 llamadas al mes y conversa aproximadamente 290 min. ¿Qué compañía debe elegir? **Justifica** la respuesta en tu cuaderno.

15. **Resuelve** en tu cuaderno. El precio en dólares del quintal de azúcar, en el periodo desde el 2019 hasta el 2022, está dado por la siguiente tabla de valores:

Año	2019	2020	2021	2022
Costo	45	60	40	50

a) **Identifica** la variable independiente y la variable dependiente.

b) **Grafica** en un diagrama de barras.

c) **Responde** las siguientes preguntas.

¿Cuál es el año en el que costó más el quintal de azúcar?

¿Cuál fue año en que el quintal de azúcar costó menos?

d) **Grafica** en tu cuaderno un diagrama circular utilizando los datos.

16. **Problema-decisión. Resuelve**. Paulina se inscribe en un club de Karate que cobra $ 50 por matrícula y $ 15 por cada semana de clase. ¿Qué función modela la situación?

Si durante el entrenamiento de Karate rompes un equipo, lo informarías o no, ¿qué decisión tomarías? **Justifica.**

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

17. **Representen** las siguientes funciones en diagramas cartesianos.

a) $y = \frac{2x}{3}$

b) $y = -x + 6$

c) $y = -x + 6$

d) $y = x - 3$

18. **Resuelvan**. El valor de un paquete de manzanas es $ 3. **Expresen** el costo del paquete de acuerdo con la cantidad comprada.

a) **Plantear** la función.

b) **Realizar** la tabla de valores.

c) **Graficar** la función.

Actividad indagatoria

19. Una bomba de agua extrae de un tanque los 200 l de agua contenida, a razón de 40 l por minuto.

a) ¿En cuánto tiempo el tanque quedará vacío?

b) ¿Cuál es la gráfica de la función f(x)?

Tema 3 Monotonía de funciones reales

Interculturalidad

La etnomatemática reconoce que los miembros de distintos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticas únicas, que permiten entender y transformar sus normas sociales.

Saberes previos

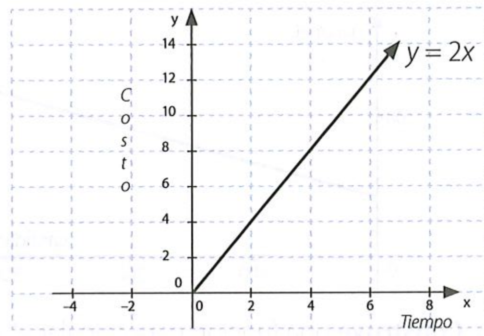
Reflexiona. ¿Cuál es el conjunto de los números reales?

Recordemos que una función real es una función matemática que hace corresponder a cada número real otro número real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Una empresa de telefonía cobra a sus clientes solo por el tiempo que tarda en comunicarse. La relación entre el tiempo que se demora una llamada y el costo por llamada está dada por la función f(x): $y - 2x = 0$. ¿Cuántos minutos puede hablar un cliente si dispone de \$ 20?

Para resolver la situación anterior, realizamos una tabla de valores y graficamos la función.

x	$y = 2x$	y
2	$y = 2(2)$	4
4	$y = 2(4)$	8
6	$y = 2(6)$	12
8	$y = 2(8)$	16
10	$y = 2(10)$	20
12	$y = 2(12)$	24



Como se observa en la tabla de valores, a cada valor de x le corresponde un solo valor real de y.

El dominio y el recorrido de la función, $f(x) = 2x$ es:

Dom $f(x) = \mathbb{R}$ Rec $f(x) = \mathbb{R}$

Entonces, el dominio y recorrido de la función es el conjunto de los números reales. Por lo tanto, es una función real.

Solución

El cliente puede hablar hasta 10 minutos.

Otras funciones reales, escritas por medio de una fórmula son:

Por ejemplo: $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $y = \sqrt{8 - 2x}$; $y = \dfrac{x+2}{x}$

En cuyo caso se debe analizar el dominio para elaborar una tabla de valores y representarlas.

¿Sabías que?

Si el dominio y recorrido son el conjunto de números reales, entonces es una función real.

x: es la variable independiente que pertenece al dominio de la función.

y* = *f(x): es la variable dependiente, imagen de *x*. Es un número real que se obtiene al aplicar la función sobre el elemento *x*.

Dominio: es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x).

Recorrido: llamado también imagen, codominio o rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (y).

M.4.1.48. Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.
M.4.1.49. Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes.

Monotonía de funciones

El estudio de la monotonía de funciones consiste en establecer los intervalos en dónde una función es creciente, decreciento o constante, de igual manera el análisis de puntos máximos y mínimos. Este es un criterio que en cursos superiores se realizará desde la interpretación de la derivada.

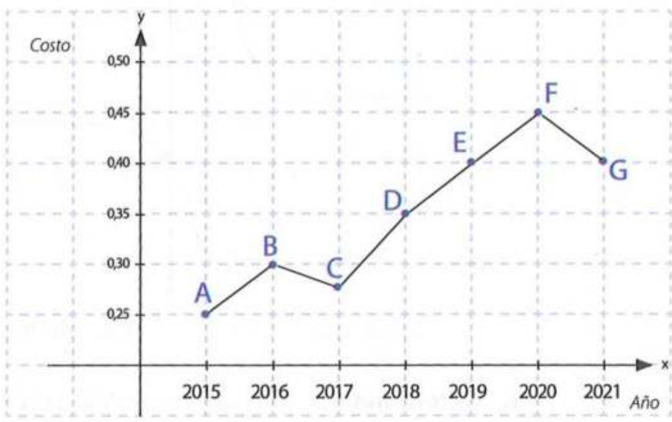
El precio en dólares de la libra de azúcar en el periodo entre 2015 y 2021 está dado por la siguiente tabla.

Año	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Costo	0,25	0,30	0,28	0,35	0,40	0,45	0,40

¿En qué años aumentó el precio de la libra de azúcar?

En este ejemplo tenemos que el año es la variable independiente (x) y que el costo es la variable dependiente (y) de la función f(x).

Graficando la función tenemos que:



Analizando la gráfica y la tabla de valores, podemos determinar que el precio del azúcar decreció entre el año 2016 y 2017, y entre 2020 y 2021. En el resto de años el precio ha ido aumentando.

¿Sabías que?

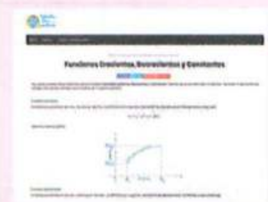
- Si los valores de f(x) van en aumento, la función es creciente en ese intervalo.
- Si los valores de f(x) van disminuyendo, la función es decreciente en ese intervalo.

Una función puede ser totalmente creciente o decreciente.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace para conocer más ejemplos de funciones.

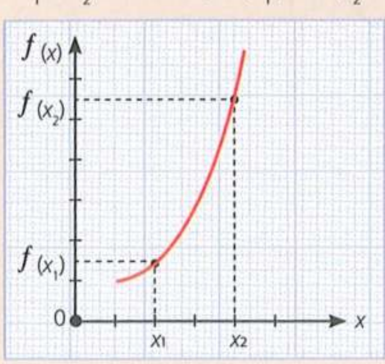
lynk.ec/10m10



Definición de funciones creciente, decreciente y constante

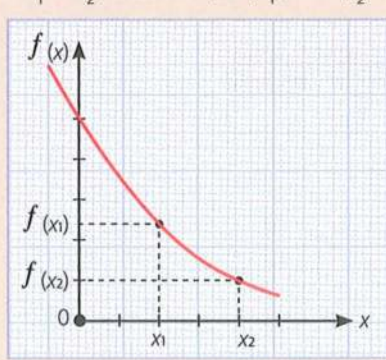
Una función es creciente en un intervalo si:

$x_1 < x_2$; entonces, $f(x_1) < f(x_2)$



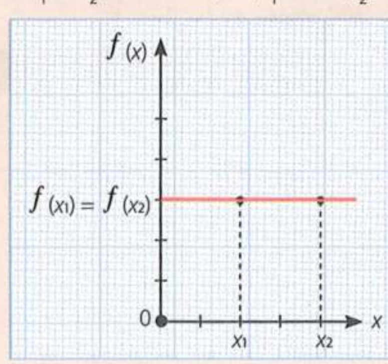
Una función es decreciente en un intervalo si:

$x_1 < x_2$; entonces, $f(x_1) > f(x_2)$



Una función es constante en un intervalo, para todo valor:

$x_1 < x_2$; entonces, $f(x_1) = f(x_2)$

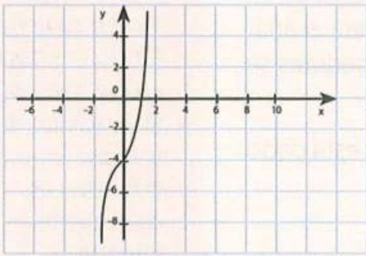


Taller **Evaluación formativa**

I.M.4.3.3.

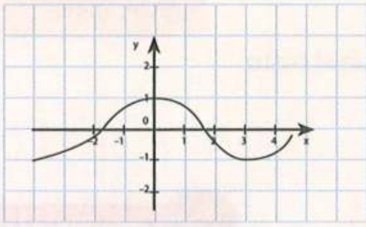
1. **Determina** el dominio y recorrido de las siguientes funciones. **Escribe** si son funciones reales.

a)



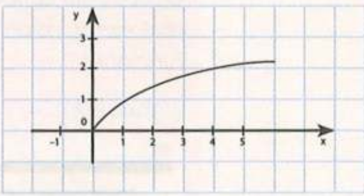
Dom $f(x)$: Rec $f(x)$:

b)



Dom $f(x)$: Rec $f(x)$:

c)



Dom $f(x)$: Rec $f(x)$:

2. **Determina** si es una función, dada la tabla de valores. **Escribe** el dominio y recorrido. **Grafica** la función.

a) $f(x) = -8x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)		En tu cuaderno					

Dom $f(x)$: Rec $f(x)$:

b) $g(x) = 4x^2 + 3x - 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
g(x)		En tu cuaderno					

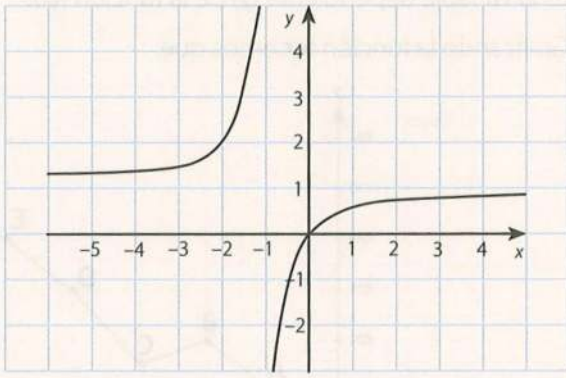
Dom $f(x)$: Rec $f(x)$:

3. Para cada función **elabora** una tabla de valores, **analiza** su gráfica y **determina** los intervalos de monotonía, creciente y decreciente.

$$y = f(x) = \frac{x}{x+1};\ x \neq -1$$

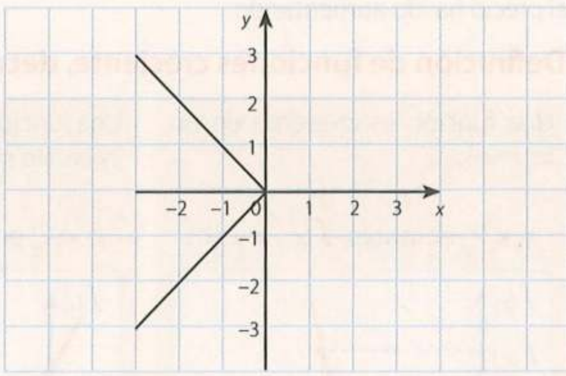
x	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	En tu cuaderno			No	

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ En tu cuaderno			

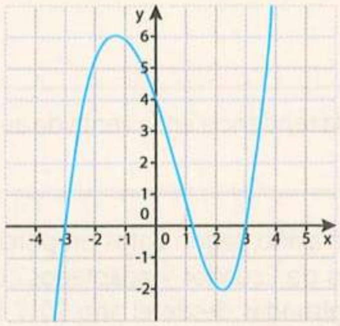


Creciente: Decreciente:

4. **Determina** si el gráfico corresponde a una función. **Justifica** en tu cuaderno tu respuesta.

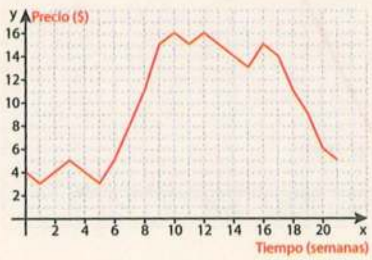


5. **Escribe**, en tu cuaderno, los intervalos donde las funciones son crecientes o decrecientes.

a) 

Creciente en los intervalos:

Decreciente en los intervalos:

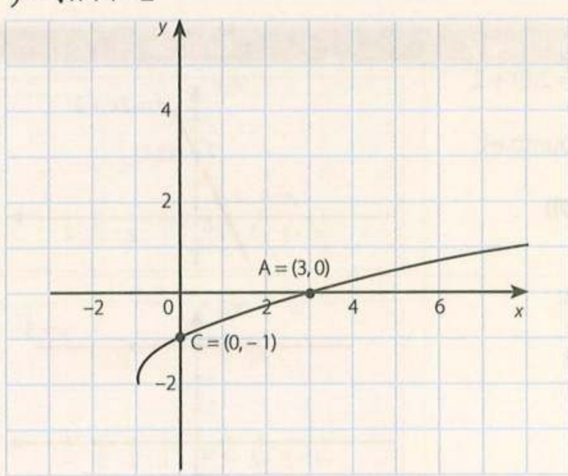
b) 

Creciente en los intervalos:

Decreciente en los intervalos:

6. **Identifica** y **escribe** las características de las siguientes funciones (dominio, recorrido, monotonía y cortes con los ejes coordenados).

$y = \sqrt{x+1} - 2$



$D_f =$

$Rec_f =$

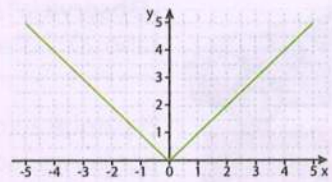
Monotonía:

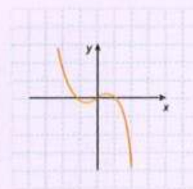
Cortes con los ejes coordenados:

Trabajo colaborativo

7. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

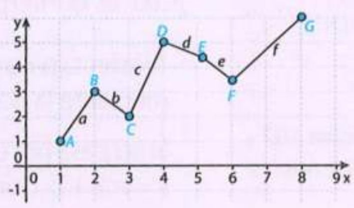
Determinen el dominio y recorrido de cada función y los intervalos donde es creciente o decreciente.

a) 

b) 

Archivo editorial.

8. **Analicen** y **resuelvan**. Las ventas mensuales de una compañía están representadas por la siguiente gráfica:



a) **Determinen** el dominio y recorrido de la función que determina las ventas.

b) **Escriban** los intervalos en los cuales las ventas se han incrementado.

c) **Escriban** los intervalos en los cuales las ventas han disminuido.

Actividad indagatoria

9. **Indaga** cuándo una función no es real. **Escribe** dos ejemplos.

10. **Investiga** si la gráfica de una recta paralela al eje de las ordenadas es una función.

10. **Indaga** de cuántas formas se puede representar a una función.

Tema 4 Función lineal y función afín

Shutterstock, 333821564

Ventas anuales de vehículos en Ecuador	
Años	**Unidades vendidas**
2017	91 778
2018	112 684
2019	92 764
2020	132 172
2021	139 893

Datos adaptados de: http://www.aeade.net

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace:

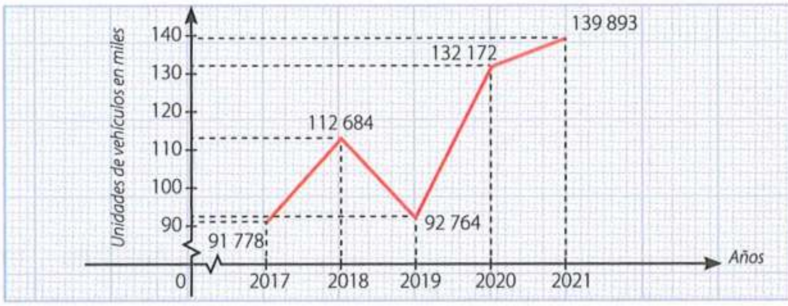
lynk.ec/10m11

Imprime la página 182 y **resuelve** funciones lineales.

Saberes previos

Observa la tabla inferior y **deduce**: ¿cuál es la tendencia en la venta de autos del año 2017 al año 2021?

El parque automotriz en el Ecuador crece año a año, según datos proporcionados por la Asociación de Empresas Automotrices de Ecuador y adaptados con fines educativos. Las siguientes son las ventas registradas desde el año 2017 hasta el año 2021.

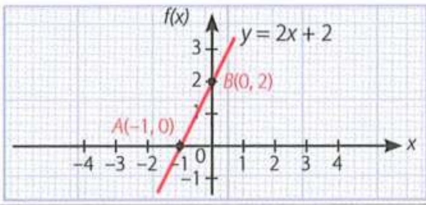
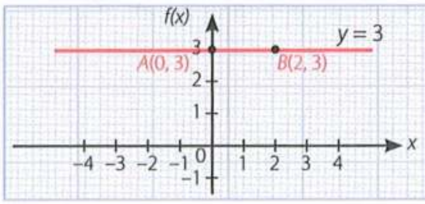
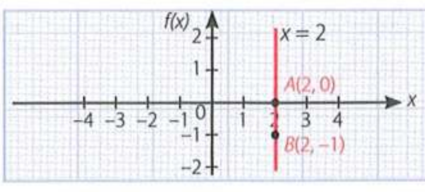


¿Cuál es la interpretación global de esta función?

Si la recta pasa por el origen de coordenadas, es una **función lineal**, se representa mediante la ecuación $y = mx$, su pendiente, m, es la ordenada de $x = 1$.

Si no pasa por el origen, es una **función afín**, se representa mediante la ecuación $y = mx + b$, donde b es la ordenada de $x = 0$ y m es la pendiente de la recta.

Para graficar una recta, basta conocer dos puntos por donde pasa la recta. Así:

Modelo	Corte con el eje x	Corte con el eje y	Gráfica
La ecuación de una recta no vertical es: $f(x) = ax + b$ Ejemplo: $y = 2x + 2$	Si $y = 0 \rightarrow 0 = 2x + 2$; $x = -1$ El primer punto es: $A(-1, 0)$ $f(x) = 0; A(x, 0)$	Si $x = 0 \rightarrow y = 2(0) + 2$ $y = 2$ El segundo punto es: $B(0, 2)$ $x = 0; B(0, f(0))$	
Si en la función $f(x) = ax + b$, $a = 0$, la recta es horizontal y de ecuación: $f(x) = b$ Ejemplo: $y = 3$	Si $y = 0$ No hay corte con el eje x.	Si $x = 0$, $y = 3$; Punto $A(0, 3)$ Si $x = 2$, $y = 3$ Punto $B(2, 3)$	
La ecuación de la recta vertical es: $x = c$ Ejemplo: $x = 2$	Si $y = 0$, $x = 2$ Punto $A(2, 0)$ Si $y = -1$, $x = 2$ Punto $B(2, -1)$	Si $x = 0$ No hay corte con el eje y.	

M.4.1.50. Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.

Pendiente de la recta

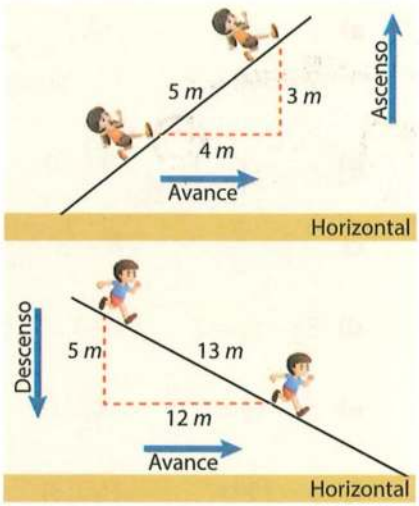
La pendiente es la razón de cambio entre el desplazamiento vertical y horizontal.

$$\text{Pendiente } m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

Por ejemplo, si una persona sube por superficie inclinada de pendiente ¾, significa que asciende 3 *m* y se desplaza 4 *m* hacia la derecha. Según el teorema de Pitágoras, se desplazó 5 *m* sobre la trayectoria inclinada.

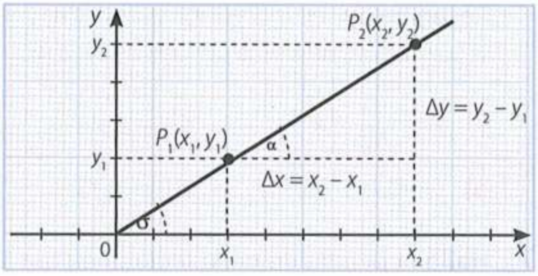
Ahora supongamos que una persona baja por una superficie inclinada de pendiente –5/12. Esto significa que desciende 5 *m* y se mueve 12 *m* hacia la derecha, es decir, recorrió 13 *m* sobre la trayectoria inclinada.

La pendiente m es la inclinación de la recta con respecto al eje de las abscisas. La pendiente m de la recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas en sentido positivo.



Archivo editorial

Cálculo de la pendiente



$$m = \text{tg}(\alpha)$$

$$m = \text{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Competencia matemática

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.

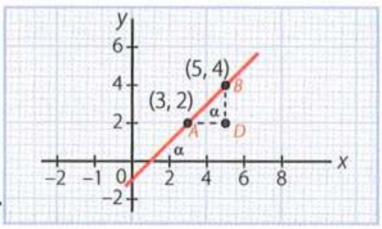
$m = tan\,(\alpha)$

La tangente de un ángulo es igual al cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Responde: ¿cuál es la función inversa de la tangente?

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(3, 2) y B(5, 4).

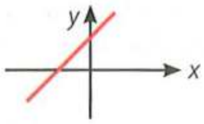
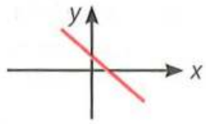
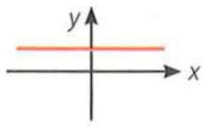
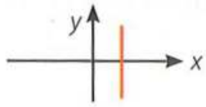


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$m = arctan\,(1) = 45°$

La pendiente de la recta es 1 y corresponde a un ángulo de inclinación con el eje *x* de 45°.

Interpretación geométrica de la pendiente de la recta

Pendiente positiva	Pendiente negativa	Pendiente nula	Pendiente no definida
$y = ax + b$  Si la recta es creciente, la pendiente es positiva y se inclina a la derecha. $m = a, m > 0$	$y = -ax + b$  Si la recta es decreciente, la pendiente es negativa y se inclina a la izquierda. $m = -a, m < 0$	$y = b$  Si la recta es constante, la pendiente es nula y es paralela al eje *x*. $m = 0$	 Si la recta es perpendicular al eje *x*, la pendiente no está definida o es infinita. Forma un ángulo de 90º con el eje *x*. *m* no está definida.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.4.

1. Verifica si cada punto pertenece a la recta. **Observa** el ejemplo:

a) $y = 3x - 5$ $\quad P(4, 7)$

$7 = 3(4) - 5;\ 7 = 7$ Sí pertenece a la recta.

b) $y = -2x + 4$ $\quad A(\frac{1}{2}; 3)$

c) $\frac{1}{2}y = \frac{3}{2}x$ $\quad B(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{4})$

d) $3x + 5y = 2$ $\quad C(-1{,}5; 1{,}3)$

e) $5x - 9y = 0$ $\quad D(\frac{9}{5}; 1)$

f) $y = \sqrt[3]{27x}$ $\quad E(\sqrt{2}; 3)$

2. Determina los cortes vertical y horizontal de las rectas.

a) $y = 9x + 3$

b) $3x + y = 6$

c) $y = \frac{1}{2}x + 5$

d) $x = 2^3$

e) $y = \sqrt{25}$

3. Obtén dos puntos y **representa** las siguientes rectas; para ello, puedes emplear un programa que grafique, como Geogebra.

a) $y = 4x - 8$

b) $5x + 2y = 20$

c) $y = \frac{5}{2}x$

d) $x = -\frac{7}{2}$

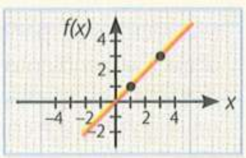
e) $x = \frac{1}{2}y + 6$

f) $4x - y = 8$

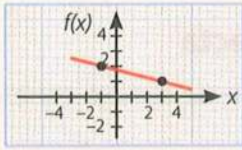
g) $2x = y + 2$

4. Determina la pendiente de las rectas mediante desplazamientos verticales y horizontales.

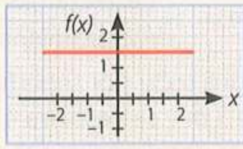
a)



b)



c)



5. Trabaja en tu cuaderno.

a) **Dibuja** un plano cartesiano y **localiza** los puntos $A(-3, -2)$ y $B(1, 5)$.

b) **Dibuja** la recta que une los dos puntos.

c) **Determina** la pendiente de la recta.

6. Encuentra la pendiente de las siguientes rectas. **Recuerda** que en la ecuación $y = ax + b$ o $y = mx + b$, el coeficiente de x es la pendiente de la recta.

a) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

b) $y = 0{,}7x - 0{,}25$

c) $3x + y = 5$

d) $y = 2/5$

7. Halla la pendiente de la recta que pasa por dos puntos.

a) $(3, -7); (-4, 6)$

b) $(-2, 6); (9, 6)$

c) $(4, 5); (-1, -5)$

d) $(a, 0); (0, -b)$

e) $(4, 2); (0, -5)$

f) $(m, 0); (0, n)$

8. Determina la respuesta correcta.

a) La recta $y = 0{,}4x$ se inclina a la derecha porque:

i) corresponde a una función afín.

ii) su pendiente es positiva.

iii) porque es monótona decreciente.

b) Cuando la recta correspondiente a una función lineal es perpendicular al eje "x", entonces:

i) su pendiente es $m = 1$ y la función es creciente.

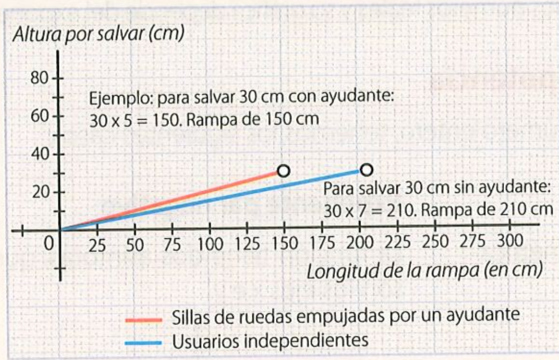
ii) su pendiente no está definida.

iii) su pendiente es negativa y la función es decreciente.

9. Observa e **interpreta** la siguiente tabla para la selección de una rampa de acceso.

En la construcción de rampas siempre se debe seleccionar la rampa más larga posible: cuánto más larga sea la rampa, menor será la pendiente por superar.

Para usuarios independientes en sillas de rueda, se recomienda se recomienda una pendiente máxima de 1:7 para sillas de ruedas manuales empujadas por ayudantes y para sillas eléctricas, una máxima de 1:5.



Fuente: http://www.mundorampas.com/calcular-rampas.html

a) Para salvar una altura de 40 cm con ayudante, ¿qué longitud debe tener la rampa?

b) Para salvar una altura de 40 cm sin ayudante, ¿qué longitud debe tener la rampa?

c) Para salvar una altura de 20 cm con ayudante, ¿qué ángulo de inclinación debe tener la rampa?

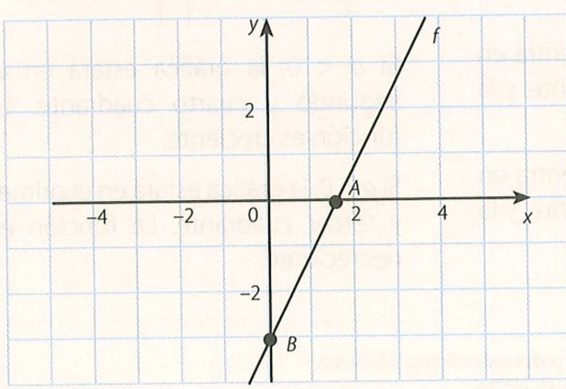
d) Para salvar una altura de 10 cm sin ayudante, ¿qué ángulo de inclinación debe tener la rampa?

10. Escribe la pendiente de las siguientes rectas. **Describe** su monotonía, **calcula** las coordenadas de los puntos en que corta a los ejes coordenados y **represéntala** gráficamente con ayuda de las TIC.

$y = 2x - 3$

Pendiente: Monotonía:

Puntos de corte con los ejes:



11. Analiza y **escribe** verdadero (V) o falso (F).

a) Toda recta con pendiente positiva se inclina para la izquierda.

b) La recta con $m = 0$ es paralela al eje x.

c) La pendiente de una recta determina el ángulo de inclinación de la recta con el eje de las ordenadas.

12. Utiliza el concepto de pendiente para determinar si los puntos dados son colineales, es decir, si pertenecen a la misma recta (la pendiente debe ser igual).

a) (1, –1); (2,5; 0,5); (4, 2) b) (–2, 7); (–3, 9); (1, –2)

Trabajo colaborativo

13. Trabajen en equipo y **resuelvan.**

Determinen el ángulo de inclinación de las rampas de acceso con la siguiente información:

Al construir edificaciones se deben tener en cuenta los siguientes porcentajes de pendientes para construir rampas.

a) En edificios públicos, máximo 6 %. Ángulo de inclinación.

b) Para personas con discapacidad sin personal de asistencia, hasta 10 %. Ángulo de inclinación.

c) Usuarios de sillas con personal de asistencia, hasta 20 %. Ángulo de inclinación.

Actividad indagatoria

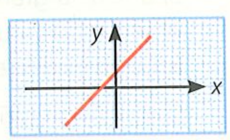
14. Traza las siguientes rectas; **emplea** un programa informático o las TICs.

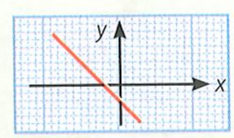
a) $y = -4x + 12$ c) $y = 6x$

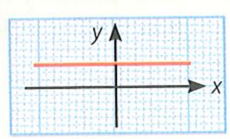
b) $4x - 8y = 2$ d) $4x = 6$

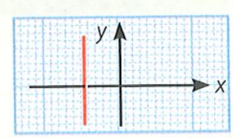
15. Identifica las rectas que tienen:

- Pendiente positiva
- Pendiente nula
- Pendiente negativa
- Pendiente no definida

a)


c)


b)


d)


Tema 5 Función potencia

Interculturalidad

La matemática es fundamental e importante para la gente que vive en el campo, ya que la utilizan para medir sus terrenos, dividirlos en parcelas para sus plantaciones, así como para saber la cantidad de semillas que necesitan para cultivar sus terrenos.

Interdisciplinariedad

Matemática y Óptica

La ilusión óptica que se produce al observar un objeto sumergido en el agua, hace que se vea como si estuviera quebrado. Esto se debe a que los rayos de luz que van del objeto al ojo sufren un cambio de dirección cuando atraviesan la frontera agua - aire.

La representación del objeto se asemeja a la gráfica de una función por partes, ya que se pueden apreciar dos partes.

Shutterstock, 94788

Saberes previos

Infiere. ¿Cómo se localiza un par ordenado en el plano cartesiano?

Las funciones potencia son aquellas que tienen la forma $f(x) = ax^n$, donde: a y n son números reales distintos de 0 y n es distinto de 1.

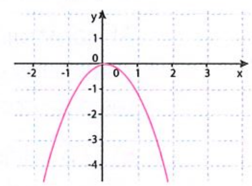
Esta función está definida para los números reales y su gráfica depende del exponente.

Gráfica de una función potencia

Cuando el exponente es un número entero, tenemos los siguientes casos:

Exponente par positivo

Su gráfica es una curva simétrica respecto al eje y.



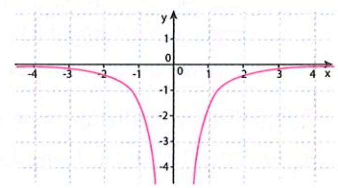
Archivo editorial.

Si $a < 0$, la curva estará abierta hacia abajo.

Si $a > 0$, la curva estará abierta hacia arriba.

Exponente par negativo

La función tiene dos asíntotas, que son los ejes x e y.



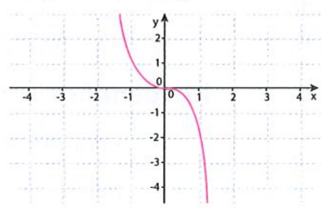
Archivo editorial.

Si $a < 0$, las curvas irán hacia abajo, y estarán en el tercer y cuarto cuadrante.

Si $a > 0$, las curvas irán hacia arriba, y la gráfica estará en el primer y segundo cuadrante.

Exponente impar positivo

La gráfica es una curva simétrica con respecto al origen.



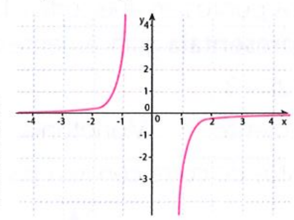
Archivo editorial.

Si $a < 0$, la gráfica se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante, y la función es decreciente.

Si $a > 0$, la gráfica se encuentra en en el primer y tercer cuadrante, y la función es creciente.

Exponente impar negativo

La función tiene dos asíntotas que son los ejes x e y.



Archivo editorial.

Si $a < 0$, la gráfica estará en el segundo y cuarto cuadrante. La función es creciente.

Si $a > 0$, la gráfica estará en el primer y tercer cuadrante. La función es decreciente.

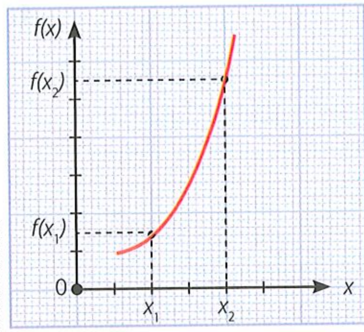
M.4.1.51. Definir y reconocer funciones potencia con n = 1, 2, 3, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.
M.4.1.52. Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas.

Monotonía

Funciones crecientes y decrecientes

En páginas anteriores vimos que una función es creciente en un intervalo si:

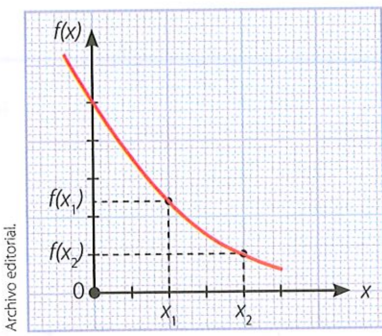
$x_1 < x_2$. Entonces $f(x_1) < f(x_2)$.



Archivo editorial.

Si la función es decreciente en un intervalo si:

$x_1 < x_2$. Entonces $f(x_1) > f(x_2)$.



Archivo editorial.

Modelos matemáticos

Cuando un jugador de baloncesto salta para encestar, la altura del jugador $f(t)$ en pies desde el piso después de t segundos está dada por la fórmula:

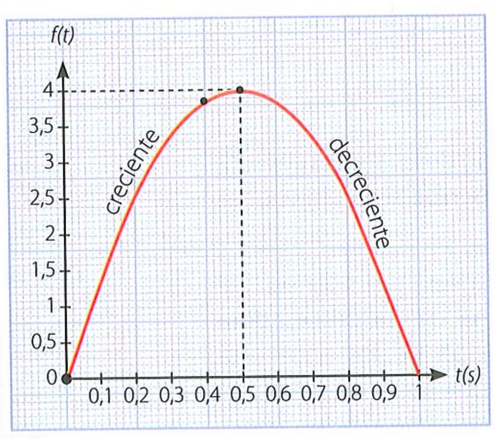
$$f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t,$$

donde g es la constante gravitacional y equivale a 32 pies/s^2. ¿En qué intervalo de tiempo el jugador se eleva para encestar?, ¿en qué intervalo de tiempo el jugador baja luego de encestar?

Realicemos la gráfica de la función $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$.

Como $g = 32$ pies/s^2: $f(t) = -16t^2 + 16t$

t	$f(t)$
0	0
0,2	2,56
0,4	3,84
0,5	4
0,6	3,84
0,8	2,56
1	0

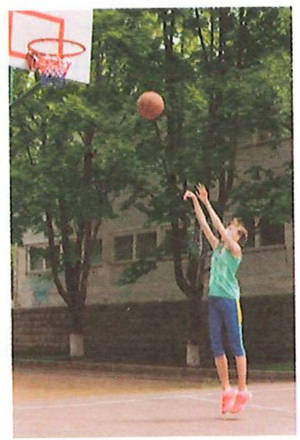


Archivo editorial.

El jugador se eleva para encestar entre [0 ; 0,5] segundos y desciende en un intervalo de tiempo comprendido entre [0,5 ; 1] segundos.

DFA

El hecho de que haya una discapacidad auditiva no significa que el tono de voz con el que se habla debe ser exagerado o excesivo. Basta con que haya claridad al momento de comunicarse.

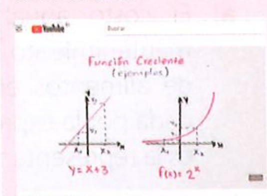

Shutterstock, 195961748

Juego de baloncesto

Competencia digital

El comportamiento de una función está determinado por el crecimiento o decrecimiento.

Ingresa a: *lynk.ec/10m12* e **indaga:** ¿cuándo una función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente?



Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.4.

1. Dadas las funciones, **determina** el dominio, **completa** en tu cuaderno la tabla de valores, **grafica** con el empleo de las TICs y **establece** el recorrido.

   a) $f(x) = -5x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

En tu cuaderno

   b) $f(x) = x^2 - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

En tu cuaderno

   c) $h(x) = x^3 - 5x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

En tu cuaderno

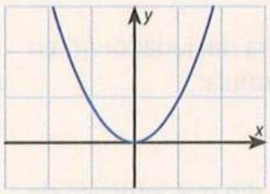
   d) $g(x) = x^{-2} + 4$

x	-2	-1	1	2
$g(x)$				

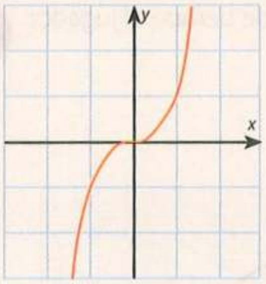
En tu cuaderno

2. **Selecciona** la función de esta gráfica.

   a)
   i) $f(x) = x^3$
   ii) $f(x) = -x^3$
   iii) $f(x) = x^2$



   b)
   i) $f(x) = x^3$
   ii) $f(x) = -x^3$
   iii) $f(x) = x^2$

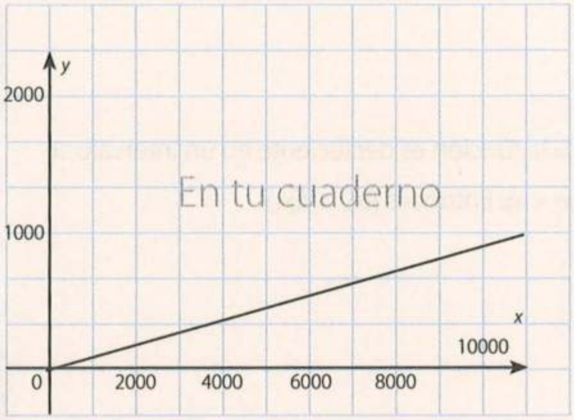


3. **Halla** el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Luego, **grafica** y **escribe** si son funciones potencia.

   a) El costo anual en miles de dólares del mantenimiento de una planta procesadora de alimentos en función de los años está dada por la expresión: $f(x) = x^2 - 4x + 4$. ¿Cuál es la representación gráfica de esta función?

   b) Según los expertos, una hectárea de trigo en condiciones óptimas produce aproximadamente 60 quintales de la gramínea. Si en diferentes sectores de una hacienda se siembran 15 ha, 30 ha, 45 ha y 60 ha de trigo, ¿cuál puede ser la producción en cada sector?

4. Una empresa de telefonía cobra 0,09 dólares por cada mensaje de texto (SMS). Anita tiene una empresa de marketing que opera con envíos masivo de SMS (hasta 10 000 SMS al mes). **Modela** algebraica y gráficamente sus costos de operación mensuales por envío de SMS.

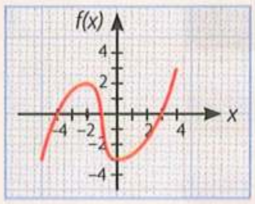


5. **Problema-decisión. Resuelve.** La receta de pan de Mariana incluye fundamentalmente harina de trigo, harina de maíz, sal y agua. Se conoce que para elaborar 6 panes se requiere 2 tazas de harina de trigo. **Construye** una función que describa la cantidad de harina de trigo necesaria para la elaboración de cualquier cantidad de panes.

   Si conoces que Mariana es una persona que padece de obesidad y debes ayudarla a tomar una decisión con respecto al consumo de pan. ¿Qué le sugieres? **Justifica.**

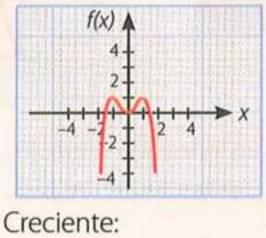
6. **Escribe** los intervalos donde las funciones son crecientes y decrecientes.

   a)

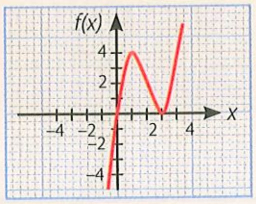


Creciente: Decreciente:

   b)



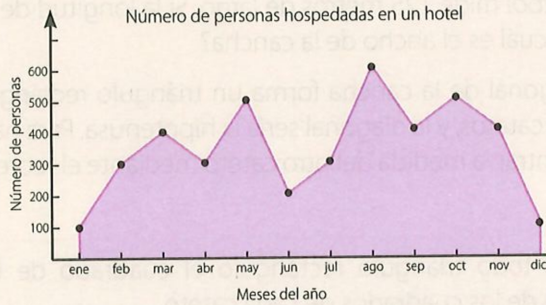
Creciente: Decreciente:

c) 

Creciente: Decreciente:

7. Resuelve.

La administradora de un hotel presenta la siguiente gráfica en el informe anual sobre el número de visitantes del hotel.

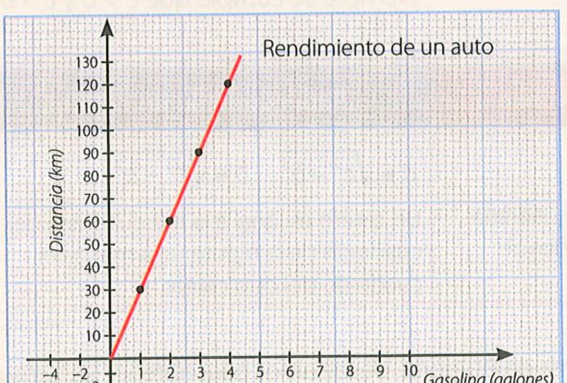


a) ¿Cuáles son las variables relacionadas en la gráfica?

b) ¿En qué meses del año la cantidad de huéspedes creció?

c) ¿En qué meses del año la cantidad de huéspedes decreció?

8. Observa la gráfica. Luego, **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.



a) La variable independiente es el número de galones de combustible.

b) La variable dependiente es la distancia recorrida en kilómetros.

c) La gráfica representa la relación entre la velocidad del auto y el número de galones de combustible.

d) La gráfica es estrictamente decreciente.

Trabajo colaborativo

9. Trabajen en equipo y **resuelvan**.

Tracen la gráfica correspondiente a la tabla de valores; para ello **empleen** las TIC. **Escriban** si $f(x)$ son funciones potencia.

a)

x	0,2	0,4	0,8	1	1,6	2	4	5	8
$f(x)$	10	5	2,5	2	1,25	1	0,5	0,4	0,25

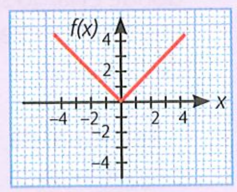
b)

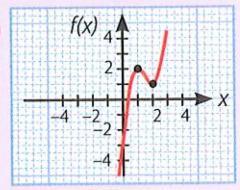
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3

c)

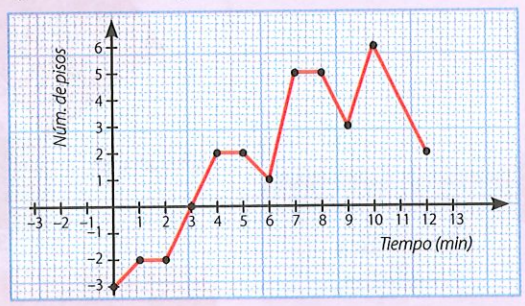
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

10. Determinen los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

a) 

b) 

11. Cuando subimos a un ascensor, observamos intervalos en que sube, otros en que permanece sin movimiento y otros en que baja. Esta es la representación gráfica de un ascensor:



a) **Realicen** una descripción del movimiento del ascensor.

b) **Determinen** el dominio y el recorrido del movimiento del ascensor.

c) **Escriban** los intervalos en los cuales el ascensor sube.

Actividad indagatoria

12. Indaga y **resuelve**.

¿Una función de la forma $f(x) = ax$ también es una función potencia?

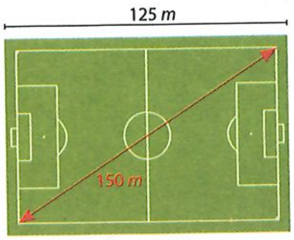
¿Por qué?

13. Indaga dos tipos de funciones potencias y **grafica** en Geogebra.

Tema 6 Teorema de Pitágoras

Saberes previos

Recuerda. ¿Qué es un triángulo rectángulo?



Shutterstock, 440510800

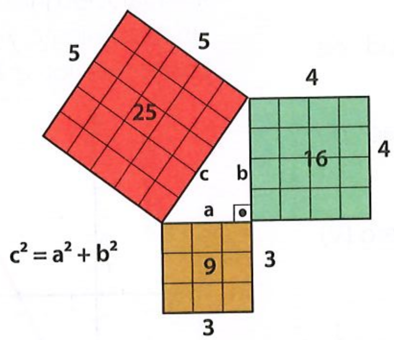
Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto y dos agudos. Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado más grande del triángulo es la hipotenusa.

En un colegio, la cancha de fútbol mide 125 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros, ¿cuál es el ancho de la cancha?

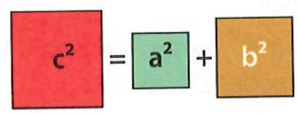
Podemos observar que la diagonal de la cancha forma un triángulo rectángulo, donde el largo sería uno de los catetos, y la diagonal sería la hipotenusa. Para hallar el ancho, tendremos que encontrar la medida del otro cateto mediante el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de cada cateto.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Archivo editorial.



a y b son catetos,

c es la hipotenusa.

Siempre se cumple que $c > a$ y $c > b$.

Para encontrar la hipotenusa	Para encontrar los catetos
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ La hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los catetos elevados al cuadrado.	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ Un cateto es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

Archivo editorial.

A partir de la fórmula del teorema de Pitágoras, despejamos para obtener las fórmulas.

Para resolver el problema planteado al inicio, es necesario identificar lo que deseamos hallar, en este caso, un cateto. Por lo tanto, la fórmula que se aplica es:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{150^2 - 125^2} \qquad a = \sqrt{6\,875} \qquad a = 82{,}91\ m$$

Solución:

El ancho de la cancha de fútbol es 82,91 metros.

Interdisciplinariedad

Matemática y Medicina

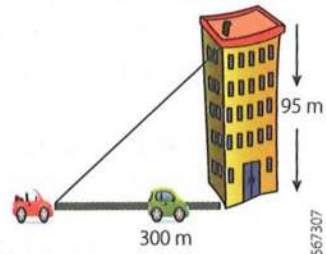
Si queremos determinar la distancia de un pico que mide la frecuencia cardíaca un uso sencillo del teorema de Pitágoras nos puede ser de mucha utilidad.

Responde: ¿qué nombre recibe en un triángulo rectángulo el lado que se opone al ángulo recto?

M.4.2.14. Demostrar el teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares.
M.4.2.15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.

Ejemplos

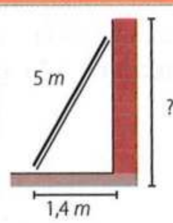
a) Un edificio mide 95 metros de altura. Si un automóvil se encuentra a 300 metros de la base del edificio, ¿cuál es la distancia del automóvil, medida desde lo alto del edificio?



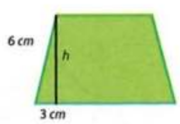
Shutterstock, 72567307

Datos	Operación	Respuesta
Hipotenusa: ? Cateto *a*: 95 *m* Cateto *b*: 300 *m*	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{95^2+300^2}$ $c=314{,}68\ m$	La distancia desde lo alto del edificio al automóvil es 314,68 *m*.

b) Una escalera de 5 *m* de longitud es apoyada sobre una pared. Si la distancia entre la base de la pared a la escalera es 1,4 *m*, ¿cuál es la altura de la pared?

Datos	Gráfico	Operación	Respuesta
Hipotenusa: 5 *m* Cateto *a*: ? Cateto *b*: 1,4 *m*	 Archivo editorial.	$a=\sqrt{c^2-b^2}$ $a=\sqrt{5^2-1{,}4^2}$ $a=4{,}8\ m$	La altura de la pared es 4,8 metros.

c) Encontrar el valor del dato desconocido.

Datos	Gráfico	Operación	Respuesta
Hipotenusa: 6 *cm* Cateto *h*: ? Cateto *b*: 3 *cm*		$h=\sqrt{c^2-b^2}$ $h=\sqrt{6^2-3^2}$ $h=5{,}19cm$	La altura de la figura es 5,19 *cm*.

Archivo editorial.

d) Encuentra el área de la región no sombreada.

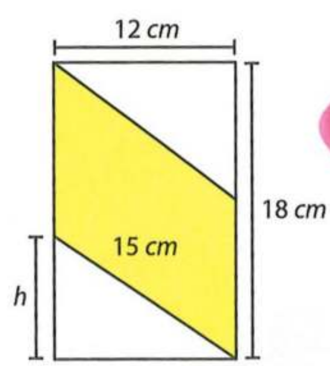
Observamos que la parte que no está coloreada está conformada por triángulos rectángulos congruentes. Hallemos el cateto faltante.

$h=\sqrt{c^2-a^2}$; $h=\sqrt{15^2-12^2}$; $h=9$

El área del triángulo sería:

$A=(b\times h)/2; A=(12\times 9)/2; A=108/2=54\ cm^2$

Multiplicando por 2, tenemos: $A=54\times 2=108\ cm^2$



Solución

El área de la región no sombreada es 108 cm^2

Interdisciplinariedad

Matemática e Historia

El teorema de Pitágoras tiene ese nombre porque su demostración fue un esfuerzo de la escuela pitagórica. Sin embargo, anteriormente, en Mesopotamia y en el antiguo Egipto, se conoció que la pirámide de Kefrén se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3-4-5, utilizando el teorema de Pitágoras.


Pirámide de Kefrén

Shutterstock, 22240639

Competencia digital

Ingresa al siguiente recurso web: *lynk.ec/10m13*

Imprime los ejercicios y **practica** sobre el Teorema de Pitágoras.

Taller

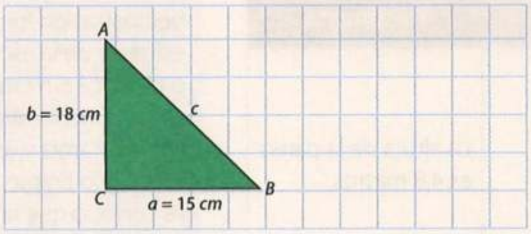
Evaluación formativa

I.M.4.6.1.

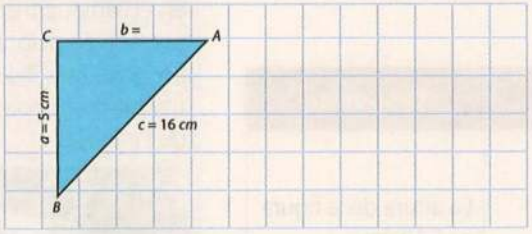
1. **Analiza** cada proposición y **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
   a) Todo triángulo tiene un ángulo recto.
   b) El teorema de Pitágoras es aplicable solo en triángulos rectángulos.
   c) Un triángulo de lados $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ es un triángulo rectángulo.
   d) El cuadrado de la hipotenusa es igual a la diferencia de los cuadrados de los catetos.

2. **Encuentra** el lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

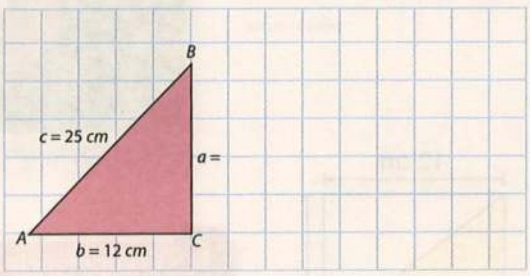
   a)



   b)

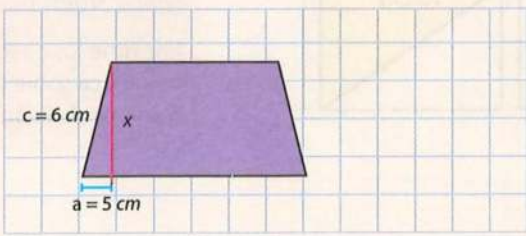


   c)

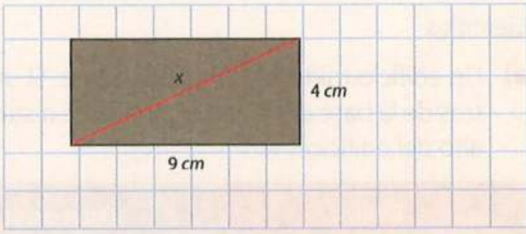


3. **Calcula** el valor de x.

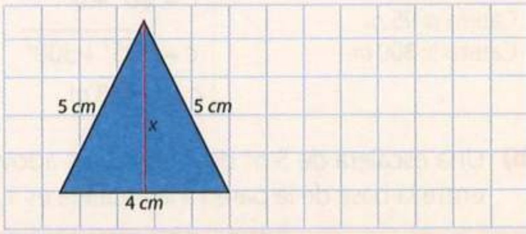
   a)



   b)

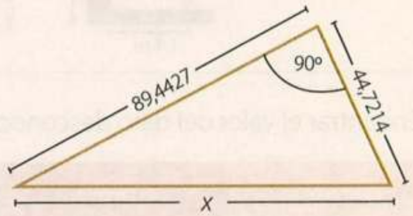


   c)

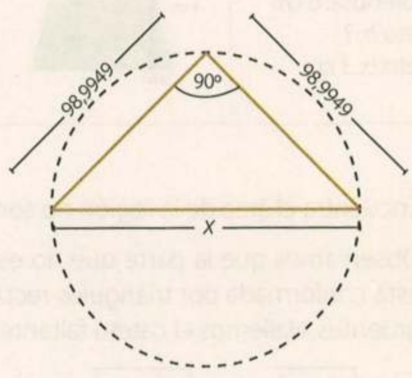


4. **Identifica** si x corresponde a un cateto o a la hipotenusa de cada triángulo rectángulo mostrado. **Determina** la longitud aproximada del lado x.

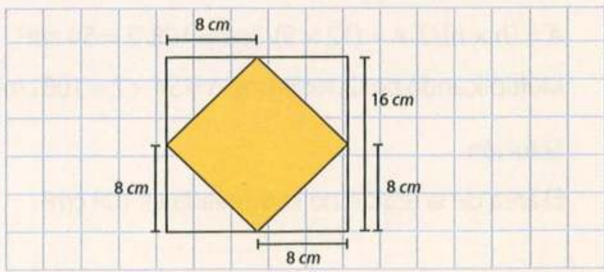
   a)



   b)



5. **Encuentra** el área de la región sombreada.



6. **Resuelve** el siguiente problema.

Una escalera de 10 m de longitud es apoyada en el frente de un edificio, ubicando su pie a metro y medio del edificio.

a) ¿Qué altura alcanzará la escalera?

b) Si la escalera se colocase formando un ángulo de 45º con el suelo, ¿qué altura alcanzaría?

c) **Escribe** una fórmula para determinar la altura alcanzada en función de la separación del pie de la escalera con respecto al edificio.

7. **Resuelve** los siguientes problemas.

a) Un grupo de ingenieros desean conocer la altura de una montaña. Para esto utilizan una cinta de 200 metros que colocan desde la cima de la montaña y la extienden totalmente hasta que toca el suelo a 60 metros del punto A, ubicado justamente debajo de la cima. ¿Cuál es la altura de la montaña?

b) El tamaño de las pantallas de televisión viene dado por la longitud en pulgadas de la diagonal de la pantalla. Si un televisor mide 40 pulgadas y tiene 95 *cm* de base, ¿cuál será su altura?

Recuerda que una pulgada tiene 2,54 *cm*.

c) La altura de la Virgen del Panecillo es de 41 metros. Si la distancia desde la punta de la Virgen a una persona es de 100 metros, ¿a qué distancia está la persona de la base de la estatua?

d) Las diagonales de un rectángulo miden aproximadamente 139,28 cm. Se conoce que uno de sus lados mide 130 cm. ¿Qué longitud tienen sus lados?

e) Un poste de 11 m de altura será anclado con la ayuda de un cable desde su extremo superior hasta una base ubicada a 3 m de él. ¿Cuál es la longitud del cable de anclaje?

f) Un arquitecto debe construir una base cuadrada para un monumento en un espacio circular de radio r = 20 m.

Confecciona en tu cuaderno un gráfico que describa el problema.

Crea una función matemática que describa la longitud máxima del cuadrado a partir del radio del espacio circular.

g) Un niño pequeño vuela su cometa con la ayuda de un carrete de hilo de 160 m. Ya no le queda hilo en el carrete y quiere saber a qué altura se encuentra su cometa.

Su hermanito que está a 10 m de él; dice justo en ese instante: "tu cometa está muy alto, justo sobre mí".

Elabora en tu cuaderno un esquema que describa el problema.

Determina la altura a la que se encuentra el cometa.

Trabajo colaborativo

8. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

a) Un niño observa un pájaro a lo lejos a una distancia de 7 metros. Si el niño se encuentra a 5 metros de la sombra proyectada perpendicularmente del pájaro, ¿a qué altura se encuentra el pájaro del suelo?

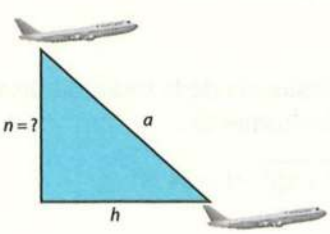
b) La altura de la torre Morisca ubicada en Guayaquil es de 23 metros. Si la distancia desde lo alto de la torre a una persona que está tomando una foto es 40 metros, ¿a qué distancia esta la persona de la base de la torre?

c) Un niño eleva una cometa. La longitud de la piola que ha soltado mide 35 metros y la distancia horizontal de los pies del niño al punto que está debajo de la cometa es de 10 metros. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

Actividad indagatoria

9. **Indaga** y **resuelve**.

Dos aviones salen del Aeropuerto Internacional José Joaquín de Olmedo. Uno se dirige hacia el norte y otro, hacia el este. Cuando se encuentran a 3 000 *km* uno del otro, uno de ellos ha recorrido 850 *km*. ¿Qué distancia ha recorrido el avión que se dirige hacia el norte?



Shutterstock, 466914947

Estrategia: aplicar el teorema de Pitágoras

Problema resuelto

El monumento a la Mitad del Mundo tiene una altura de 30 metros. Si la distancia desde la punta del monumento a una persona es 50 metros, y la distancia entre esa persona y otra ubicada más atrás es 5 metros, ¿cuál es la distancia desde la punta del monumento a la segunda persona?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la distancia desde la punta del monumento a la segunda persona?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

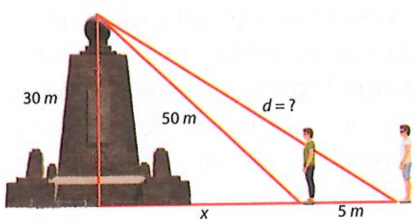
Aplicar el teorema de Pitágoras.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso 1

Graficar el problema.



Shutterstock, 568744459 / 637283017

Paso 2

Encontrar la distancia del monumento con la primera persona.

$x = \sqrt{50^2 - 30^2}$; x = 40 *m*. La distancia es de 40 *m*.

Paso 3

Encontrar la distancia de la segunda persona a la base del monumento.

$40 + 5 = 45$ *m*.

Paso 4

Hallar la distancia de la segunda persona hasta lo alto del monumento.

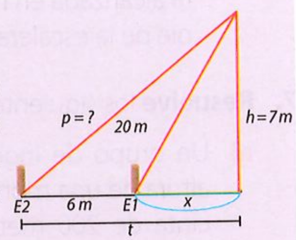
$d = \sqrt{45^2 + 30^2}$; d = 54 *m*.

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La distancia desde lo alto del monumento a la segunda persona es 54 *m*.

Problema resuelto



En el parque Metropolitano de Quito la altura promedio de los árboles es 7 metros. Si la distancia de la punta de un árbol a una estaca 1 es 20 metros, y la distancia de la estaca 1 a la estaca 2 es 6 metros, ¿cuál es la distancia desde la punta del árbol a la estaca 2?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la distancia desde la punta del árbol a la estaca 2?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Aplicar el terorema de Pitágoras.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso1

Graficar el problema.

Paso2

Resolvemos aplicando el teorema de Pitágoras.

Calculamos el valor de x.

$x = \sqrt{20^2 - 7^2}$; $x = 18{,}7m$

Encontramos la distancia t

T = 6 + 18,7 = 24,7 m

Calculamos el valor de p, la distancia buscada.

$p = \sqrt{7^2 + (24{,}7)^2}$; p = 25,7*m*

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La distancia es 25,70 *m*.

Problemas propuestos

1. En un terreno rectangular se ha construido un camino que lo cruza en diagonal. Si las dimensiones del terreno son 3 hm y 1,5 hm, ¿qué longitud tiene el camino?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

2. **Obtén** la fórmula que exprese el valor de la altura h de un triángulo equilátero, en función del valor de su lado a.

Calcula la altura de un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

3. Un tapete tiene forma de triángulo isósceles. El lado desigual mide 30 cm y la altura correspondiente, 24 cm. Se quiere poner en el contorno una cinta que se vende a razón de 0,05 USD el centímetro. ¿Cuánto costará el contorno del tapete?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

4. ¿Cuál es la altura de una torre que proyecta una sombra de 16 m, si la distancia desde el punto más alto de la torre al extremo de la sombra es de 20 m?

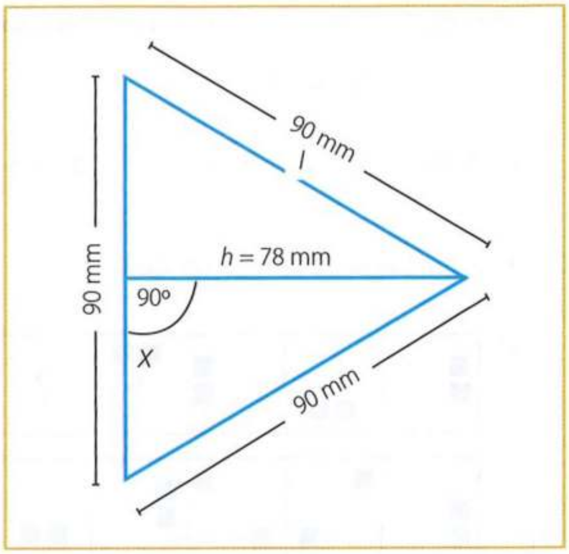
a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

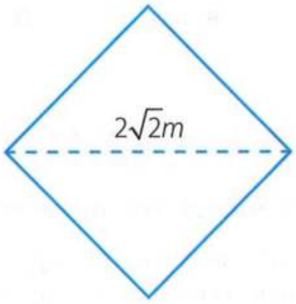
5. El triángulo mostrado es equilátero.



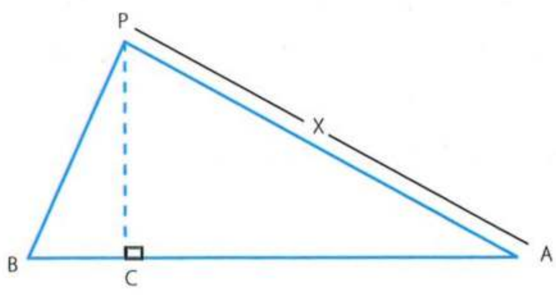
Si se conoce que una de sus alturas mide aproximadamente 78 mm. ¿Qué longitud tiene *x*?

6. Se desea colocar un cable desde lo alto de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de su base. ¿Cuál es la longitud del cable?

Calcula el área de una mesa cuadrada cuya diagonal mide $2\sqrt{2}m$.



En el triángulo PAB, halla la distancia PA, si PB = 10 cm; AB = 13 cm y BC = 4 cm.



Competencia matemática

Razonamiento numérico

1. Observa las siguientes secuencias y **selecciona** la respuesta que continúa cada secuencia.

a) 2A, 5C, 9D, 14F, 20G,

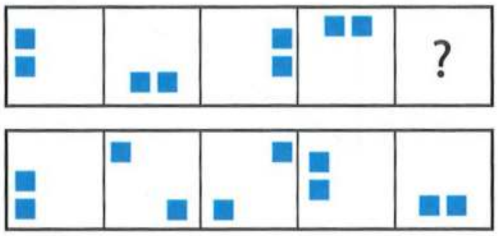
A) 27H B) 25I C) 27I D) 25H

b) 3, 9, 4, 16, 5, 25, 6,

A) 30 B) 36 C) 40 D) 32

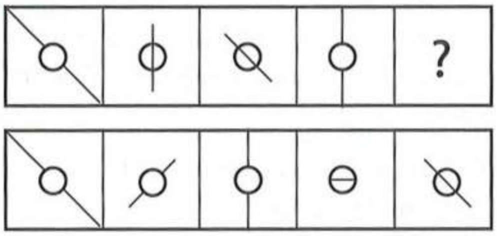
2. ¿Qué figura continúa la secuencia?

a)



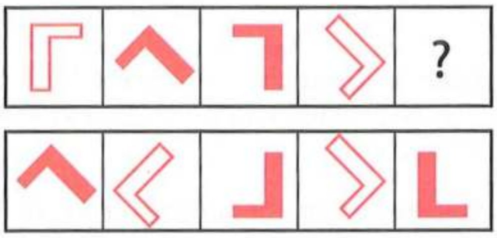
A B C D E

b)



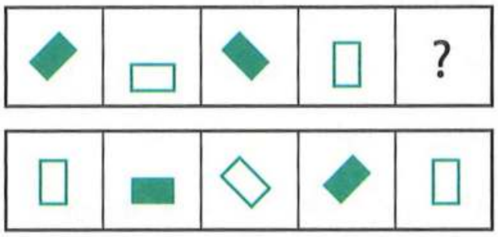
A B C D E

c)



A B C D E

d)



A B C D E

Cálculo mental

Calcular porcentajes terminados en 0

Para encontrar cualquier porcentaje, se halla el 10 % de la cantidad recorriendo una coma a la izquierda. Después se multiplica por el porcentaje que se deseaba sacar.

a) 40 % de 340 = 34 × 4 = 136

b) 60 % de 2 342 = 234,2 × 6 = 1 404,2

c) 30 % de 782 = 78,2 × 3 = 234,6

d) 70 % de 1 500 = 150 × 7 = 1 050

e) 10 % de 123 = 12,3 × 1 = 12,3

Ahora, hazlo tú.

a) 20 % de 50 =

b) 30 % de 4 225 =

c) 40 % de 67 =

d) 60 % de 236 =

e) 70 % de 525 =

Medidas de prevención de accidentes

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Ciencias Naturales

Justificación / problemática


Shutterstock, 88062910

En América Latina, contrario a lo que se cree, se da muy poco apoyo a la investigación científica y tecnológica. Mientras países como Estados Unidos de América y Canadá aportan con un 40 % de su presupuesto a la investigación, el aporte de los países de América Latina llega solo al 1,6 %. Según datos de la Secretaría Nacional de Ciencia y Tecnología, SENESCYT, el aporte del Gobierno del Ecuador para las investigaciones hasta el año pasado fue del 0,03 % del producto interno bruto (PIB), lo que coloca al Ecuador en una enorme desventaja competitiva frente al resto de países de Latinoamérica. Al no destinarse recursos a la investigación, los productos se vuelven más caros y de menor calidad, y esto trae consigo que sean productos menos competitivos y con ello, un aumento del desempleo y cierre de empresas y fábricas.

El resultado de esta falta de interés en las inversiones tecnológicas tiene como consecuencia que el Ecuador y la mayoría de los países de América Latina sean dependientes, y aunque la capacidad productiva del país sea grande, las exportaciones son totalmente limitadas, lo que no permite un desarrollo equilibrado de la competitividad.

Texto adaptado de: https://lahora.com.ec/noticia/1000241037/investigacic3b3n–cientc3adfica–tampoco–es–una–prioridad

Objetivo

Fomentar el hábito de la investigación en los adolescentes para afianzar técnicas que les permitan en un futuro ser científicos que desarrollen proyectos creativos, que contribuyan al crecimiento del país.

Recursos

- Tema de investigación
- Carteles
- Marcadores

Actividades

- **Formen** grupo de cuatro personas.
- **Elijan** un tema relacionado con física o química y **busquen** la relación entre dos variables que pueda ser modelada con una función.
- **Elaboren** material como carteles u organizadores para exponer lo que investigaron.
- **Expongan** su investigación a la clase.


Shutterstock, 106223549

Evaluación

1. ¿Qué es lo más importante que aprendiste con el desarrollo de este proyecto?
2. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿qué clase de función obtuvieron?
3. ¿Qué conclusión puedes obtener de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

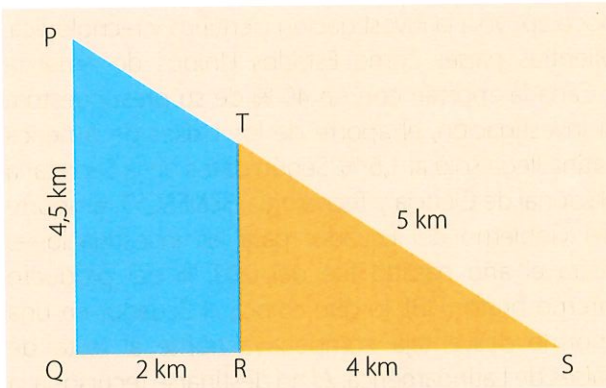
Tema: Midiendo distancias y alturas

Teorema de Pitágoras

Situación cotidiana

Para medir alturas de edificios, árboles, canastas de básquet, arcos, etc., y para calcular también distancias, es muy práctico utilizar el teorema de Pitágoras.

Juan va a realizar un viaje del pueblo Q al pueblo T. En el mapa de la figura, se ven diferentes trayectos que puede seguir. El camino TR está cerrado. Por lo tanto, le quedan dos opciones: primero ir QPT y la segundo ir QRST. Antes de iniciar el viaje, calcula sus dos opciones y escoge la de menor distancia. Indica el trayecto escogido y cuánto mide la distancia.

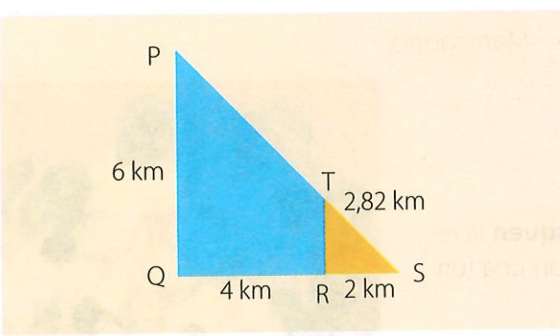


Reflexiona

- ¿Qué conocimiento debes tener para resolver este problema?

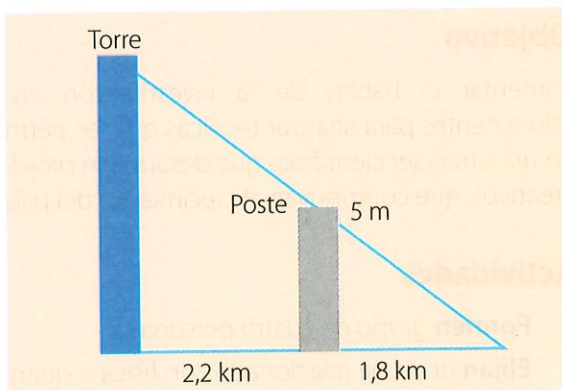
El trayecto más corto es QPT con 7 km.

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si en el mapa se presentan las siguientes distancias, ¿sigue siendo más corto el trayecto QPT?



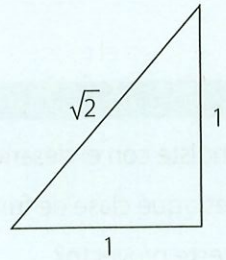
Resuelve la situación

- En la figura puedes observar una torre y un poste cuyas sombras, en un momento dado, se superponen. A partir de los datos de la figura, determina la altura de la torre.



Nota.

Con la aplicación del Teorema de Pitágoras se encontró la primera constante irracional.



$\sqrt{2}$

- Es la constante pitagórica.
- Es el primer número irracional calculado.

Tema: Ingresos

Funciones y gráficos

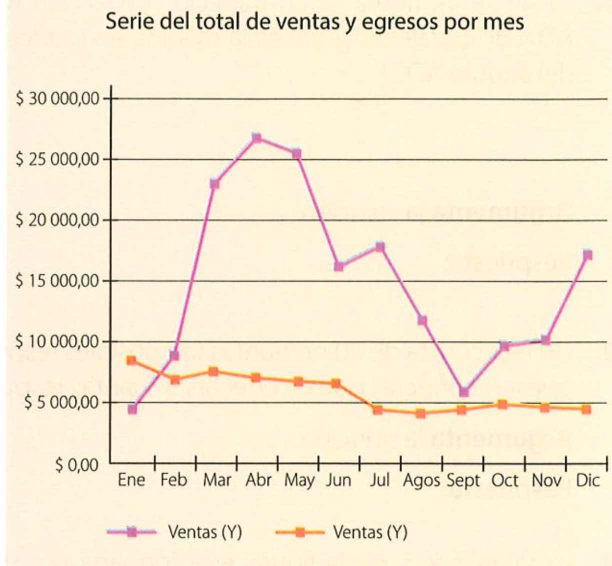
Situación cotidiana

Utilizamos las funciones y los gráficos para diferentes análisis de información, por ejemplo, para ingresos, temperaturas, calificaciones, etc.

En una empresa presentan este gráfico de ingresos y egresos:

- ¿Cuándo es el punto máximo de ingresos?
- ¿Cuándo es el punto máximo de egresos?
- ¿En qué punto las ventas y los egresos se igualan?

Punto máximo de ingresos es en abril.
Punto máximo de egresos es en enero.
Se igualan las ventas y egresos en septiembre.



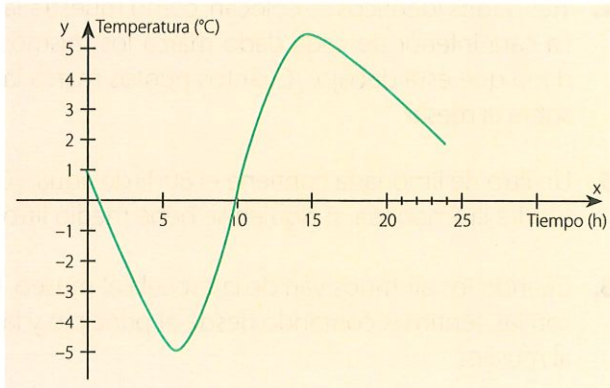
https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/2014/1/3927.pdf

Reflexiona

- ¿En qué otro tema de la vida cotidiana se utilizan cuadros estadísticos como el de la figura?
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- ¿Cuál es la diferencia aproximada entre las ventas y los egresos de julio y en diciembre?

Resuelve la situación

- Un estudio muestra la gráfica en que se representa la temperatura de una ciudad A, durante las 24 horas de un mismo día.
  - **a)** ¿En qué intervalos de tiempo aumentó la temperatura?
  - **b)** ¿En qué intervalos de tiempo disminuyó la temperatura?
  - **c)** ¿En qué momento la temperatura fue de 2 °C?
  - **d)** ¿En qué momento se alcanzó la temperatura máxima? ¿Cuál fue su valor?

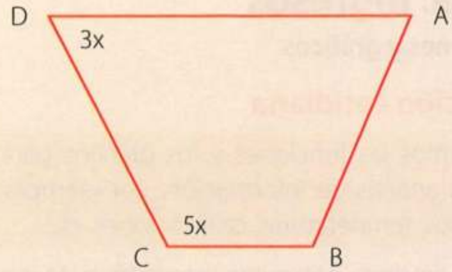


Indaga sobre lo siguiente:

- El Banco Central del Ecuador, cada año presenta el reporte sobre el sector petrolero, investiga en los últimos tres años, cuál fue el ingreso a la caja fiscal por concepto de petróleo, emplea las Tics para que elabores gráficas y presentes tu trabajo.

Olimpiadas matemáticas

1. La siguiente figura es un trapecio con los lados AD y BC paralelos. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo ADC?



Argumenta la solución:

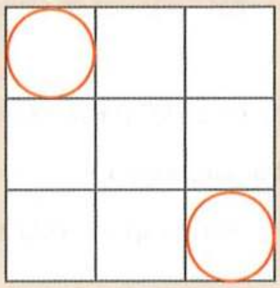
Respuesta:

2. Un test consta de 30 preguntas (las posibles respuestas son verdadera o falsa). Rosa tiene 50 % más de respuestas correctas que incorrectas. ¿Cuántas respuestas correctas tiene, si contestó a todas las preguntas?

Argumenta la solución:

Respuesta:

3. La tabla 3×3, de la figura, está formada por 9 cuadrados de lado 1 y en dos de ellos (los que se ven en la figura) se han dibujado sendas circunferencias. ¿Cuál es la mínima distancia entre las dos circunferencias?



Argumenta la solución:

Respuesta:

Recuperado de: https://www.canguromat.org.es

4. Tres dados idénticos se colocan, como muestra la figura, encima de una mesa. La cara inferior de cada dado marca los mismos puntos que la superior del dado que está debajo. ¿Cuántos puntos marca la cara del dado que se apoya sobre la mesa?

Shutterstock, 121462618

5. Un litro de limonada contiene el 80 % de agua. ¿Qué porcentaje de agua contendrá la limonada, si alguien se bebe medio litro?

6. Cuando los alumnos van de la escuela al museo, lo hacen en filas de tres. María, Pepi y Rosa observan que son las séptimas contando desde el principio y las quintas contando desde el final. ¿Cuántos alumnos van al museo?

7. Hay 20 estudiantes en una clase. Se sientan en parejas tales que exactamente un tercio de los chicos se sientan con una chica y exactamente la mitad de las chicas se sientan con un chico. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

8. En una pizarra se escriben varios enteros positivos distintos. El producto de los dos menores es 16. El producto de los dos mayores es 225. ¿Cuál es la suma de todos los enteros?

Refuerza tus aprendizajes

1. **Lee** y **analiza**.

   Calcula el producto cartesiano $B \times A$:
   sea $A = \{1, 5, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $= \{(1,6), (1,7), (5,6), (5,7), (9,6), (9,7)\}$
   b) $= \{(6,1), (7,1), (6,5), (7,5), (6,9), (7,9)\}$
   c) $= \{(6,1), (7,1), (6,5), (7,5), (9,7), (9,6)\}$
   d) $= \{(1,6), (1,7), (5,6), (5,7), (6,9), (7,9)\}$

2. **Lee** y **analiza**.

   La función $f(t) = 1{,}8\,t + 32$, donde t es la temperatura en grados Celsius (°C) que permite determinar la temperatura en grados Fahrenheit (°F). Si un día la temperatura máxima en una ciudad fue de 18 °C, ¿cuál fue la temperatura medida en °F?

   Escoge la respuesta correcta.

   a) 0,4 °F
   b) 32,4 °F
   c) 64,4 °F
   d) 96,4 °F

3. **Lee** y **analiza**.

   La expresión $d(t) = 80\,t$ relaciona la distancia recorrida en kilómetros por un vehículo, en función del tiempo transcurrido en horas. A partir de lo anterior, ¿en cuántas horas un vehículo recorre 320 km?

   Escoge la respuesta correcta.

   a) 3 horas
   b) 2 horas
   c) 4 horas
   d) 5 horas

4. **Lee** y **analiza**.

   Observa los datos de la tabla que muestran la distancia recorrida y el tiempo que se demora un automóvil. ¿Qué función representa esta relación?

Distancia (km)	30	42	54	72
Tiempo (min)	20	28	36	48

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $x = 1{,}5y$
   b) $y = 1{,}5x$
   c) $x = 2{,}5y$
   d) $y = 3{,}5x$

5. **Lee** y **analiza**.

   ¿A qué función corresponde $6x - 3y - 18 = 0$ al despejar y?

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $y = 2x - 6$
   b) $y = 2x - 1$
   c) $y = 2x + 6$
   d) $y = 3x - 6$

6. **Lee** y **analiza**.

   La ecuación $6x - 3y - 18 = 0$ interseca con el eje x en:

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $(-2,0)$
   b) $(-3,0)$
   c) $(2,0)$
   d) $(3,0)$

7. **Lee** y **analiza**.

   La recta que tiene por pendiente $\frac{3}{2}$ y pasa por el punto A $(-3,2)$ es:

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $3x + 2y - 5 = 0$
   b) $3x - 2y + 13 = 0$
   c) $x - 2y + 7 = 0$
   d) $3x + 2y - 2 = 0$

8. **Lee** y **analiza**.

   La recta de la ecuación $9x - 3y + 2 = 0$ tiene una pendiente igual a:

   Escoge la respuesta correcta.

   a) $\frac{1}{3}$
   b) $-\frac{1}{3}$
   c) 3
   d) -3

9. **Lee** y **analiza**.

   La recta que pasa por los puntos A (1, 2) y B (7, 4) tiene la pendiente igual a:

   Escoge la respuesta correcta.

   a) -3
   b) 3
   c) $\frac{1}{3}$
   d) $-\frac{1}{3}$

10. **Lee** y **analiza**.

    Si la pendiente de una recta es $\frac{3}{4}$ y el corte en y es $\frac{2}{3}$, la ecuación general es:

    Escoge la respuesta correcta.

    a) $3x - 4y + 8 = 0$
    b) $4x - 3y + 8 = 0$
    c) $9x - 12y + 8 = 0$
    d) $12x - 9y + 8 = 0$

11. Lee y **analiza**.

Si la relación entre el puntaje obtenido por un alumno y la nota que le corresponde es lineal, y además se sabe que con 0 de puntaje se obtiene una nota de 1 y con 45 puntos la nota es 7, **encuentra** la ecuación si la nota es "y" y el puntaje es "x".

Escoge la respuesta correcta.

a) $2x - 15y + 15 = 0$ c) $15x - 2y + 2 = 0$

b) $2x - 15y - 15 = 0$ d) $7x - y + 45 = 0$

12. Lee y **analiza**.

Determina la fórmula lógica de la proposición compuesta si las simples son:

r: Sergio es hijo de Andrea

s: Laura es hermana de María

No es cierto que Sergio es hijo de Andrea y Laura es hermana de María.

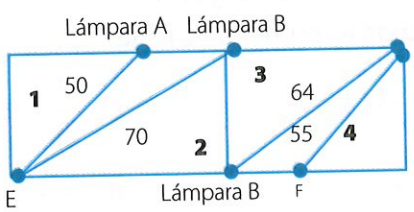
Escoge la respuesta correcta.

a) $\neg r \wedge s$ c) $\neg r \wedge \neg s$

b) $\neg(r \wedge s)$ d) $\neg(r \wedge \neg s)$

13. Lee y **analiza**.

Un parque con forma rectangular de dimensiones 35×98 metros es iluminado por cuatro lámparas. La lámpara A ilumina el área 1; la lámpara B, el área 2; la lámpara C, el área 3; y la lámpara D, el área 4. ¿Cuál es el área del parque que no es iluminada por ninguna lámpara, si las zonas no iluminadas son AEC y BDF?



- **Calcula** área de la región 1:
- **Calcula** área de la región 2:
- **Calcula** área de la región 3:
- **Calcula** área de la región 4:
- **Calcula** el área total del parque y **resta** las áreas de las 4 regiones:

Escoge la respuesta correcta.

a) 640,7 m^2 c) 64,07 m^2

b) 631,4 m^2 d) 63,14 m^2

14. Lee y **analiza**.

¿Cuántos números de 2 cifras son divisibles por 2 y por 7?

Escoge la respuesta correcta.

a) 7

b) 8

c) 5

d) 6

15. Lee y **analiza**.

¿Cuánto tiempo tardaremos en imprimir un millón de letras, si imprimimos cien en 1 minuto?

Escoge la respuesta correcta.

a) 160h 40 min

b) 166h 40 min

c) 120h 40 min

d) 18h 10 min

16. Lee y analiza.

El número a es mayor que b y la diferencia entre los números a y b es 15. Si a aumenta en 3 y b disminuye en 2, entonces, la diferencia entre a y b:

Escoge la respuesta correcta.

a) aumenta en 1

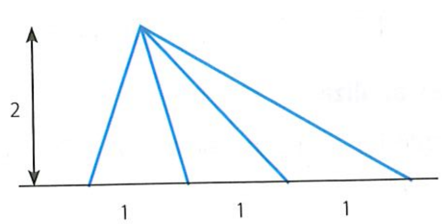
b) aumenta en 5

c) Disminuye en 1

d) Disminuye

17. Lee y **analiza**.

La suma de las áreas de todos los triángulos que se pueden formar en la figura es:



Escoge la respuesta correcta.

a) 10

b) 8

c) 9

d) 6

18. Lee y **analiza**.

Si recortamos un vértice de un cuadrado, ¿cuántos vértices tiene el polígono resultante?

Escoge la respuesta correcta.

a) 2

b) 1

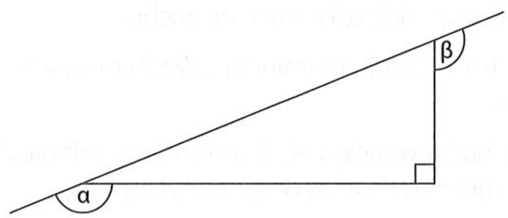
c) 5

d) 4

19. Lee y **analiza** la siguiente situación.

¿Cuál es la suma de los dos ángulos señalados?

?



Escoge la respuesta correcta.

a) 150°

b) 180°

c) 270°

d) 120°

20. Lee y **analiza** la siguiente situación.

¿Cuál es la suma de los dos ángulos señalados?

Escoge la respuesta correcta.

a) 28

b) 32

c) 36

d) 38

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

En tu cuaderno

El telescopio espacial James Webb alcanza su destino en la órbita solar

"El telescopio espacial James Webb de la NASA, diseñado para dar al mundo una visión sin precedentes de las primeras etapas del universo, alcanzó en enero de 2022 su destino a casi 1 600 000 km de la Tierra, donde girará alrededor del Sol.

El Webb alcanzó, un mes después de su lanzamiento, una posición de estabilidad orbital entre la Tierra y el Sol, conocida como *Lagrange Point Two* o L2.

Desde su punto de vista en el espacio, Webb seguirá un camino especial en constante alineación con la Tierra, mientras el planeta y el telescopio giran alrededor del Sol en tándem, lo que permite un contacto por radio ininterrumpido.

Este telescopio orbita la Tierra desde 547 km de distancia, entrando y saliendo de la sombra del planeta cada 90 minutos.

La atracción combinada del Sol y la Tierra en L2 puede mantener el telescopio firmemente en su lugar, por lo que se necesita poco empuje adicional del cohete para evitar que Webb se desvíe. Una posición L2 permite que, con una cantidad mínima de combustible, permanezca en órbita.

El centro de operaciones también ha comenzado a afinar el espejo principal del telescopio, una matriz de 18 segmentos hexagonales de metal de berilio recubierto de oro que mide 6,5 metros de ancho.

Su tamaño y diseño para operar, principalmente, en el espectro infrarrojo permitirán a Webb mirar a través de nubes de gas y polvo y observar objetos a mayores distancias.

Se espera que estas características marquen el comienzo de una revolución en la astronomía, brindando una primera visión de las galaxias jóvenes que datan de solo 100 millones de años después del *big bang*.

Los instrumentos de Webb también lo hacen ideal para buscar signos de atmósferas potencialmente sustentadoras de vida alrededor de decenas de exoplanetas recién documentados y para observar mundos mucho más cercanos a casa como Marte y la luna helada de Saturno, Titán.

Webb debería estar listo para comenzar las observaciones a principios del verano, con imágenes iniciales utilizadas para demostrar que los instrumentos funcionan correctamente".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-telescopio-espacial-james-webb-acerca-destino-orbita-solar-202201251118_noticia.html

Shutterstock, 2089001365

Telescopio espacial James Webb orbitando la Tierra.

Ficha de comprensión lectora


Científicos de la NASA preparando el telescopio espacial James Webb.

Shutterstock, 2112761165

1. ¿Sobre qué trata el artículo?
2. ¿Cuál es el propósito de este telescopio espacial?
3. ¿A qué distancia de la Tierra se encuentra el telescopio?
4. ¿Cómo se llama la posición de estabilidad orbital entre la Tierra y el Sol?
5. ¿Cuál es el propósito del autor con este artículo?
6. ¿Cuál es tu opinión en relación con este tema?

Ficha de escritura académica

Actividad personal

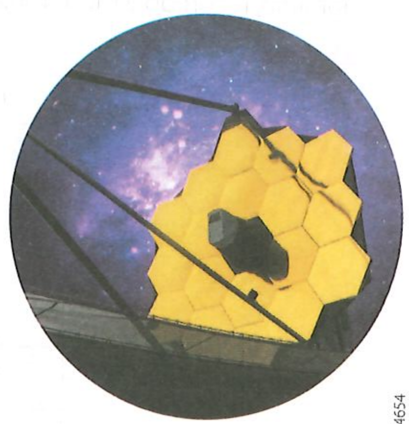
1. **Investiga** en Internet acerca del telescopio Hubble. **Elabora** un organizador gráfico con la información y **compártela** en clase.
2. **Haz** un cuadro comparativo con las principales características y funciones de los telescopios Hubble y Webb. **Discute** con un compañero sobre esto.
3. **Toma** de la web diferentes imágenes sobre el tema y **elabora** un *collage*.
4. En la lectura se mencionó el *big bang*. **Averigua** qué es y **elabora** una infografía sobre este tema.

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y utilicen las TIC de su preferencia para **crear** una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:

   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Hay que incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 2112674654

Compruebo mis aprendizajes
Evaluación sumativa

I.M.4.3.1. / I.M.4.3.3. / I.M.4.3.2 / I.M.4.6.1

1. **Resuelve**. Dados los conjuntos:

   A = { −2, −4, 5, 6, 0},

   B = {4, 16, 25, 36, 0}

   a) **Realiza** el producto cartesiano A × B.

   b) **Determina** la relación A en B: x^2.

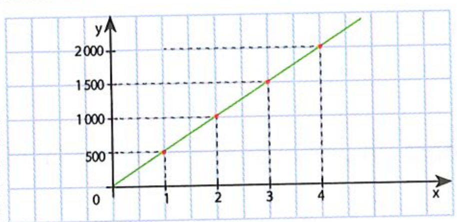
   c) **Representa** la relación mediante un diagrama sagital y plano cartesiano.

   d) ¿Qué propiedad cumple la relación?

2. **Observa** la gráfica y **responde** las preguntas.

   Un avión vuela a una velocidad de 500 *km/h*. Si construimos una tabla de valores y graficamos, obtenemos:

Tiempo	1	2	3	4
Espacio	500	1 000	1 500	2 000



Archivo editorial.

   a) ¿Cuáles son las variables?

   b) **Determina** el dominio y recorrido de la función.

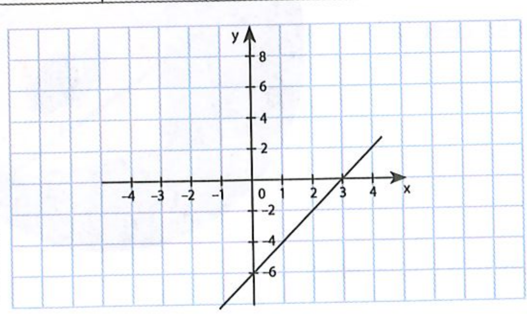
   c) **Escribe** la monotonía de la función.

   d) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

3. **Grafica** las funciones en una hoja y **escribe** su dominio, recorrido y monotonía.

   a) f(x) = 2x − 6

x	−1	0	2	3
f(x)	En tu cuaderno			



Archivo editorial.

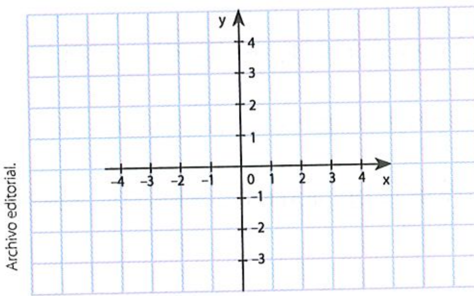
   Dom f(x):

   Rec f(x):

   Monotonía:

   b) $g(x) = -2x^2 - 4x - 3$

x	−2	−1	0	1
f(x)	En tu cuaderno			



Archivo editorial.

   Dom f(x):

   Rec f(x):

   Monotonía:

4. **Encuentra** la pendiente de las siguientes funciones lineales.

   a) $y = -x - 1$

   b) $y - x = -3$

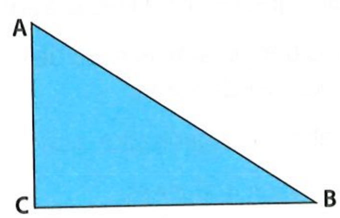
   c) $y = 7$

   d) $4x - \frac{5}{3} = y$

   e) $4x - 12y = 0$

5. **Aplica** el teorema de Pitágoras y **encuentra** el lado que falta.

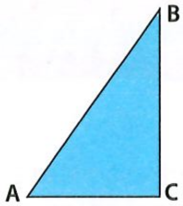
   a) c = ?; a = 32 *cm*; b = 15 *cm*



Archivo editorial.

   A) 35,34 **B)** 28,26 **C)** 13,89

b) $c = 234\ cm$; $a = ?$; $b = 35\ cm$



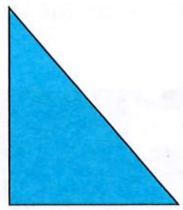
A) 231,37 **B)** 236,60 **C)** 141, 19

6. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo que es isósceles cuyos lados iguales miden 1 m?

a) $\sqrt{2}m$

b) $2\ m$

c) $1\ m$



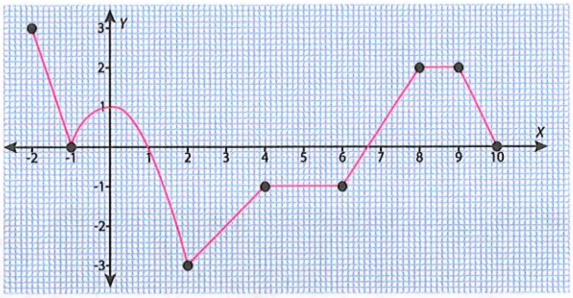
7. Expreso mis emociones. El trabajo en grupo es fundamental y debes participar activamente; **expresa** tus opiniones y criterios. **Escucha** las de los demás.

Coevaluación

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. Una persona se encuentra en lo alto de un faro que tiene 15 metros de altura. Desde ahí observa un barco que está a 40 metros de la base del faro. ¿Cuál es la distancia de la persona al barco que divisa?

9. Observen la gráfica y **determinen** lo siguiente:



a) Escriban el dominio y recorrido de la función.

b) Escriban los intervalos en los cuales la función es creciente.

c) Escriban los intervalos en los cuales la función es decreciente.

Autoevaluación

10. Pinta según la clave.

Puedo ayudar a otros **Resuelvo por mí mismo** **Necesito ayuda** **Estoy en proceso**

Contenidos	Realizo productos cartesianos e identifico las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.	
	Resuelvo problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones.	
	Determino el dominio y recorrido de las funciones en la resolución de problemas.	
	Identifico funciones lineales y encuentro la pendiente de una recta.	
	Aplico el teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas con triángulos rectángulos.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad en situación de la vida cotidiana?

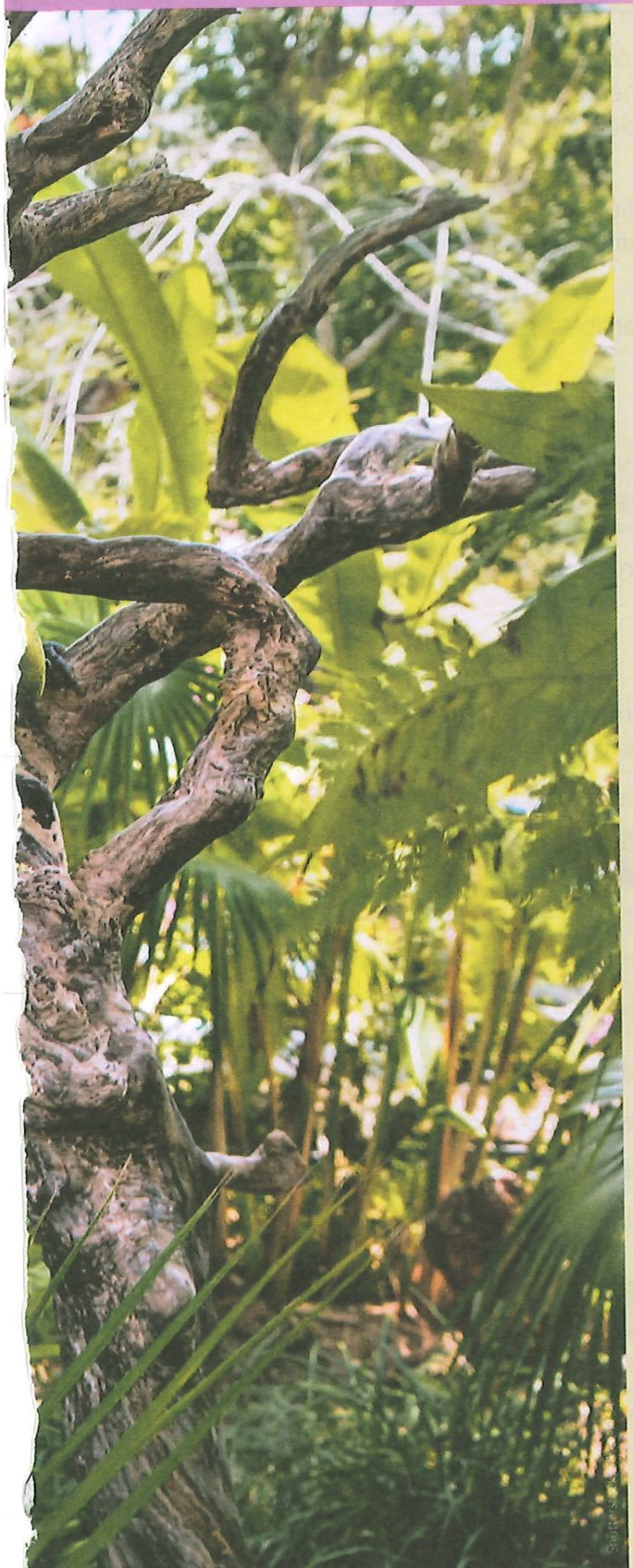
unidad 4

Sistemas de ecuaciones lineales
Líneas y congruencia de triángulos

La biodiversidad

Megadiverso y hermoso, nuestro país es reconocido a escala mundial por su riqueza y variedad en cuanto a las plantas y animales que posee por metro cuadrado. Gracias a su ubicación en el centro del mundo, el Ecuador concentra, en un pequeño territorio, la diversidad del planeta, que se conjuga en la Cordillera de los Andes, costas paradisíacas, misteriosas y profundas selvas amazónicas y un tesoro único en el mundo que constituye un laboratorio natural llamado Galápagos. Todos estos parajes de cuento, en los que se desarrolla una fauna y flora privilegiadas, concentran un 10 % de todas las especies de plantas que hay en el mundo.

Esta alta concentración de animales y plantas, por metro cuadrado, hizo que Ecuador gane el premio Destino Verde Líder de Sudamérica.



Preguntas generadoras

- ¿Qué es para ti la biodiversidad?
- ¿Cómo se aplica la matemática a la biodiversidad?
- ¿Qué problema modelarías con la información del texto?

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Ecuación lineal con dos incógnitas
- Sistemas de ecuaciones lineales: método gráfico, método de igualación, eliminación gaussiana y método de Cramer

Geometría y medida

- Congruencia de triángulos

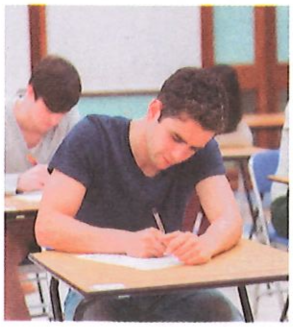
Objetivos

O.M.4.3. / O.M.4.5.

Tema 1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Saberes previos

Recuerda. ¿Cómo puedes graficar la ecuación de una recta?



Shutterstock, 124139695

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas también son conocidas como ecuaciones indeterminadas, ya que tienen una infinidad de soluciones que son pares de números que verifican la ecuación. Veamos un ejemplo de aplicación de ecuaciones lineales.

Para la nota de su parcial, Fabián rindió dos exámenes de matemática. Si su profesora le dice que la suma de sus calificaciones es 14, ¿qué calificación obtuvo Fabián en cada examen?

Los datos que desconocemos son las variables, siendo x el primer examen y y el segundo examen.

La ecuación planteada es: $x + y = 14$

Definición de ecuación lineal. Es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales y el grado de las incógnitas x e y es 1.

A continuación, resolveremos la ecuación planteada anteriormente.

Primero: despejamos la variable y.

$y = 14 - x$

Segundo: asignamos valores positivos arbitrarios a $\mathbf{x}$, efectuamos las operaciones y obtenemos los valores de y. Organizamos los datos en una tabla de valores.

Como se puede observar, estas son algunas soluciones para el problema planteado.

x	$y = 14 - x$	y
Si $x = 4$	$y = 14 - 4$	$y = 10$
Si $x = 5$	$y = 14 - 5$	$y = 9$
Si $x = 7$	$y = 14 - 7$	$y = 7$

a) Si en el primer examen obtuvo 4, en el segundo sacó 10.

b) Si en el primer examen obtuvo 5, en el segundo sacó 9.

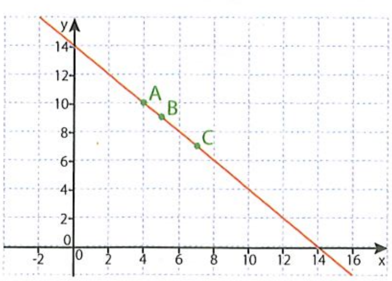
c) Si en el primer examen obtuvo 7, en el segundo sacó 7.

Podemos concluir que para todo valor de x, existe uno para y. Por lo tanto, no hay solución única para el problema.

Competencia matemática

Con el objetivo de construir una tabla de valores, se asignan valores arbitrarios a la variable x para reemplazar en la ecuación y obtener el valor de y.

Responde: ¿qué es una tabla de valores?



x	y	Puntos
4	10	A (4, 10)
5	9	B (5, 9)
7	7	C (7, 7)

Como se pude observar, la solución es una línea recta, donde cada par ordenado (x, y) de la recta satisface la ecuación.

M.4.1.53. Reconocer la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en R.

Ejemplo

Julián va a comprar una maleta que cuesta \$ 150. Para pagar solo tiene billetes de \$ 10 y \$ 5. ¿Cuántos billetes de cada tipo necesita para comprar la maleta?

Shutterstock, 596461766

Solución

Identificamos las variables:

x: billetes de \$ 10, y: billetes de \$ 5.

La ecuación formada es: $10x + 5y = 150$. Dividimos la ecuación para 5 y obtenemos una ecuación equivalente: $2x + y = 30$

Para encontrar los puntos de la recta solución, despejamos y.

$y = 30 - 2x$

Asignamos diferentes valores a x.

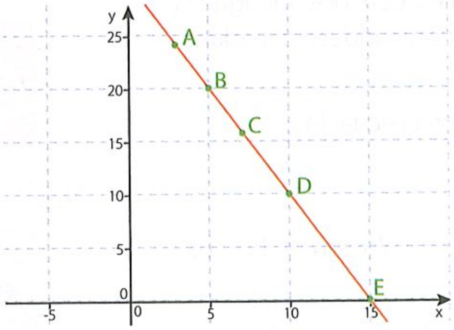
x	$y = 30 - 2x$	y
3	$y = 30 - 2(3)$	24
5	$y = 30 - 2(5)$	20
7	$y = 30 - 2(7)$	16
10	$y = 30 - 2(10)$	10

De las soluciones obtenidas se consideran solo las que satisfacen la ecuación del problema: $10x + 5y = 150$

Tabulando los datos que sí satisfacen la ecuación, tenemos la siguiente tabla de valores:

x	y	Puntos
3	24	A (3, 24)
5	20	B (5, 20)
7	16	C (7, 16)
10	10	D (10, 10)
15	0	E (15, 0)

Su representación gráfica es:

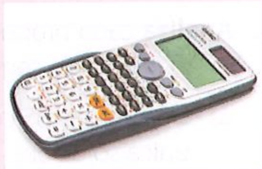


Mediante la gráfica trazada, se pueden dar diversas respuestas al problema. Por ejemplo, para pagar \$ 150.

- Se necesitan 3 billetes de \$ 10 y 24 de \$ 5.
- Se necesitan 5 billetes de \$ 10 y 20 billetes de \$ 5.
- Se necesitan 7 billetes de \$ 10 y \$ 16 billetes de \$ 5.
- Se necesitan 10 billetes de \$ 10 y \$ 10 billetes de \$ 5.

Competencia digital

Existen calculadoras, como la fx 9860 GSD que te permiten resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas, calculando su tabla de valores y mostrando la gráfica de la ecuación.



Shutterstock, 310100930

Indaga y **resume** en el cuaderno: ¿cómo se resuelven las ecuaciones lineales con dos incógnitas en una calculadora que realiza esta operación?

Competencia socioemocional

Cuando trabajes en grupo, toma la iniciativa y manifiesta tus puntos de vista en la resolución de problemas para llegar a soluciones efectivas.

Emite tu opinión en clase.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.3.

1. **Despeja** la variable y en cada ecuación.

a) $4(x-y)=2x+3$

b) $3x-2y+5=4x-7y-3$

c) $3x+5y=-4$

d) $5(x-3y)+7=3x-8y+1$

e) $4x-5y+2x-4=3x-y$

f) $3x+y=12$

g) $5(x-y)=3x+2$

h) $4x+3y=12$

i) $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y=\frac{28}{3}$

2. **Analiza** cada proposición y **determina** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

a) Una ecuación con dos incógnitas tiene una única solución.

b) Todos los pares ordenados que pertenecen a la recta son soluciones.

c) Las ecuaciones lineales con dos incógnitas también se conocen como indeterminadas.

d) El conjunto solución de la ecuación $y=2x-1$ es $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) El par ordenado (2, 3) es solución de la ecuación $3x-2y=0$.

f) Todos los puntos de la recta $r: y=2x-1$ son soluciones de la ecuación $2x-y=1$.

g) Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene una cantidad finita de soluciones que pueden mostrarse en una tabla de valores.

h) Una tabla de valores muestra algunas de las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.

3. **Identifica** el par ordenado o pares ordenados que satisfacen cada ecuación.

a) $3x+5y=4$

A) (1, 1) B) (−2, 2) C) (2, −2) D) (−1, 1)

b) $-x-y=1$

A) (0, 0) B) (−2, 1) C) (1, −2) D) (−1, 1)

c) $x+2y=5$

A) (3, 1) B) (0, 2) C) (1, −2) D) (1, −3)

d) $-x-4y=-18$

A) (1, 3) B) (2, 4) C) (−2, −5) D) (1, 4)

e) $x+5y=14$

A) (1, 3) B) (4, 0) C) (−1, 3) D) (4, −2)

4. **Resuelve** las siguientes ecuaciones y **grafica** en tu cuaderno la recta que representa cada ecuación.

a) $2x+y=8$

x	−1	0	1	2	4
y	En tu cuaderno				

b) $6x-3y=36$

x	−1	0	1	3	4
y	En tu cuaderno				

c) $4x-5y=25$

x	−1	0	1	2	4
y	En tu cuaderno				

d) $\frac{1}{2}x-6y=-12$

x	−2	−1	0	1
y	En tu cuaderno			

e) $-y-x=-4$

x	−4	0	2	4	6
y	En tu cuaderno				

f) $x+2y=8$

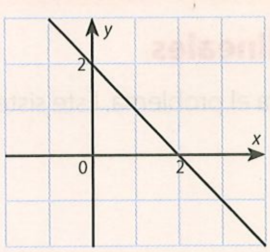
x	−1	0	2	3	4
y	En tu cuaderno				

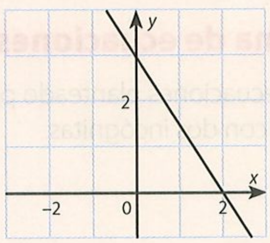
g) $0{,}2x+y=5$

x	−1	0	1	3	4
y	En tu cuaderno				

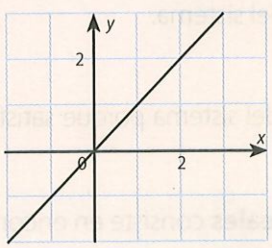
5. Encierra la recta que es solución de la ecuación dada.

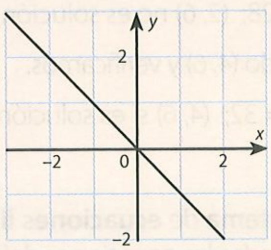
a) $3x+2y=6$



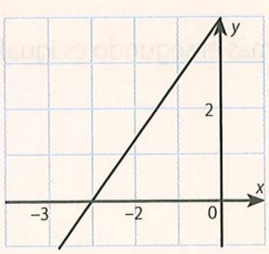


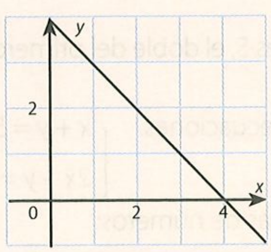
b) $x+y=0$



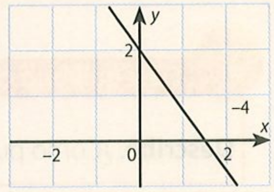


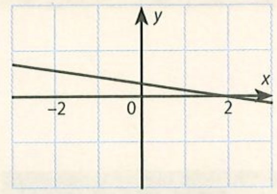
c) $3y-4x=12$





d) $\frac{2}{3}x+3y=1$





6. Completa en tu cuaderno la tabla con soluciones de cada ecuación lineal con dos incógnitas. **Grafica** luego la función solución de la ecuación.

a) $x+y=\frac{3}{2}$

x	−1	0	1	2	3	4
y	En tu cuaderno					

b) $3x+4=5y-2$

x	−1	0	1	2
y	En tu cuaderno			

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

7. Desarrollen las siguientes ecuaciones lineales con dos variables. **Escriban** tres posibles soluciones.

a) $x-3y=6$

b) $3x+4y=x-y+4$

c) $3x-7y=9$

d) $y=8x-1$

e) $y=0{,}5x-3$

f) $x-y=-2$

g) $4x-3y=18$

h) $5x+10y=50$

8. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Alegría va a la tienda a comprar arroz y azúcar, pero solo tiene \$ 20. Si cada libra de arroz cuesta \$ 0,60 y de azúcar cuesta \$ 0,80, ¿cuántas libras de cada una le alcanza para comprar?

b) La edad de Pablo y Agustín sumadas dan 28 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Actividad indagatoria

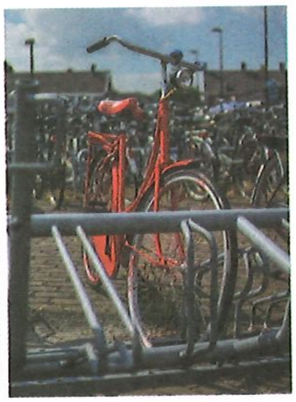
9. Indaga y **escribe**.

Una situación de la vida cotidiana que pueda modelarse con una ecuación lineal con dos incógnitas.

Tema 2 Sistemas de ecuaciones lineales

Desequilibrio cognitivo

Describe. ¿Cómo puedes graficar la ecuación de una recta?



Shutterstock, 730898263

Un **sistema** de **ecuaciones lineales** o sistema lineal es un conjunto de ecuaciones de primer grado que deben verificarse simultáneamente.

En el estacionamiento de un colegio, en total, hay 10 vehículos entre bicicletas y automóviles. El total de ruedas que se contabilizaron es de 32. ¿Cómo escribes esta información con ecuaciones?

Traducimos del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático:

x: representa el número de bicicletas y: representa el número de automóviles

Total de vehículos 10 → $x + y = 10$

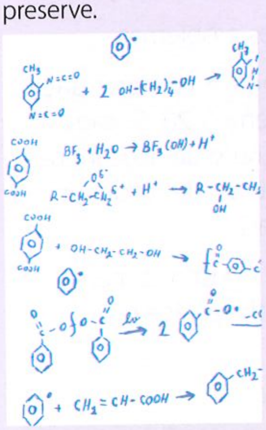
Total de ruedas 32 → $2x + 4y = 32$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases} \leftarrow \text{Sistema de ecuaciones lineales}$$

Interdisciplinariedad

Matemática y Química

Una de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales es en el balanceo de reacciones químicas, que consiste en determinar el número entero de moléculas que intervienen en una reacción química, cuidando siempre que el número de átomos de cada sustancia se preserve.



Shutterstock, 1053442553

Escribe otra de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

- Analizamos el sistema de ecuaciones planteado para el problema. Este sistema consta de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 4y = 32 \end{cases}$$

- Verificamos si el par ordenado (2, 6) es solución del sistema. Para ello, sustituimos estos valores en cada ecuación del sistema:

  $2 + 6 \neq 10$ y $2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \neq 28$; (2, 6) no es solución del sistema.

- Buscamos otro par ordenado (4, 6) y verificamos.

  $4 + 6 = 10$ y $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 32$; (4, 6) sí es solución del sistema porque satisface a todas las ecuaciones.

Hallar la **solución** de un **sistema** de **ecuaciones lineales** consiste en encontrar una solución común a todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

- La suma de dos números es 5, el doble del primero más el segundo es igual a 9. ¿Cuáles son los números?

  Planteamos el sistema de ecuaciones. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

  Probamos con varias parejas de números:

  $(3, 2) \rightarrow 3 + 2 = 5$ y $2 \cdot 3 + 2 \neq 9$; no satisface el sistema.

  $(4, 1) \rightarrow 4 + 1 = 5$ y $2 \cdot 4 + 1 = 9$; sí satisface el sistema.

M.4.1.54. Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

En una panadería, Esteban pagó \$ 7 por la compra de 5 panes y un queso; mientras que Elena pagó \$ 8 por la compra de 2 panes y 3 quesos de la misma calidad. ¿Cuánto cuesta cada pan y cada queso?

Formamos el sistema de ecuaciones, consideramos como x el precio del pan, mientras que y es el precio del queso.

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

Shutterstock, 10764127

Un buen consumidor utiliza las matemáticas en cualquier transacción.

- Graficamos las dos ecuaciones del sistema en el plano cartesiano. Para ello, obtenemos dos puntos de cada recta.

  $5x + y = 7$

  Si $x = 0$; $5(0) + y = 7$; $y = 7$

  Si $y = 0$; $5x + 0 = 7$; $x = 7/5$

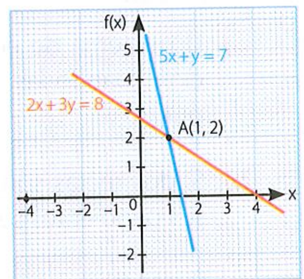
  Los dos puntos por donde pasa la primera recta son: (0, 7) y (7/5, 0)

  $2x + 3y = 8$

  Si $x = 0$; $2(0) + 3y = 8$; $y = 8/3$

  Si $y = 0$; $2x + 3(0) = 8$; $x = 4$

  Los puntos por donde pasa la segunda recta son: (0, 8/3) y (4, 0)



Solución

El punto donde se cortan las gráficas son la solución del sistema.

La solución en este caso es: $x = 1$, $y = 2$

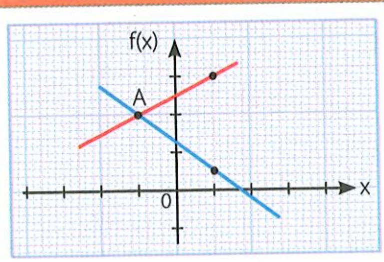
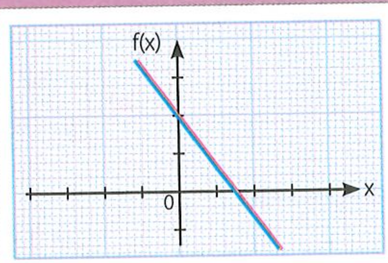
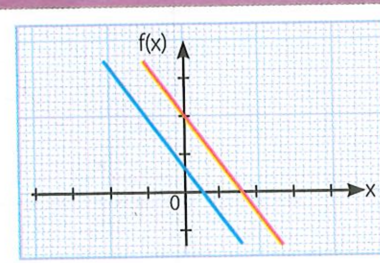
Por lo tanto, cada pan cuesta \$ 1 y cada queso \$ 2.

> La **solución** de un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico está determinada por el **punto de intersección** de las dos **rectas.**

¿Sabías que?

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas también se puede llamar sistema de ecuaciones lineales 2×2.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
		
Las dos **rectas** son **secantes** y tienen **un solo punto** en **común**. El sistema tiene **única solución**.	Las dos **rectas** son **coincidentes**, tienen **todos los puntos comunes**. Todas las soluciones de una de las ecuaciones son también de la otra. El sistema tiene **infinitas soluciones**.	Las dos rectas son paralelas **no tienen** ningún **punto** en **común**. El sistema **no tiene solución**.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Comprueba** si los siguientes puntos son solución de los sistemas de ecuaciones.

Punto	Sistema
a) (1, 2)	$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$
b) (−3, 4)	$\begin{cases} x-2y=4 \\ 6x-y=1 \end{cases}$
c) (5, 13)	$\begin{cases} x+y=18 \\ x-y=-8 \end{cases}$
d) (4, 0)	$\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+5y=12 \end{cases}$

2. **Determina** verdadero (V) o falso (F) para cada enunciado.

   a) Un sistema de ecuaciones tiene única solución cuando las rectas se cortan en un solo punto.

   b) Si dos rectas son perpendiculares, entonces sus pendientes son iguales.

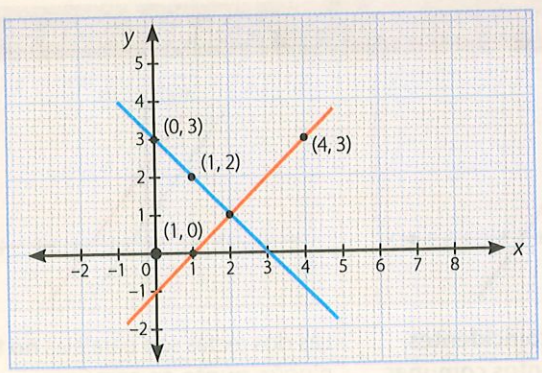
   c) Si dos rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

   d) Dos rectas son coincidentes cuando los coeficientes de una de ellas es múltiplo de los coeficientes de la otra ecuación.

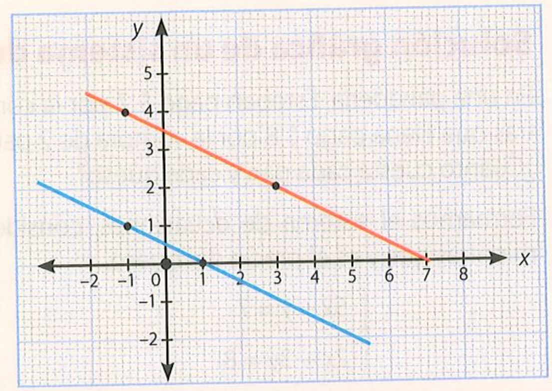
   e) Un sistema lineal cuyas ecuaciones son coincidentes no tiene solución.

3. **Encuentra** un sistema de ecuaciones lineales correspondiente al gráfico y **halla** su solución.

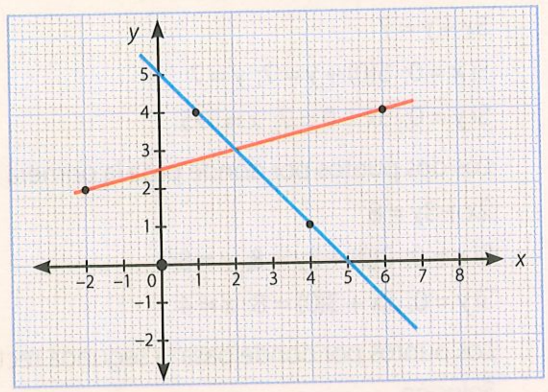
a)



b)



c)



4. **Encuentra** dos sistemas de ecuaciones lineales que tengan como solución el punto dado. (**Recuerda**: para que un punto pertenezca a la recta, reemplazas las coordenadas en la ecuación.)

   a) (−2, 1)
   b) (3, −2)
   c) (0,5; −1)
   d) (0, 4)

5. **Resuelve** gráficamente los sistemas de ecuaciones.

   a) $\begin{cases} 5x+2y=-3 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x=2 \\ y-3x=0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} -3x+2y=5 \\ -6x+4y=10 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} 3x+y=6 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

6. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, **encuentra** la solución graficamente en tu cuaderno:

$$\begin{cases} 2x-3y=11 \\ x+4y=11 \end{cases}$$

Responde con verdadero (V) o falso (F) las siguientes afirmaciones.

a) El punto (1, –3) satisface a la primera ecuación, pero no es solución del sistema.

b) El punto (3, 2) satisface a las dos ecuaciones y es la solución del sistema.

c) El sistema tiene una única solución.

7. **Determina** el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2. **Indica** si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=3 \\ y-x=4 \end{cases}$

8. **Expresa** los siguientes enunciados mediante un sistema de ecuaciones. Luego, **resuélvelas** gráficamente.

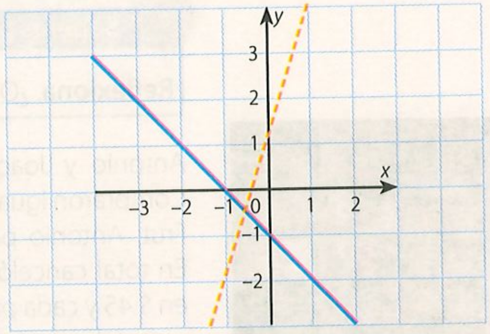
a) El triple de un número más el doble de otro es igual a uno, y el cuádruplo del segundo más cinco es igual al primero. ¿Cuáles son los números?

b) Angélica le dice a Daniel: "yo tengo el triple de dinero de lo que tu tienes menos cuatro". Daniel le responde: "si juntamos los dos tenemos $12". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

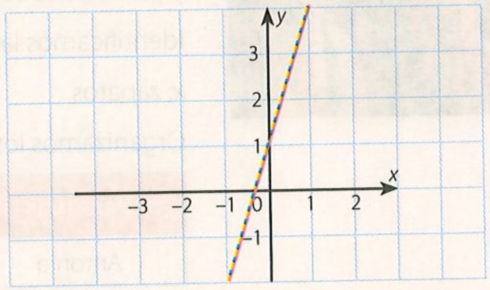
c) Por la compra de dos equipos electrónicos se ha pagado $ 1 000. Si en la primera compra hicieron un descuento del 15 % y en la segunda, un descuento del 10 %, se hubiera pagado $ 870. ¿Cuánto costó cada artículo?

9. La ilustración muestra el gráfico de las ecuaciones de un sistema lineal con dos incógnitas. **Clasifícalo** según corresponda en compatible determinado, indeterminado o incompatible.

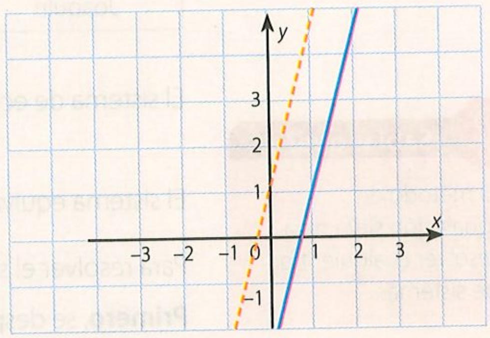
a)



b)



c)



Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

10. **Resuelvan** los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico.

a) $\begin{cases} 7x+2y=5 \\ y=\dfrac{x+1}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x+9=6y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$

Actividad indagatoria

11. **Indaga** y **escribe** en tu cuaderno.

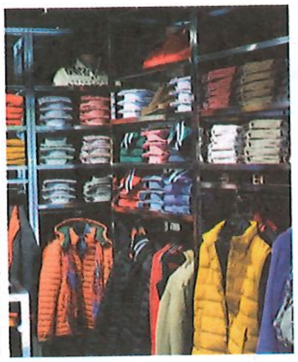
¿Cuándo un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones?

Tema 3

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Método de igualación

Saberes previos

Reflexiona. ¿Qué es para ti un sistema?


Shutterstock, 278183861

Antonio y Joaquín realizan sus compras navideñas en diferentes almacenes. Compraron igual número de zapatos y pantalones en cada almacén. En el almacén Frut, Antonio pagó por cada par de zapatos \$ 30 y por cada pantalón, \$ 15. En total canceló \$ 255. En el almacén Pat, Joaquín compró cada par de zapatos en \$ 45 y cada pantalón en \$ 25. En total canceló \$ 400. ¿Cuántos pares de zapatos y pantalones compró cada uno?

Identificamos las variables del problema:

x: zapatos y: pantalones

Organizamos los datos en una tabla, tenemos:

Personas	Zapatos (x)	Pantalones (y)	Costo
Antonio	$30x$	$15y$	\$ 255
Joaquín	$45x$	$25y$	\$ 400

El sistema de ecuaciones formado es: $\begin{cases} 30x+15y=255 \\ 45x+25y=400 \end{cases}$

El sistema equivalente es: $\begin{cases} 6x+3y=51 \\ 9x+5y=80 \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones por **igualación**, se procede así:

Primero, se despeja la misma variable en ambas ecuaciones.

$$x=\frac{51-3y}{6} \qquad \Bigg| \qquad x=\frac{80-5y}{9}$$

En este caso, hemos despejado la variable x.

Segundo, se igualan las dos ecuaciones y se realiza el producto cruzado.

$$\frac{51-3y}{6}=\frac{80-5y}{9}$$

$$9(51-3y)=6(80-5y)$$

Tercero, se multiplica y se despeja y.

$459-27y=480-30y;\ 3y=21;\ y=7$

Cuarto, se reemplaza el valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se obtiene la otra variable.

$6x+3(7)=51;\ 6x=30;\ x=5$

Solución

Antonio y Joaquín compraron 5 pares de zapatos y 7 pantalones.

¿Sabías que?

El método de igualación sirve para resolver cualquier tipo de sistemas.

DFA

Sin importar las diferencias o similitudes que podamos tener unos con otros, es fundamental facilitar la inclusión social y evitar el aislamiento.

M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de igualación y de eliminación gaussiana.

Método de eliminación gaussiana

La región Sierra de nuestro país, por su clima y suelos, es apropiada para el cultivo del palmito, brócoli, tomate, cereales, legumbres y frutas que son muy cotizadas en los países a los cuales se exporta.

Una empresa agrícola dispone de 100 hectáreas en las que se produce palmito y brócoli. Cada hectárea de palmito requiere 700 horas de mano de obra y cada hectárea de brócoli, 300 horas. Si se dispone de 44 000 horas y se utilizan todos los recursos humanos y de tierras, ¿cuántas hectáreas de cada grupo deben sembrarse?

Organizamos los datos en una tabla, tenemos que:

ha. Palmito	ha. Brócoli	Total	Ecuación
x	y	100	$x+y=100$
Núm. horas palmito	Núm. horas brócoli	Total	Ecuación
$700x$	$300y$	44 000	$700x+300y=44\,000$

El sistema de ecuaciones formado es: $\begin{cases} x+y=100 \\ 700x+300y=44\,000 \end{cases}$

El sistema equivalente es: $\begin{cases} x+y=100 \\ 7x+3y=440 \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones por **eliminación gaussiana**, se procede así:

Primero, obtenemos la matriz aumentada ubicando los coeficientes de las variables y términos independientes.

$$\begin{array}{l} \text{Fila 1} \\ \text{FIla 2} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 7 & 3 & 440 \end{array} \right)$$

Segundo, verificamos que la fila 1 empiece con el número 1, como es el caso. Entonces, a la fila 2 le restamos la fila 1 multiplicada por 7 que es el coeficiente de x de la fila 2.

Tenemos que transformar a su forma escalonada, es decir, hacer ceros hacia abajo.

$$F2 \to F2-7F1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 0 & -4 & -260 \end{array} \right)$$

Tercero, multiplicamos la fila 2 por $-1/4$. Esta última matriz ya tiene la forma escalonada. Entonces $y=65$.

$$F2 \to -\frac{1}{4}F2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 65 \end{array} \right)$$

Cuarto, reemplazamos el valor de y en cualquier ecuación del sistema.

$$x+65=100, x=35.$$

Solución

La empresa debe plantar 35 ha de palmito y 65 ha de brócoli.

Brócoli, se cultiva en la Sierra de nuestro país.

Competencia matemática

El método de eliminación gaussiana consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente, de forma que este sea escalonado.

Una matriz es un conjunto de elementos ordenados en filas y columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.....a_{2n} \\ \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ a_{m1} & a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$$

¿Sabías qué?

Una matriz derivada de un sistema de ecuaciones lineales es la **matriz aumentada** del sistema. Por ejemplo:

Dado el sistema:

$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

Su matriz aumentada es:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & -4 \end{array} \right|$$

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Indica** la variable que es más fácil despejar en los siguientes sistemas de ecuaciones. **Explica** por qué.

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ y=10-2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

2. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de igualación.

a) $\begin{cases} 2x+5y=16 \\ x+3y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=\dfrac{6-4y}{3} \\ 10x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=\dfrac{4+5y}{2} \\ y=8-4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+9y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4x+3=-y \\ x-8y=38 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+8y=10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x+4y=15 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

3. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de eliminación gaussiana.

a) $\begin{cases} 3x+5y=23 \\ 3x+5y=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x+y=-4 \\ x-y=-14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ 8y=2-4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+6y=2 \\ 7x+y=-29 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-3y=10 \\ -2x-3y=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-5y=-22 \\ 6x+1/2y=-4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 7x+y=-1 \\ x+2y=4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-3y=5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-3y=9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4x-y=-1 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3x+2y=-6 \\ x-y=-2 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x+5y=17 \\ 2x-3y=-5 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 2x+y=-4 \end{cases}$

n) $\begin{cases} m+n+4=0 \\ 3m-n=0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 5a=8b+2 \\ 3a=2b+8 \end{cases}$

4. **Encuentra** la solución de los problemas, utilizando sistemas de ecuaciones lineales.

a) Aníbal compró 87 pelotas de ping-pong en total. Si el número de pelotas verdes es el doble de las pelotas rojas, ¿cuántas pelotas de cada color compró?

b) Martha compró 50 botellas de refrescos entre yogur y gaseosas. Por cada botella de yogur pagó $ 1,50, y por cada botella de gaseosa pagó $ 1,25. En total pagó $ 69,25. ¿Cuántas botellas de gaseosa y de yogur compró Martha?

c) En dos paralelos de décimo de básica hay en total 80 estudiantes. Si del paralelo "A" se pasan 16 estudiantes al paralelo "B", entonces en los dos cursos queda la misma cantidad de estudiantes. ¿Cuántos estudiantes tiene cada paralelo?

d) Juan es filatelista y en su colección tiene 100 sellos muy antiguos de España y Alemania. Él está tratando de comprar 10 sellos alemanes para igualar la cantidad de sellos que posee de ambos países.

¿Cuántos sellos españoles tiene Juan?

e) En una gasolinera el galón de gasolina regular cuesta $ 1,98 y $ 2,30 el de especial. Ayer vendieron 752 galones y recaudaron $ 1 680. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina vendieron ayer?

f) La edad actual de Mario es el triple que la de su sobrino Daniel y, dentro de 10 años, la edad de Mario será el doble que la de Daniel. ¿Qué edad tiene Daniel?

g) El precio de los boletos VIP para un concierto es el doble que el de los boletos normales. Se han vendido 100 entradas VIP y 500 entradas normales y se ha recaudado 70 000 dólares. ¿Cuál es el precio de los boletos?

h) Adrián desea comprar un par de zapatos y una camiseta que en un catálogo tienen un precio de 120 dólares ambos artículos. Llega al almacén y descubre que los zapatos tienen un descuento del 50 % y la camiseta de un 25 % y paga un total de 75 dólares. ¿Cuál era el precio de cada artículo en el catálogo?

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

5. **Resuelvan** los sistemas de ecuaciones lineales por el método que prefieran.

a) $\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 5 \\ 3(y - 1) = 2x - 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x - 1) - 6(y + 2) = 4 \\ 4x - 3(5y - 1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{5} = x - 1 \\ 3x - \dfrac{2x - y}{5} = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{4}x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 11x + 2y = 33 \\ x + \dfrac{1}{11}y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x + 0{,}5y = 2{,}8 \\ 2{,}5x + 0{,}25y = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3(x + y) = 5x + 2y - 4 \\ 7x - 4(x - y) = 3y \end{cases}$

6. **Resuelvan** los siguientes problemas.

a) En la quinta de Emilio hay chanchos y gallinas. En total se contabilizaron 1 610 cabezas y 5 152 patas. ¿Cuántos chanchos y gallinas hay en la quinta de Emilio?

b) Luisa tiene 37 años más que su hija, pero en 14 años tendrá el doble de la edad de su hija. ¿Qué edad tienen ahora ambas?

c) Ricardo tiene ahora 39 años más que Julia, pero en 13 años tendrá el doble que Julia. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

Actividad indagatoria

7. **Indaga** acerca de qué características tiene un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. **Escribe** dos ejemplos y **resuelve** esos sistemas.

8. **Averigua** qué programas informáticos pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales; **practica** la solución de los ejercicios de esta página en alguno de esos programas.

Tema 4

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Método de Cramer

Saberes previos

Reflexiona. ¿Qué sistemas de ecuaciones son incompatibles?

¿Sabías que?

Para aplicar la regla de Cramer a un sistema de ecuaciones, este debe ser compatible determinado, es decir, debe cumplir dos condiciones:

1. El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
2. El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Determinante

Un determinante es una magnitud escalar, es decir, un número asignado a una matriz, y tiene la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

El conjunto formado por $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones lineales compatibles determinados que tiene solución, por lo tanto, es aplicable la regla de Cramer.

Vamos a encontrar la solución del sistema: $\begin{cases} 5x + y \quad = -2 \\ 3x - 12y = -39 \end{cases}$

Para ello procederemos de la siguiente manera:

- Hallamos el determinante del sistema.

$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix}$ Observamos que los números dentro de las barras son los coeficientes correspondientes a x y a y.

Determinante. Un determinante de segundo orden es igual al producto de los términos de la diagonal principal menos el producto de los términos de la diagonal secundaria.

Diagonal secundaria (–)

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = -60 \quad D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = a-3. \text{ Entonces: } D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = -60 - 3 = -63$$

Diagonal principal (+)

- Hallamos el determinante de x (Δx).

Este determinante equivale a colocar en la columna de los coeficientes de x los términos independientes de las ecuaciones.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -39 & -12 \end{vmatrix} = 24 - (-39) = 63$$

- Hallamos el determinante de y (Δy).

Este determinante equivale a colocar en la columna de los coeficientes de y los términos independientes de las ecuaciones:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -39 \end{vmatrix} = -195 - (-6) = -189$$

- Hallamos el valor de x, dividiendo el valor de Δx para el valor del determinante D.

Es decir, $x = \dfrac{\Delta x}{D}$; $x = \dfrac{63}{-63} = -1$

- Hallamos el valor de y, dividiendo el valor de Δy para el valor del determinante D.

Es decir, $y = \dfrac{\Delta y}{D}$; $x = \dfrac{-189}{-63} = 3$

Solución

La solución del sistema es $x = -1, y = 3$, estas satisfacen las ecuaciones del sistema.

Competencia digital

Ingresa el siguiente enlace: *lynk.ec/10m14*

Imprime las páginas 1 a la 5, **practica** sistemas de ecuaciones y **refuerza** todos los métodos.

M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer).

Ejemplo

En un taller se confeccionan carteras y billeteras. Cada prenda debe pasar por el proceso de cortado y cosido. La cantidad de minutos necesarios para cada proceso y prenda se detalla en el siguiente cuadro:

Proceso	Cartera	Billetera
Cortado	45	15
Cocido	30	18

Los obreros que trabajan en la fábrica pueden dedicar hasta 630 minutos a la semana al proceso de cortado y 468 minutos al proceso de cocido. ¿Cuál es la producción semanal de esa fábrica?

Identifiquemos las variables, siendo x: las carteras e y: las billeteras.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 45x + 15y = 630 \\ 30x + 18y = 468 \end{cases}; \text{ el sistema equivalente es: } \begin{cases} 3x + y = 42 \\ 5x + 3y = 78 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, utilizaremos el método de Cramer.

- Hallamos el valor del determinante del sistema.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4$$

- Hallamos el valor del determinante de x (Δx).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 42 & 1 \\ 78 & 3 \end{vmatrix} = 126 - 78 = 48$$

- Hallamos el valor del determinante de y (Δy).

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 5 & 78 \end{vmatrix} = 234 - 210 = 24$$

- Hallamos los valores de x e y.

$x = \dfrac{\Delta x}{D}$	$y = \dfrac{\Delta y}{D}$
$x = \dfrac{48}{4}$	$y = \dfrac{24}{4}$
$x = 12$	$y = 6$

- Verificando la solución, tenemos:

$3x + y = 42$	$5x + 3y = 78$
$3(12) + 6 = 42$	$5(12) + 3(6) = 78$
$42 = 42$	$78 = 78$
Sí se satisface la ecuación.	Sí se satisface la ecuación.

Solución

Se fabrican 12 carteras y 6 billeteras cada semana.

Shutterstock, 377522251

Recuerda que...

Un sistema de ecuaciones incompatible no se puede resolver por el método de Cramer.

Interdisciplinariedad

Matemática e Historia

Gabriel Cramer fue un matemático suizo, profesor de matemáticas de la Universidad de Ginebra durante el periodo 1724-27. En uno de sus tratados publicó la regla de Cramer que es un teorema que se aplica en álgebra lineal. Es de utilidad cuando se busca resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Wikimedia Commons, www.wikipedia.org

Gabriel Cramer.

Indaga sobre Gabriel Cramer y **confecciona** una ficha bibliográfica.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Encuentra** el valor de los siguientes determinantes:

a) $D=\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

b) $A=\begin{vmatrix} -7 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$

c) $B=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

d) $C=\begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$

e) $F=\begin{vmatrix} 1 & 26 \\ -15 & -48 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. **Establece** si los siguientes sistemas son compatibles determinados.

a) $\begin{cases} 4x-4y=12 \\ 7x-y=45 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+10y=78 \\ 8x-3y=43 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+7y=14 \\ 2x+7y=10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+y=-4 \\ 4y=-8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+6y=-1 \\ 4x-5y=0 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-4y=9 \end{cases}$

3. **Identifica** con (V) si los siguientes enunciados son verdaderos o con (F) si son falsos.

a) Un sistema de ecuaciones con tres incógnitas y dos ecuaciones se puede resolver por el método de Cramer.

b) Un determinante tiene una estructura ordenada y su resultado siempre es un escalar o número.

c) Un determinante no puede ser negativo

d) Un sistema con infinitas soluciones puede ser resuelto con la regla de Cramer.

4. **Identifica** el determinante de los coeficientes (D), el determinante de la variable x (D_x) y el determinante de y (D_y) para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$

5. **Selecciona** la respuesta correcta que satisface cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 7x-4y=13 \\ 9x+5y=37 \end{cases}$

A) $x=3;\ y=2$ C) $x=0,\ y=1$

B) $x=2;\ y=-1$ D) $x=2;\ y=3$

b) $\begin{cases} 9x+2y=42 \\ 8x-5y=17 \end{cases}$

A) $x=3,\ y=-4$ C) $x=4;\ y=3$

B) $x=-4,\ y=-3$ D) $x=4;\ y=-3$

c) $\begin{cases} 10x+6y=84 \\ 2x+5y=32 \end{cases}$

A) $x=4; y=6$ C) $x=6; y v -4$

B) $x=6; y=4$ D) $x=4, y=1$

d) $\begin{cases} 3x+y=37 \\ 3x+4y=67 \end{cases}$

A) $x=10,\ y=9$ C) $x=3;\ y=5$

B) $x=-9;\ y=10$ D) $x=9;\ y=10$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 7x-7y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+6y=64 \\ x+6y=34 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+2y=12 \\ 3x+y=16 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+10y=13 \\ 3x+10y=19 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+4y=30 \\ 4x+5y=39 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+8y=10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x-y=5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 5x+4y=15 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-3y=5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-3y=9 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 4x-y=-1 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x+2y=-6 \\ x-y=-2 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 6x+y=24 \\ 3x-2y=12 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 6x-5y=40 \\ 4x+3y=14 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 6x-y=19 \\ x-y=4 \end{cases}$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

7. Encuentren la solución de los sistemas por el método de Cramer y por cualquier otro método estudiado. Luego, **comparen** las soluciones.

a) $\begin{cases} 8x+2y=64 \\ 3x+y=25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-9y=34 \\ 2x+3y=32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x-y=47 \\ x+8y=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x-7y=26 \\ 8x+y=34 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-2y=6 \\ 3x+3y=45 \end{cases}$

8. Resuelvan los siguientes problemas.

a) ¿Cuáles son los números cuya suma es 60 y su diferencia es 12?

b) Un rectángulo tiene un perímetro de 32 *cm* y la longitud de la base es el triple de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? ¿Cuál es el área del rectángulo?

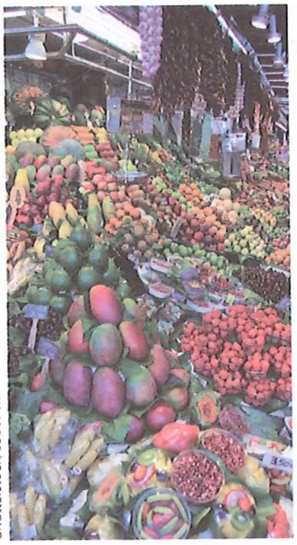
c) La edad de Pepe y la de Sandra suma 64 años. Dentro de 8 años, el mayor tendrá el triple de la edad del menor. ¿Qué edad tienen en la actualidad?

d) Juan le dice a Andrés: "Tu edad es los dos tercios de mi edad aumentada en seis años". Si la suma de sus edades es 61 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

Actividad indagatoria

9. Indaga y **resuelve** por el método de Cramer y por el método gráfico. Alejandro tiene el doble de dinero que Beatriz. Si Alejandro da $ 25 a Beatriz, tiene entonces el doble que Beatriz. ¿Cuánto dinero tiene cada uno al principio?

Tema 5 Problemas con sistemas de ecuaciones



Shutterstock, 35389024

El Ecuador exporta frutas, lo que representa centenas de millones de dólares.

Recuerda que...

Pasos para resolver problemas con sistemas de ecuaciones

- Interpreta el enunciado, identifica los datos y las incógnitas, asigna una variable.
- Plantea las ecuaciones correspondientes.
- Resuelve el sistema e interpreta el resultado.
- Comprueba la solución.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace:
lynk.ec/10m15

Imprime a partir de la página 6 y **practica** problemas con sistemas de ecuaciones.

Saberes previos

Reflexiona. Cuando las rectas que conforman el sistema de ecuaciones son paralelas, ¿existe solución?

Nuestro país exporta a otros países una gran variedad de frutas, como maracuyá y melón.

Una empresa necesita 10 horas para lavar el maracuyá y 30 horas para el empacado. Para lavar el melón se requieren 5 horas, y para empacarlo, 10 horas. Si la empresa, en horas por mes, dispone de 330 para lavado y 900 para empacado, ¿cuántas toneladas de fruta se pueden exportar trimestralmente?

Proceso	Maracuyá (x)	Melón (y)	Tiempo
Lavado	$10x$	$5y$	330
Empacado	$30x$	$10y$	900

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} 10x+5y=330 \\ 30x+10y=900 \end{cases}$

El sistema equivalente es: $\begin{cases} 2x+y=66 \\ 3x+y=90 \end{cases}$

Para resolver el sistema de ecuaciones, podemos utilizar cualquier método. En este caso, utilizaremos el de igualación.

Primero, despejamos la variable y en cada ecuación.

$y = 66 - 2x$ $\qquad$ $y = 90 - 3x$

Segundo, igualamos las ecuaciones despejadas y encontramos el valor de la incógnita.

$66 - 2x = 90 - 3x; x = 24$

Tercero, reemplazamos el valor de x en cualquier ecuación.

$2(24) + y = 66; y = 66 - 48; y = 18$

Solución

La empresa puede exportar trimestralmente, 24 toneladas de maracuyá y 18 toneladas de melón.

Ejemplos

a) Un hotel dispone de 116 habitaciones, unas con dos camas y otras con una cama. En total hay 200 camas disponibles. ¿Cuántas habitaciones dobles y simples tiene el hotel?

Definimos las variables y ordenamos los datos en una tabla x: habitaciones dobles, y: habitaciones simples

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} x+y=116 \\ 2x+y=200 \end{cases}$

M.4.1.56. Resolver y plantear problemas, de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Resolviendo por eliminación gaussiana, tenemos:

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 116 \\ 2 & 1 & 200 \end{array}\right); f_2 \to f_2 - 2f_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 116 \\ 0 & -1 & -32 \end{array}\right)_1$$

Multiplicando la fila 2 por -1, obtendremos:

$y = 32$. Reemplazando ese valor en la primera ecuación, hallaremos el valor de x.

$x + 32 = 116; x = 84$

Solución

Existen 84 habitaciones dobles y 32 habitaciones simples.

b) En la finca de Mateo hay vacas y gallinas. En total se contabilizaron 20 cabezas y 64 patas. ¿Cuántas vacas y gallinas hay en la finca de Mateo?

Identificamos las variables: x = vacas, y = gallinas.

Organizamos los datos en una tabla.

	Vacas (x)	Gallinas (y)	Total
Núm. cabezas	x	y	20
Núm. patas	$4x$	$2y$	64

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 64 \end{cases}; \text{ el sistema equivalente es: } \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + y = 32 \end{cases}$$

Para resolver el sistema, utilizaremos el método de Cramer:

- Hallamos el determinante del sistema D.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

- Hallamos los determinantes Δx y Δy.

Determinante Δx	Determinante Δy
$\Delta x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 32 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 32 = -12$	$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 32 \end{vmatrix} = 32 - 40 = -8$

- Hallamos los valores de x y y.

Valor de x	Valor de y
$x = \dfrac{\Delta x}{D}$	$y = \dfrac{\Delta y}{D}$
$x = \dfrac{-12}{-1}$	$y = \dfrac{-8}{-1}$
$x = 12$	$y = 8$

Solución

Existen 12 vacas y 8 gallinas en la finca.

Interdisciplinariedad

Matemática y Emprendimiento

Los sistemas de ecuaciones lineales se usan en el comercio para relacionar ganancias y porcentajes: en la industria, para indicar situaciones de mezcla de materiales y su solución (que corresponde a condiciones óptimas); en geometría, para indicar las regiones limitadas por líneas rectas.

Shutterstock, 410875603

Competencia socioemocional

Si no logras llegar a la respuesta de un ejercicio o problema, no te desanimes; vuelve a intentarlo; sé perseverante y no te rindas.

Interculturalidad

El sistema de numeración secoya, en su proceso oral, utiliza los dedos de las manos y de los pies. Para contar los números del 1 al 5, comienzan por el dedo meñique de la mano izquierda, palma arriba.

I.M.4.3.5.

1. **Resuelve** los siguientes problemas utilizando el método de igualación.

a) La suma de las edades de Luisa y Arturo es 45. La edad de Luisa es 1/3 de la suma de la edad de Luisa y Arturo. ¿Qué edad tienen Luisa y Arturo?

b) Una tarea de Matemática consta de 12 preguntas. El sistema de evaluación de la escuela otorga al alumno 2 puntos por cada pregunta incorrecta o no contestada, y 5 puntos por cada respuesta correcta. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente un alumno que obtuvo 45 puntos por su tarea?

c) Un comerciante compró con $ 1 200, un total de 40 kits. de herramientas para trabajos electrónicos de una marca y 20 de otra. Al vender los kits de la primera marca ganó un 40 %, pero perdió un 5 % al vender los de la otra marca. Al finalizar las ventas, su ganancia total fue de $ 210. ¿Cuál es el precio de compra de los 40 kits de la primera marca?

d) Una fábrica de muebles produce mesas y sillas. Cada mueble requiere de corte de armado y acabado. La cantidad de horas mensuales necesarias para cada operación y mueble se encuentra en la siguiente tabla:

Proceso	Mesas	Sillas
Armado	8	6
Acabado	6	3

Los obreros de la fábrica pueden dedicar 370 horas al armado y 225 al acabado. ¿Cuántos muebles de cada tipo produce mensualmente esta fábrica?

e) Roberto y Mónica tienen, entre los dos, $ 350. La media de lo que tiene Roberto más lo de Mónica es $ 225. ¿Qué cantidad de dinero tiene cada uno?

2. **Problema-decisión. Resuelve** el problema.

Cristian y Daniela planifican salir cada fin de semana. El primer fin de semana quieren ir a jugar bolos y reúnen entre los dos $ 76. El segundo fin de semana, deciden realizar una parrillada. Para ello, Daniela aporta el triple de lo que aportó antes, y Cristian el doble, reuniendo $ 194. ¿Qué cantidad de dinero tiene cada uno?

Si conoces que Cristian y Daniela tienen la semana siguiente el examen final de Matemática. ¿Qué le aconsejarías: salir o prepararse para el examen? **Justifica.**

3. **Resuelve** los siguientes problemas, utilizando el método de eliminación gaussiana.

a) En una fábrica se tiene una olla con aceite a una temperatura de 160 °C. A la olla se añade aceite a 40 °C hasta completar su capacidad de 50 litros, obteniéndose una temperatura de 100 °C. ¿Cuál es la cantidad de aceite que había en la olla y cuánto se añadió?

b) Un maestro albañil trabajó 24 días en dos casas. Por trabajar en la primera casa recibió $ 10 diarios y $ 30 por trabajar en la otra. Si a fin de mes el maestro recibió $ 600 por ambos trabajos, ¿cuántos días trabajó en cada casa?

c) **Calcula** un número sabiendo que la suma de sus dos cifras es 38, si el doble del primero más cinco veces el segundo número da como resultado 145. ¿Cuáles son esos números?

d) La distancia entre Quito y Guayaquil es de 268 *km*. Un coche sale desde Quito hacia Guayaquil a una velocidad de 100 *km/h*. Al mismo tiempo, sale otro coche de Guayaquil hacia Quito a una velocidad de 80 *km/h*. Suponiendo que su velocidad es constante, ¿cuál es el tiempo que tardan en encontrarse y la distancia que han recorrido al momento del encuentro?

e) En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 26° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus dos ángulos agudos?

f) La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es 6 *cm* y su área mide 30 cm^2. ¿Cuál es la longitud de sus bases?

4. **Resuelve** los siguientes problemas, utilizando el método de Cramer.

a) Matías va al mercado y compra 5 manzanas y 4 mandarinas por \$ 5. Si después va Carlos y compra 5 manzanas y 6 mandarinas por \$ 6, ¿cuánto cuesta cada manzana y cada mandarina?

b) En un almacén se venden televisores y lavadoras. Para las fiestas navideñas, se han realizado promociones: dos televisores más una lavadora cuestan \$ 1 000 o un televisor más una lavadora, \$ 700. ¿Cuánto cuestan cada televisor y cada lavadora?

c) En una universidad se toman exámenes con 20 preguntas. Marta ha obteniendo 8 puntos. Si cada acierto vale 1 punto y cada error resta 2 puntos, ¿cuántas preguntas ha acertado y fallado Marta?

d) Por un servicio de telefonía fija una empresa paga un importe fijo más uno variable por minuto. El mes pasado la empresa pagó \$ 70 por 200 minutos y este mes \$ 100 por 300 minutos. ¿Cuál es el costo fijo y el precio de cada minuto?

e) Un equipo de baloncesto anotó 60 canastas en un partido, logrando así un total de 130 puntos. Conociendo que en este juego las canastas desde corta distancia valen 2 puntos y las de larga distancia 3, ¿cuántas canastas de cada tipo anotaron sus jugadores?

f) Una compañía de telefonía móvil incluye en su tarifa una cantidad fija más el costo por minuto de llamada. El mes pasado, Diego pagó una factura de 60 dólares por un consumo de 100 minutos, mientras que la de este mes asciende a 50 dólares por un consumo de 80 minutos. ¿Qué valor tiene la tarifa fija y cuánto cuesta un minuto de llamada?

g) **Calcula** las dimensiones de un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base, si su perímetro es de 24 cm.

h) **Problema-decisión. Resuelve.**

Maritza compró un teléfono celular y un computador portátil por 2 000 dólares y, luego, los vendió. Así, obtuvo una ganancia de 260 dólares. ¿Cuánto le costó cada objeto, si en la venta del computador tuvo una ganancia del 10 % y en la venta del teléfono ganó el 15 %?

Imagina que eres Maritza y tienes problemas financieros, por lo que debes elegir entre vender el celular o el computador. ¿Qué decisión tomarías? **Justifica.**

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

5. **Resuelvan** los siguientes problemas, utilizando el método que consideren más apropiado.

a) En una cafetería, por un helado y cuatro batidos cobraron \$ 13. Otro día, por cuatro helados y dos batidos cobraron \$ 10. ¿Cuánto cuesta cada helado y cada batido?

b) En la empresa El baratón se fabrican dos tipos de productos: cocinas y refrigeradoras. Se sabe que para la producción se sigue el proceso de corte y el proceso de ensamblaje. Si para la cocina se necesitan 6 horas de corte y 5 de ensamblaje, y para la refrigeradora 4 horas de corte y 6 de ensamblaje, ¿cuántas cocinas y refrigeradoras se producirán al mes, sabiendo que se dispone de 96 horas para el corte y 104 para el ensamblaje?

Actividad indagatoria

6. **Indaga** dos formas de resolver los siguientes problemas.

a) Jesús y Patricia fueron a una librería. Jesús compró 2 textos y 5 esferos por un costo total de \$ 36, mientras que, Patricia adquirió 3 textos de los que compró Jesús y 7 esferos iguales, por un valor de \$ 53. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

b) Andrea ha roto su alcancía y encuentra que tiene 40 monedas en total entre monedas de 50 y 25 centavos. Si en total tiene 15 dólares, ¿cuántas monedas de cada valor tiene?

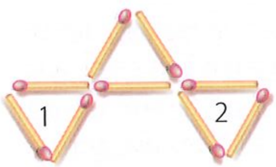
Tema 6 Congruencia de triángulos

¿Sabías que?

El símbolo de congruencia es: ≅

Para denotar que dos triángulos son congruentes, se escribe:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$



Recuerda que...

Esta es la clasificación de los triángulos según sus lados:

Equilátero:

- Los tres lados son congruentes.
- Sus tres ángulos son iguales a 60 °.

Isósceles:

- Exactamente dos de sus lados son congruentes.
- Dos de sus ángulos son congruentes.

Escaleno:

- Ninguno de sus lados son iguales.
- Sus tres ángulos son diferentes.

Saberes previos

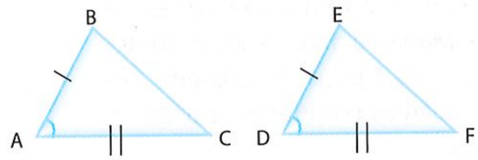
Analiza y **responde**: ¿Cuándo dos triángulos son congruentes?

En una actividad, la profesora de Matemática les pide a sus estudiantes analizar el gráfico de la izquierda y les hace la siguiente pregunta: ¿cómo se puede saber si los triángulos 1 y 2 son congruentes?

Los postulados de la congruencia de triángulos son:

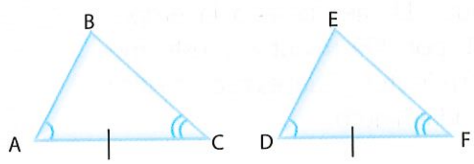
Lado – ángulo – lado (LAL)

Dos triángulos son congruentes si sus dos lados y el ángulo determinado entre ellos son respectivamente congruentes.



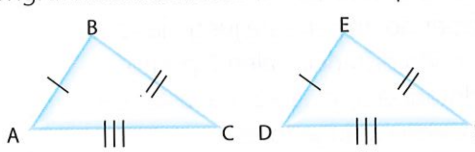
Ángulo – lado – ángulo (ALA)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a ellos respectivamente congruentes.



Lado – lado – lado (LLL)

Dos triángulos son congruentes si tiene sus tres lados respectivamente congruentes.



Dos triángulos son congruentes si sus ángulos correspondientes tienen la misma medida, y sus lados homólogos miden lo mismo.

A continuación, resolveremos la pregunta planteada anteriormente.

Utilizando los siguientes postulados de congruencia de triángulos, podemos conocer si los triángulos 1 y 2 son congruentes.

Los lados congruentes son:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

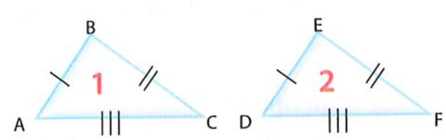
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Los ángulos congruentes son:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$

$\measuredangle B \cong \measuredangle E$

$\measuredangle C \cong \measuredangle F$

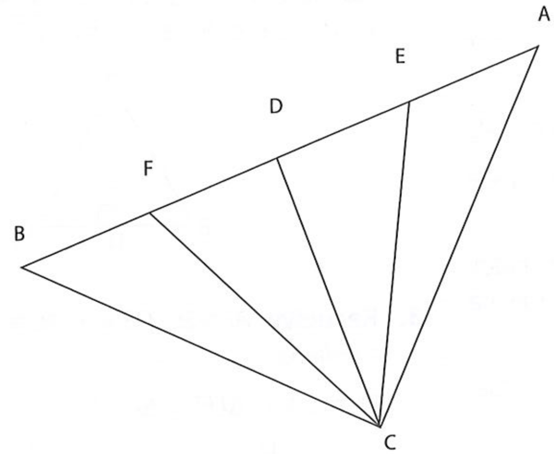


Por lo tanto, el triángulo 1 y 2 son congruentes.

M.4.2.9. Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo con criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

Ejemplos

a) En la figura, se tiene un triángulo ABC isósceles (AC = BC) y se ha dividido su base AB en cuatro partes iguales.



¿Son congruentes los triángulos ΔACE y ΔFCB? Demostrar.

Demostración	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{AC} \cong \overline{CB}$	1. Dato
2. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$	2. Propiedad del triángulo isósceles
3. $\overline{AE} \cong \overline{FB}$	3. Propiedad reflexiva
4. $\Delta ACE \cong \Delta$CFB	4. LAL

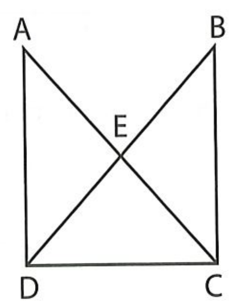
Conclusión: los triángulos ΔACE y ΔFCB son congruentes.

¿Sabías que?

Estos son los postulados de congruencia para triángulos rectángulos:

- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen los catetos respectivamente congruentes.
- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruente.
- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruente.
- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes.

b) En la figura se conoce que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, ¿cuál de los postulados permite afirmar que ΔDCA y ΔCDB son congruentes?



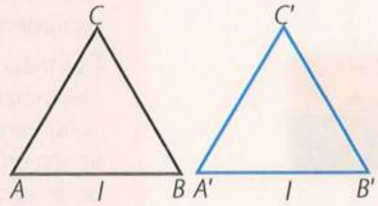
Demostración	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\overline{DC} \cong \overline{DC}$	2. Propiedad reflexiva
3. $\Delta DCA \cong \Delta CDB$	3. LLL

Conclusión: los triángulos son congruentes.

Taller Evaluación formativa

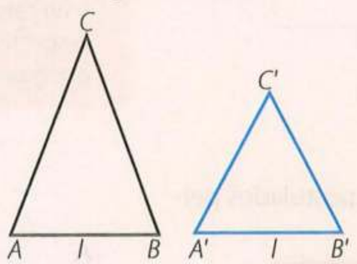
I.M.4.5.1

1. **Analiza** cada proposición y **determina** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
   a) El triángulo isósceles tiene sus tres ángulos de la misma medida.
   b) El triángulo equilátero está formado por tres lados del mismo tamaño.
   c) Uno de los postulados de congruencia es LAL.
   d) La congruencia de dos triángulos se puede demostrar con AAA.
   e) El triángulo escaleno tiene sus tres lados iguales como sus tres ángulos de la misma medida.
   f) Todos los triángulos equiláteros con igual base son congruentes.



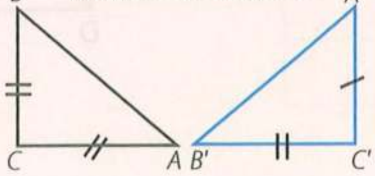
   g) Todos los triángulos isósceles con igual base (lado diferente a los demás) son congruentes.

Triángulos isósceles



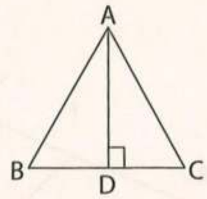
   h) Todos los triángulos rectángulos con iguales catetos son congruentes.

Triángulos rectángulos



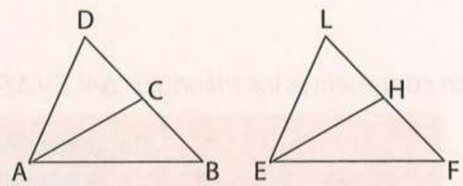
2. **Responde**. ¿Qué postulado de congruencia de triángulos puedes utilizar para demostrar que los triángulos ΔABD y ΔACD son congruentes?

   Considera que ΔABC es isósceles y $\overline{AD}$ divide en dos partes iguales al lado $\overline{BC}$.



3. **Resuelve**: $AB \cong EF$, $DB \cong LF$, $AC \cong EH$, AC y EH son medianas.

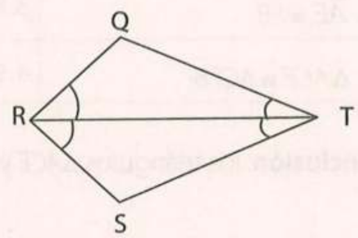
   Demostrar: $\Delta LEF \cong \Delta ABD$



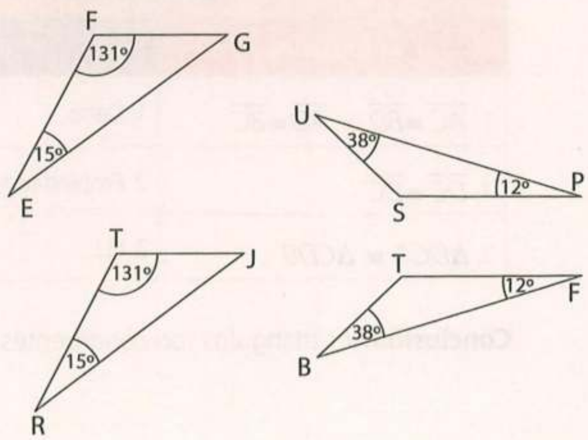
4. **Demuestra** la congruencia de los siguientes triángulos:

   $\overline{RT}$ biseca a los ángulos $\angle QRS$ y $\angle QTS$.

   Demuestra que: $\Delta RTQ \cong \Delta RTS$



5. **Observa** y **completa** las congruencias de lados y ángulos de acuerdo con las siguientes figuras:



a) RT ≅

b) GF ≅

c) US ≅

d) FT ≅

e) PU ≅

f) ∢R ≅

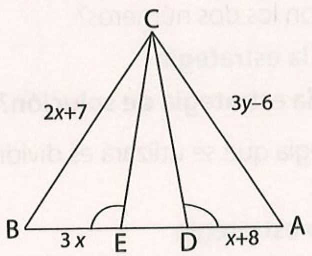
g) ∢T ≅

h) ∢P ≅

i) ∢S ≅

j) ∢U ≅

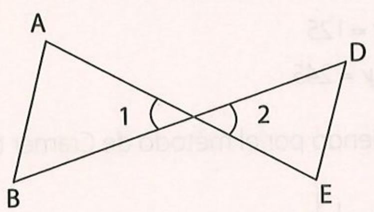
6. **Responde**: ¿qué valores toman las incógnitas *x*, y si se conoce que $\Delta DCA \cong \Delta CEB$?



7. **Demuestra** la congruencia de los siguientes triángulos:

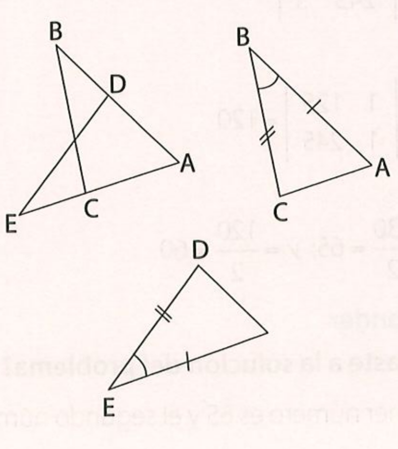
En la figura *AE* y BD se bisecan, ∡1≅ ∡2

a) **Demuestra** que: $\Delta ABC \cong \Delta EDC$

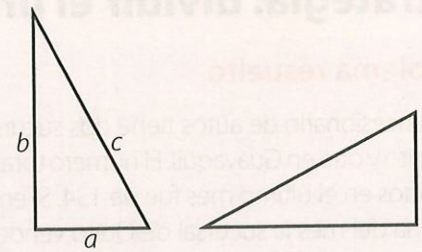


b) **Demuestra** que el $\Delta ABC \cong \Delta ADE$.

En los triángulos las partes congruentes están marcadas:



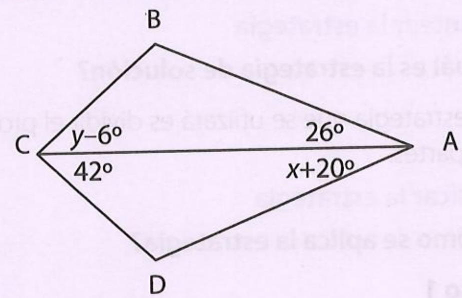
8. Los triángulos mostrados son congruentes. **Nombra** sus lados correspondientes con las letras *a*', *b*' y *c*' de forma que $a \cong a'$, $b \cong b'$, y $c \cong c'$.



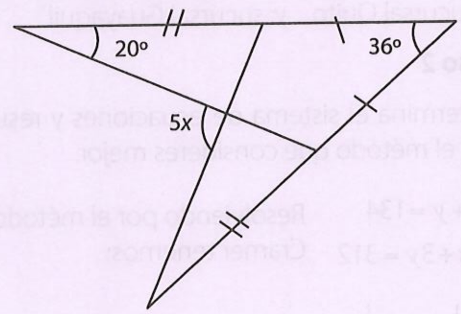
Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

9. **Calculen** los valores de *x*, *y*, sabiendo que los triángulos *ABC* ≅ *ADC*.

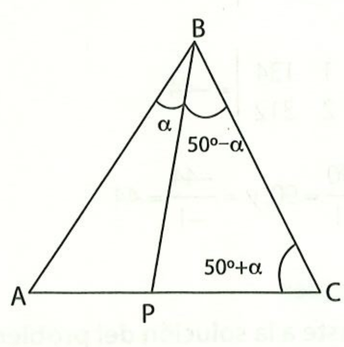


10. **Hallen** el valor de *x*.



Actividad indagatoria

11. **Indaga** y **encuentra** el valor de α, si $\overline{BP} \cong \overline{BC}$.



Estrategia: dividir el problema en partes

Problema resuelto

Un concesionario de autos tiene dos sucursales, una en Quito y otra en Guayaquil. El número total de autos vendidos en el último mes fue de 134. Si en la última semana del mes la sucursal de Quito vende el doble y la de Guayaquil, el triple, sumando así 312 autos, ¿cuántos coches ha vendido en el mes cada sucursal?

1. **Comprender el problema**

   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿Cuántos coches en el mes ha vendido cada sucursal?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   La estrategia que se utiizará es dividir el problema en partes.

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

   Paso 1

   Determina las variables del problema.

   x: sucursal Quito y: sucursal Guayaquil

   Paso 2

   Determina el sistema de ecuaciones y resuélvelo por el método que consideres mejor.

   $$\begin{cases} x+y=134 \\ 2x+3y=312 \end{cases}$$

   Resolviendo por el método de Cramer tenemos:

   $$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$$

   $$\Delta x=\begin{vmatrix} 134 & 1 \\ 312 & 3 \end{vmatrix}=-90$$

   $$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 134 \\ 2 & 312 \end{vmatrix}=-44$$

   $$x=\frac{-90}{-1}=90; y=\frac{-44}{-1}=44$$

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   La sucursal de Quito vendió 90 autos y la sucursal de Guayaquil vendió 44 autos.

Problema resuelto

La suma de dos números es 125. El primer número aumentado en 3 más el triple del segundo número da 245. ¿Cuáles son los dos números?

1. **Comprender el problema**

   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿Cuáles son los dos números?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   La estrategia que se utiizará es dividir el problema en partes.

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

   Paso 1

   Determina las variables del problema.

   x: Primer número y: Segundo número

   Paso 2

   Determina el sistema de ecuaciones y resuélvelo por el método que consideres mejor.

   $$\begin{cases} x+y=125 \\ x+3y=245 \end{cases}$$

   Resolviendo por el método de Cramer tenemos:

   $$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2$$

   $$\Delta x=\begin{vmatrix} 125 & 1 \\ 245 & 3 \end{vmatrix}=130$$

   $$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 125 \\ 1 & 245 \end{vmatrix}=120$$

   $$x=\frac{130}{2}=65; y=\frac{120}{2}=60$$

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   El primer número es 65 y el segundo número es 60.

Problemas propuestos

1. Hemos comprado 3 borradores blancos y 2 borradores de esfero por \$ 3,25. Sara compró 2 borradores blancos y 5 de los de esfero por \$ 4. Determinar el precio de cada clase de borrador.

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

2. Carlos, que tiene un bazar, vende unos clips de plástico que cuestan \$ 6 el kilo, y otros clips de metal que cuestan \$ 4 el kilo. Decide mezclarlas y venderlas a \$ 5,4 el kilo. Si en total quiere preparar 5 kg, ¿qué cantidad de cada tipo tendrá que mezclar?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

3. Carla tiene que distribuir los cuyes en las jaulas, pero se desconoce la cantidad de jaulas y de cuyes. La relación que se conoce es que ,si colocamos 5 cuyes por jaula, faltan 2 cuyes por colocar, mientras que si colocamos 7 cuyes por jaula podríamos comprar 4 cuyes más. ¿Cuántas jaulas y cuyes hay?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

4. Juan José realiza una prueba de 50 preguntas, en la que las respuestas correctas sumaban 0,5 puntos y las no contestadas o incorrectas restaban 0,15. Si la nota final fue de 15,25, ¿cuántas preguntas se contestaron correctamente?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

5. Un kilogramo de trigo contiene 1,2 lb de carbohidratos y 0,6 lb de proteínas, mientras que 1 kg de maíz contiene 0,9 lb de carbohidratos y 0,8 lb de proteínas. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo se necesitan para elaborar un pienso que contenga 123 lb de carbohidratos y 86 lb de proteínas?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

6. En un almacén hay 40 artículos que se deben vender a \$ 10 cada uno, pero como algunos están defectuosos, se venden con una rebaja del 10 % de su precio. El resto se vende al 150 % de su precio, con lo que se obtiene una ganancia de \$ 128. ¿Cuántos artículos estaban defectuosos?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

7. La diferencia de dos números es la mitad de su suma. El número mayor tiene 6 unidades más que el doble del menor. ¿Cuáles son los números?

   a) Comprender el problema.

   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

   d) Responder.

8. La razón entre dos números es igual a 3. Si al mayor se le resta 40 y al menor se le suma 40, la razón entre ambos sería ahora igual a 1. **Determina** los números.

   a) Comprender el problema.

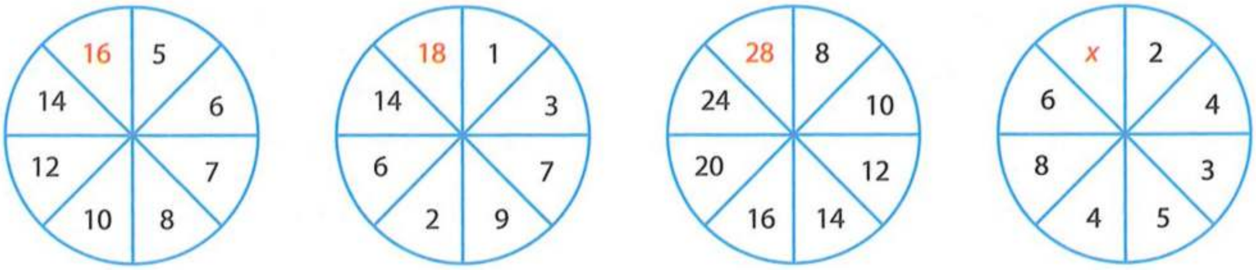
   b) Plantear la estrategia.

   c) Aplicar la estrategia.

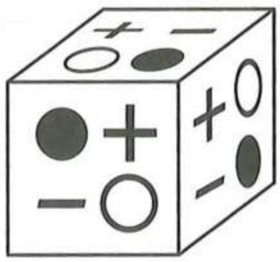
   d) Responder.

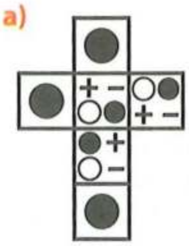
Razonamiento numérico

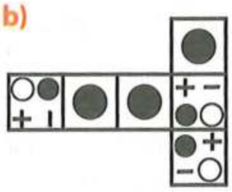
1. **Observa** los valores de cada espacio y **encuentra** el valor de *x*.

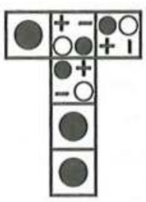


2. ¿Cuál alternativa pertence al cubo dibujado en dos planos?

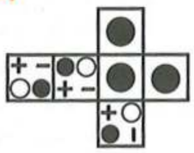


a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Cálculo mental

Multiplicar un número por 25

Debo aumentar 2 ceros al número que deseo multiplicar y después divido para 4.

a) 94 • 25 = 9 400 ÷ 4 = 2 350

b) 24 •25 = 2 400 ÷ 4 = 600

c) 49 • 25 = 4 900 ÷ 4 = 1 225

d) 36 • 25 = 3 600 ÷ 4 = 900

e) 110 • 25 = 11 000 ÷ 4 = 2 750

Ahora, hazlo tú.

a) 80 • 25 =

b) 42 • 25 =

c) 25 • 25 =

d) 66 • 25 =

e) 102 • 25 =

f) 32 • 25 =

g) 45 • 25 =

Feria de historias inéditas

Áreas asociadas al proyecto: Matemática, Emprendimiento y Gestión

Justificación / problemática

Desde hace más de 20 años, la Unesco promueve el 23 de abril como el Día Internacional del Libro con el objetivo de fomentar la lectura, la industria editorial y la protección de la propiedad intelectual. En el Ecuador, cada ecuatoriano lee medio libro por año, según datos del Centro Regional para el Fomento del Libro en América Latina y el Caribe (CERLALC), publicado en 2012, uno de los índices más bajos en relación con los 5,4 libros leídos por año, por persona, en Chile. Según un informe de indicadores de lectura de la CERLALC, el Ecuador tiene un 43 % de población lectora, frente al 92 % en España o al 77 % en Colombia. De ese porcentaje de lectores, el 52,2 % dedica su tiempo a la lectura de libros, mientras que un 37,7 % lee periódicos y un 3,7 %, revistas. El mismo estudio revela que en el país aún hay preferencia por la lectura en su formato tradicional, es decir, libros, periódicos y revistas en papel, y que al menos la mitad de los lectores ecuatorianos lo hacen por el gusto y el hábito de la lectura.

Shutterstock, 273331367

Texto adaptado de: http://www.elcomercio.com/tendencias/lectura-ecuador-libro-habitos-cultura.html

Objetivo

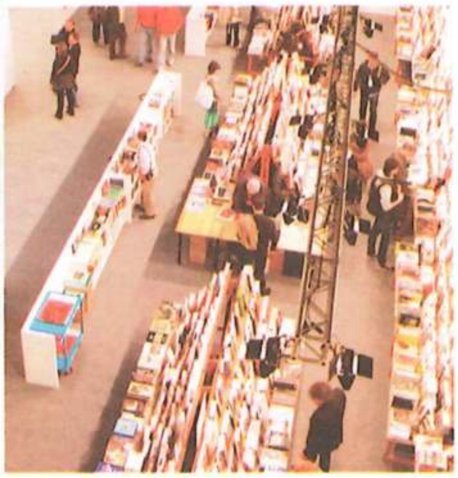
Crear un cuento y un cómic inédito para fomentar la creatividad y el hábito de la lectura en los estudiantes. Determinar el costo de cada cuento y cómic mediante un sistema de ecuaciones lineales para venderlos en una feria organizada por el grado en su colegio.

Recursos

- Cuento y cómic inédito impreso
- Espacio para realizar la feria del historias inéditas

Actividades

- **Formen** grupos de trabajo. Luego **piensen** y **escriban** una historia inédita de diez páginas y un cómic.
- **Impriman** las historias en un formato atrayente para ser vendido.
- **Determinen** dos promociones: por ejemplo, una historia más un cómic por $ 1, y dos historias más un cómic por $ 1,25.
- Con base en esas promociones, mediante un sistema de ecuaciones lineales, **determinen** el costo de cada historia y de cada cómic.
- **Realicen** una feria de historias con sus compañeras y compañeros.



Shutterstock, 104850983

Evaluación

1. ¿Qué es lo más importante que aprendiste con el desarrollo de este proyecto?
2. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿obtuviste el costo de cada artículo?
3. ¿Qué conclusión puedes obtener de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Las compras

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Situación cotidiana

Para encontrar valor de medida, se usan cantidades numéricas, costos. Muchas ocasiones nos vamos de compras y no sabemos cuánto pagamos por cada artículo; podemos chequear la factura pero, si se nos ha confundido, utilizamos un sistema de ecuaciones.

Shutterstock, 1414757933

César pagó $ 50 por 3 cajas de tacos fisher y 5 cajas de clavos. Valeria compró 5 cajas de tacos fisher y 7 cajas de clavos, y pagó $ 74. ¿Cuál es el precio de cada caja de tacos y cada caja de clavos?

Reflexiona

- ¿Qué precio aproximado tendría cada caja de tacos o clavos?

Él compró la caja de los clavos en $ 5 y la de los tacos fisher en $ 7.

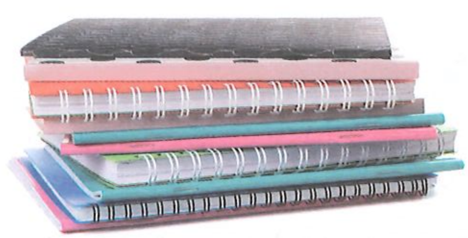
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si el total de pago que realizan César y Valeria se duplica, ¿cambia el precio de cada caja? Comprueba tu respuesta.

Resuelve las situaciones

- Roberto compró 5 entradas para un concierto y 7 para el teatro y pagó $ 241. Lorena compró en cambio 9 entradas para el concierto y 3 para el teatro y le costaron $ 236. ¿Cuánto cuesta la entrada a cada espectáculo?

Shutterstock, 535395199

- Una empresa ha gastado $ 1 170 en comprar localizadores a cada uno de sus 30 empleados. Si había dos modelos (el uno costaba $ 75 y el otro, $ 30), ¿cuántos localizadores de cada modelo compró?
- Tomás y Alejandro van a una papelería para comprar cuadernos y carpetas. Por cinco cuadernos y tres carpetas, Tomás paga 19,50 dólares; Alejandro, en cambio, por seis cuadernos y una carpeta cancela la misma suma de dinero. ¿Cuál es el valor de cada artículo que han comprado?



Shutterstock, 1778603549

Tema: Construyendo con triángulos

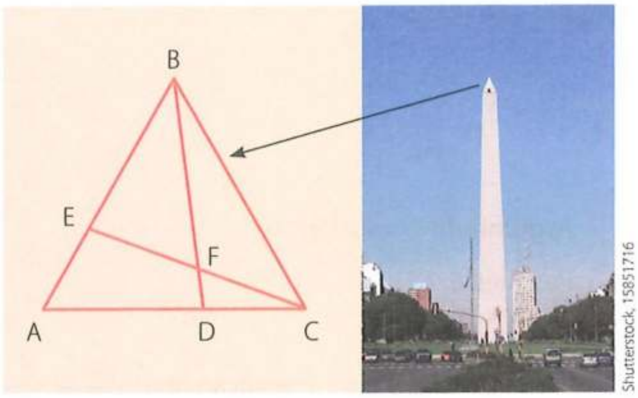
Congruencia de triángulos

Situación cotidiana

Utilizamos los postulados de congruencias de triángulos y otras reglas de la geometría para construir casas o monumentos.

Se desea terminar de construir el obelisco, para lo cual se necesita calcular las medidas antes de comprar el material. El esquema de la punta es un triángulo ABC a escala, que es equilátero. Además, se tienen los siguientes datos: CD = AE, EF = 6 y BD = 11, calcula CF.

CF mide 5.

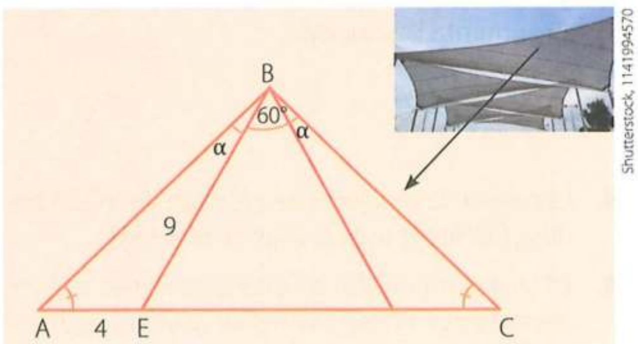


Reflexiona

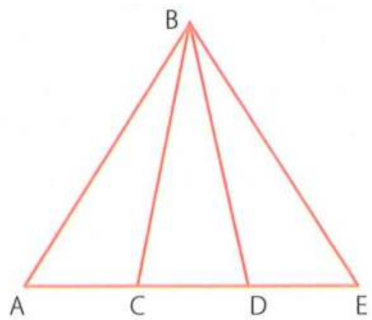
- ¿En qué momentos de la vida cotidiana crees que se utilizan los postulados de congruencia?
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- ¿Cuáles son los triángulos congruentes que encontraste? Dibuja y marca los datos y el postulado que determinó que son congruentes.

Resuelve las situaciones

- Para reforzar un techo elaborado con varios triángulos en el jardín, se usa un esquema para calcular las varillas que le darán seguridad al techo. Calcula el segmento EC, si sabes que AE = 4 y BE = 9.

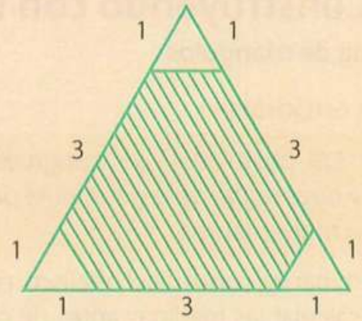


- Martina necesita realizar varios banderines triangulares de tela. Dispone de varios cortes en forma de triángulos equiláteros como el de la figura. Si se divide la base en tres partes iguales y se hace los cortes indicados, ¿Martina obtendrá dos triángulos iguales?



Olimpiadas matemáticas

1. ¿Qué porcentaje del área del triángulo es la parte sombreada de la figura?



Argumenta la solución:

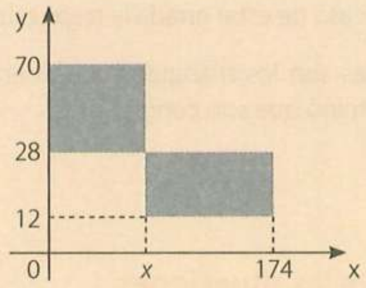
Respuesta:

2. Los números a y b $\neq -1$; verifican que $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1$. Entonces, el producto ab, ¿cuánto vale?

Argumenta la solución:

Respuesta:

3. En el plano cartesiano, las áreas de los dos rectángulos grises son iguales. Hallar la coordenada x.



Argumenta la solución:

Respuesta:

Recuperado de: www.canguromat.org.es

4. La cabina de pasajeros de un avión tiene 108 asientos. Hay un asiento vacío por cada dos asientos ocupados. ¿Cuántos pasajeros hay en el avión?
5. En una competición de atletismo tienes que recorrer 10 km. Cuando has recorrido 9 641 metros, 3 456 decímetros y 12 340 milímetros te tienes que detener, agotado y sin poder continuar. ¿Cuántos centímetros te faltan para llegar a la meta?
6. La longitud de un campo rectangular es 80 m y su área 3 200 m^2. **Halla** la longitud de otro campo rectangular cuya área y anchura son, respectivamente, la mitad que las del primero.
7. Un octavo de los invitados a una boda eran niños y niñas. Tres séptimos de los adultos eran hombres. ¿Qué fracción de los invitados a la boda eran mujeres adultas?
8. La suma de los cuadrados de tres enteros consecutivos es 770. ¿Cuál es el mayor de los enteros?
9. Felipe desea escoger tres días de la semana para su entrenamiento, pero de manera que no haya días consecutivos. ¿De cuántas formas lo puede hacer?

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Indica cuál de las siguientes expresiones no es equivalente a la ecuación $x - 2y = 3$:

Escoge la respuesta correcta.

a) $x - 3 = 2y$
c) $y - 2(y + 1) = 1$
b) $x + y = (y + 3)$
d) $2y = x - 3$

2. Lee y analiza.

En la ecuación $x - 2y = 3$ existe una solución en la que x vale 5 y "y" vale:

Escoge la respuesta correcta.

a) -2
b) 1
c) 3
d) 2

3. Lee y analiza.

El par $(-1, -3)$ es solución de la ecuación $2x + y = a$. En este caso "a" vale:

Escoge la respuesta correcta.

a) -1
c) 1
b) 0
d) -5

4. Lee y analiza.

Por 2 latas de refresco y 3 bolsas de patatas me han cobrado cinco dólares. ¿Cuál de las siguientes expresiones no puede representar la frase anterior?

Escoge la respuesta correcta.

a) $2x + 3y = 5$
c) $3x + 2y = 5$
b) $3x + 5y = 2$
d) $3x - 5 = 2y$

5. Lee y analiza.

¿Cuál se las siguientes ecuaciones formaría un sistema compatible indeterminado con la ecuación $2x - 3y = 2$?

Escoge la respuesta correcta.

a) $-4x + 6y = -4$
c) $6x - 9y = 3$
b) $3x - 2y = 2$
d) $4x - 6y = 3$

6. Lee y analiza.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Escoge la respuesta correcta.

a) Sol (0,0)
c) Infinitas soluciones
b) Sol (3,8)
d) No tiene solución

7. Lee y analiza.

Calcula un número si sabes que la suma de sus dos cifras es 9, y que, si invertimos el orden de dichas cifras, el número obtenido es 45 unidades menor que el inicial:

Escoge la respuesta correcta.

a) 72
c) 13
b) 27
d) 31

8. Lee y analiza.

Un rectángulo tiene de perímetro 34 unidades. Su largo mide 7 unidades más que el ancho. Determina las medidas del rectángulo:

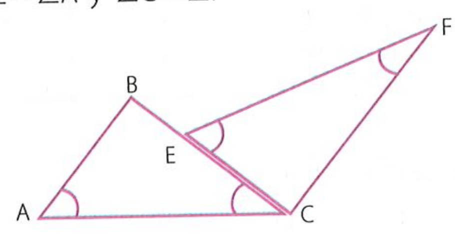
Escoge la respuesta correcta.

a) largo 19, ancho 12
c) largo 26, ancho 12
b) largo 12, ancho 5
d) largo 19, ancho 5

9. Lee y analiza.

Determina BE si $AC = EF$, $AB = 7$ y $CF = 12$:

$\angle E = \angle A$ y $\angle C = \angle F$



Escoge la respuesta correcta.

a) 2
c) 5
b) 4
d) 7

10. Lee y **analiza**.

Si en un cuadrilátero de lados iguales se trazan sus diagonales, las cuales también son iguales, se forman:

Escoge la respuesta correcta.

a) Cuatro triángulos equiláteros congruentes

b) Cuatro triángulos rectángulos escalenos

c) Cuatro triángulos rectángulos isósceles congruentes

d) Cuatro triángulos obtusángulos congruentes

11. Lee y **analiza**.

Si en un triángulo ABC, isósceles y rectángulo en C, se traza CD perpendicular AB, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

Escoge la respuesta correcta.

a) BAC ≅ BCD

b) ΔADC ≅ ΔBDC

c) AD ≅ DB

d) AD ≅ CA

12. Lee y **analiza**.

¿En qué triángulo al trazar cualquier bisectriz se forman dos triángulos congruentes?

Escoge la respuesta correcta.

a) Rectángulo isósceles

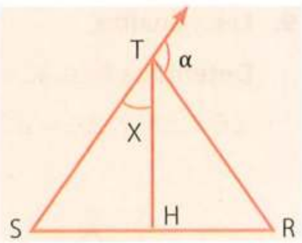
b) Rectángulo escaleno

c) Equilátero

d) Ninguno

13. Lee y **analiza**.

En el triángulo SRT, TH es la altura, $\alpha = 120°$ y $\beta = 130°$. ¿Cuál es la medida del ángulo X y del ángulo S?



Escoge la respuesta correcta.

a) X = 10° y S = 80°

b) X = 20° y S = 70°

c) X = 30° y S = 60°

d) X = 40° y S = 50°

14. Lee y **analiza**.

En un rectángulo ABCD que mide de largo 8 y de ancho 4, se trazan las diagonales cuyo punto de corte es E, ¿cuáles triángulos son congruentes?V

Escoge la respuesta correcta.

a) ΔABE ≅ ΔDEC ≅ ΔBEC ≅ ΔAED

b) ΔABE ≅ ΔDEC

c) ΔBEC ≅ ΔAED

d) ΔABE ≅ ΔDEC y ΔBEC ≅ ΔAED

15. Lee y **analiza**.

Dos triángulos isósceles que tienen la misma medida de su base son siempre congruentes si:

Escoge la respuesta correcta.

a) La altura de los 2 triángulos mide lo mismo

b) Sus ángulos de las bases son agudos

c) Los ángulos de las bases de ambos triángulos miden lo mismo

d) En cada triángulo la base mide lo mismo

16. Lee y **analiza**.

Hace tres años, los trillizos Pablo, Simón y José, y su hermana Eva, 4 años mayor, sumaban 24 años en total. ¿Cuántos años tiene hoy Eva?

Escoge la respuesta correcta.

a) 9

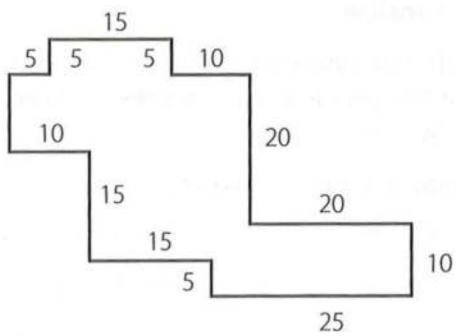
b) 15

c) 12

d) 8

17. Lee y **analiza**.

El jardín de Susana tiene la forma indicada en la figura. Todos los ángulos son rectos y las longitudes indicadas están en metros. El área, en metros cuadrados, es:



Escoge la respuesta correcta.

a) 800 b) 900 c) 600 d) 1 200

18. Lee y **analiza**.

Tres amigos, José, Benito y César, trabajan en sus vacaciones y ganan conjuntamente 280 USD. José ha trabajado el doble que Benito y 4 veces más que César. Deciden repartir sus ganancias según lo trabajado por cada uno. ¿Cuántos dólares le corresponden a César?

Escoge la respuesta correcta.

a) 80 USD

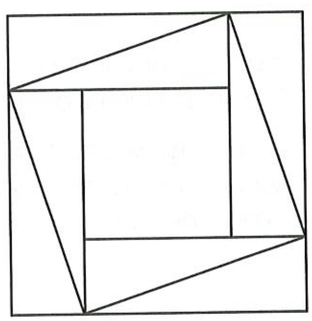
b) 40 USD

c) 100 USD

d) 120 USD

19. Lee y **analiza**.

En la figura, el cuadrado grande tiene un área de 16 cm^2 y el más pequeño, 4 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado mediano?



Escoge la respuesta correcta.

a) 10 cm^2

b) 8 cm^2

c) 9 cm^2

d) 12 cm^2

20. Lee y **analiza**.

En cada cuadrado se introduce una cifra, de manera que la multiplicación $45 \times \square 3 = 3\square, \square, \square$ sea correcta. La suma de las cifras que hay en los cuadrados es:

Escoge la respuesta correcta.

a) igual a 20

b) igual a 21

c) igual a 17

d) mayor que 21

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

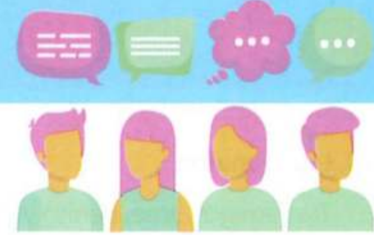
Instrucciones

Correcto ● **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

En tu cuaderno



Un gran asteroide acompañará a la Tierra durante 4 000 años

"La Tierra tiene un nuevo compañero en su camino. Un equipo internacional de astrónomos, dirigido por el investigador Toni Santana-Ros, del Instituto de Ciencias del Cosmos de la Universidad de Barcelona (ICCUB) ha confirmado que un asteroide de más de 1 kilómetro de diámetro comparte órbita con nuestro planeta alrededor del Sol, una trayectoria que mantendrá durante 4 000 años. Este troyano, como se denomina a este tipo de objetos, es el segundo terrestre conocido.

Los asteroides troyanos, cuya existencia fue predicha hace 200 años por el matemático, Joseph-Louis Lagrange, son cuerpos pequeños que se encuentran en uno de los dos puntos estables en la órbita de un planeta alrededor del Sol. Aunque estas rocas se conocen desde hace décadas en Venus, Marte, Júpiter, Urano y Neptuno, no fue hasta 2011 cuando se descubrió el primer troyano terrestre, 2010 TK7. De unos 300 metros de diámetro, se puede quedar dando vueltas junto a la Tierra unos largos 10 000 años.

En diciembre de 2020, los astrónomos dieron con el asteroide 2020 XL 5, un troyano tres veces más grande que el primero terrestre, es un asteroide de tipo C, predominantemente compuesto de carbono y, según los cálculos, este cuerpo fue capturado hace unos 600 años y nos acompañará durante al menos 3500 años más. No se sabe con seguridad su origen, pero se cree que se podría haber originado en el cinturón principal de asteroides. Situado a unos 150 000 000 km, en absoluto puede resultar peligroso.

Por su tamaño, los investigadores creen que 2020 XL 5 y otros troyanos podrían convertirse en bases ideales para una exploración avanzada del sistema solar, incluso podrían convertirse en una fuente de recursos.

Precisamente, el pasado octubre, la NASA lanzó la misión Lucy mucho más lejos, hacia los asteroides troyanos de Júpiter a donde llegará dentro de doce años. Estas rocas tienen un gran interés científico, ya que son un remanente de los comienzos de nuestro sistema solar, hace unos 4 000 millones de años".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-gran-asteroide-acompanara-tierra-durante-4000-anos-202202011736_noticia.html

Shutterstock, 1954183363

De más de 1 kilómetro de diámetro, este troyano es el segundo conocido que escolta a nuestro planeta.

Ficha de comprensión lectora

1. ¿Sobre qué trata el artículo?
2. ¿Cómo fue bautizado este asteroide y cuál es su diámetro?
3. ¿Durante cuánto tiempo se espera que este asteroide acompañe a la Tierra?
4. ¿Cómo se llaman este tipo de asteroides y quién predijo su existencia?
5. ¿Cómo valoras este tipo de artículos?
6. ¿Cuáles son tus argumentos, a favor o en contra, acerca de lo que dice el autor que en lo absoluto puede resultar peligroso este asteroide?

Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** en Internet acerca de los asteroides troyanos. **Elabora** una ficha técnica con los datos que puedas obtener y **compártela** en clase.
2. **Averigua** quién fue Joseph-Louis Lagrange. **Anota** aspectos relevantes acerca de su biografía. **Conversa** con tus compañeros sobre sus aportes a la ciencia.
3. **Toma** de la web diferentes imágenes sobre el tema y **elabora** un *collage*.
4. **Investiguen** sobre los asteroides en general y, luego, **realicen** en clase un conversatorio. ¿Cuántos asteroides han caído sobre el planeta? ¿Qué sucedería en un eventual impacto?

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:

   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Hay que incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.

Shutterstock, 2119770584

Planeta Tierra y asteroide

Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

I.M.4.3.5. / I.M.4.5.1.

1. **Relaciona** cada sistema de ecuaciones con su respuesta.

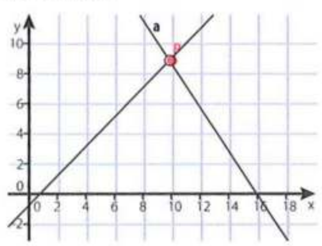
a) $\begin{cases} 3x+7y=35 \\ 5x-10y=15 \end{cases}$ 1. $x=5, y=3$

b) $\begin{cases} 9x+7y=34 \\ 3x+5y=14 \end{cases}$ 2. $x=7, y=2$

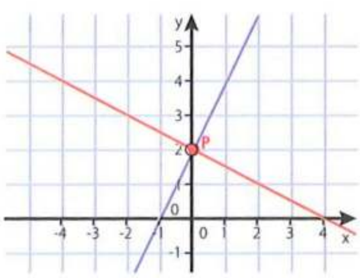
c) $\begin{cases} 2x+2y=18 \\ 8x-10y=0 \end{cases}$ 3. $x=3, y=1$

d) $\begin{cases} 6x-5y=15 \\ 5x-6y=7 \end{cases}$ 4. $x=5, y=4$

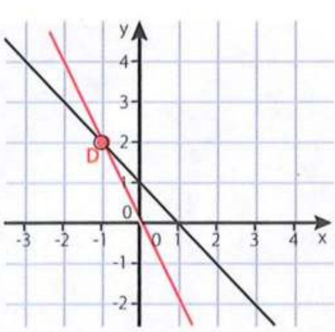
2. **Determina** la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) 

P( )

b) 

P( )

c) 

P( )

3. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de igualación, eliminación gaussiana y método de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x+y=15 \\ 5x+10y=45 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-2y=15 \\ 3x+4y=21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+6y=44 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x+8y=24 \\ 4x+4y=20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+8y=34 \\ 3x+10y=43 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 9x+3y=30 \\ 8x+3y=28 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 8x+y=13 \\ 8x+y=13 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 10x-4y=42 \\ 5x-4y=7 \end{cases}$

4. **Resuelve** los siguientes problemas con sistemas de ecuaciones lineales. **Utiliza** el método que prefieras.

a) Las edades de Lucía y de Lorena suman 52 años y dentro de 4 años la edad de Lucía será el doble de la de Lorena. ¿Cuál es la edad de cada una?

b) La suma de los ahorros de Micaela y Fabricio es \$ 68 y la diferencia es \$ 2. ¿Cuánto tiene cada uno?

c) Por la compra de dos equipos electrónicos se ha pagado \$ 1 500. Si en la primera compra hubiese habido un descuento del 10 % y en la segunda, un descuento de 15 %, se hubiera pagado \$ 1 300. ¿Cuánto costó cada artículo?

5. **Escribe** (V) si la afirmación es verdadera o (F) si la afirmación es falsa.

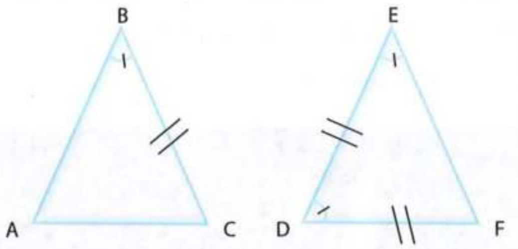
   a) Dos triángulos pueden ser congruentes si tienen todos sus lados iguales.

   b) Dos triángulos pueden ser congruentes si tienen todos sus ángulos iguales.

   c) Es lo mismo congruencia y semejanza.

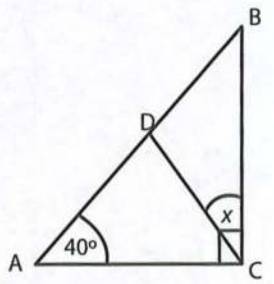
   d) Un postulado de congruencia es LAL.

6. **Demuestra** si el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF. El triángulo ABC es isósceles.



7. **Encuentra** la medida del ángulo x si en el triángulo ABC:

   $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{DB}$



Coevaluación

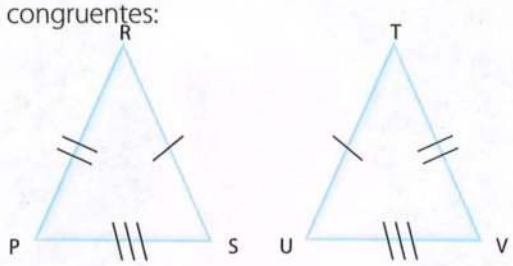
8. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.

   En Ecuador se produce uno de los mejores cacaos del mundo al igual que el café. Cada producto debe pasar por el proceso de secado y trituración. La cantidad de minutos necesarios para cada proceso y producto se detalla en el cuadro.

Proceso	Cacao	Café
Secado	45	75
Trituración	58	63

   Si en la fábrica solo se pueden destinar 3 375 horas para el secado y 3 340 horas para la trituración, ¿cuántos kilos de cacao y café se producen mensualmente?

9. **Determinen** si los siguientes triángulos son congruentes:



10. **Expreso mis emociones.** Cuando te sientas de buen humor y con optimismo, **comparte** tus emociones con tus compañeros de clase. ¿Qué les dirías?

Autoevaluación

11. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros   Resuelvo por mí mismo   Necesito ayuda   Estoy en proceso

Contenidos	Resuelvo sistemas de ecuaciones lineales por el método gráfico, igualación, eliminación gaussiana y método de Cramer.	
	Resuelvo problemas aplicando sistemas de ecuaciones.	
	Determino triángulos congruentes aplicando los postulados de congruencia.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad en situación de la vida cotidiana?

unidad 5

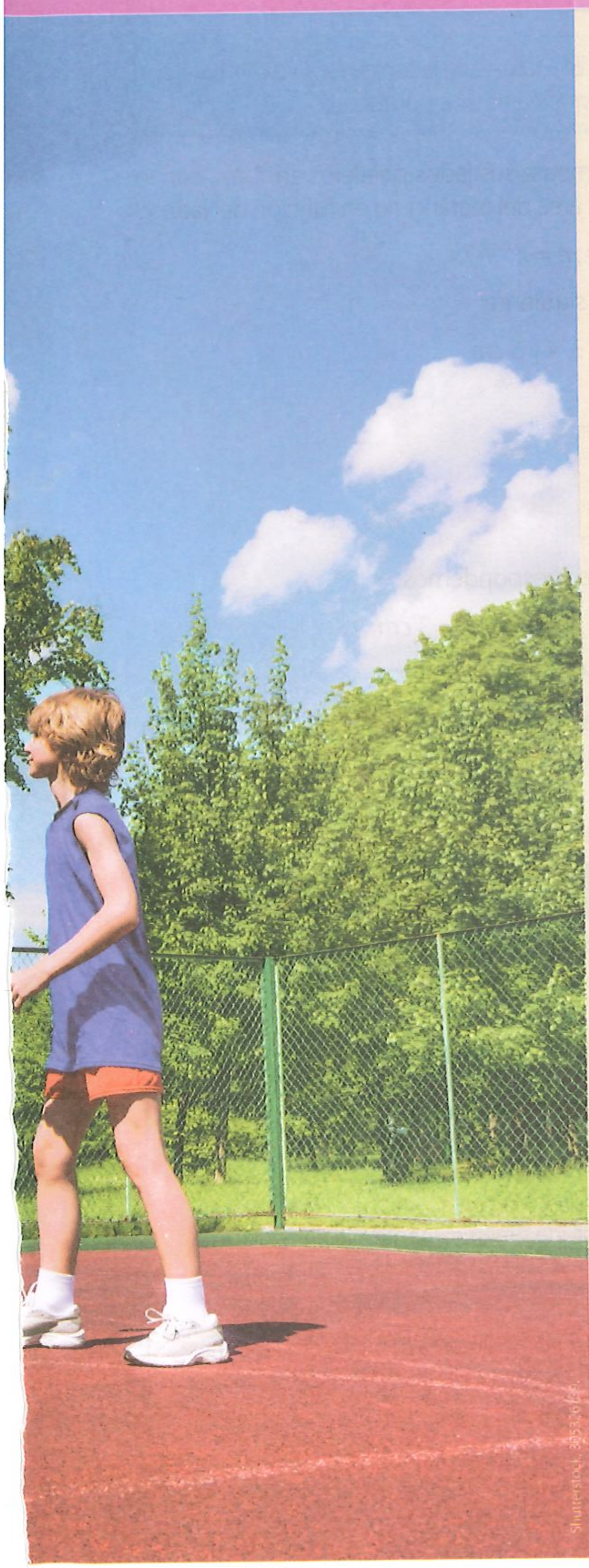
Ecuaciones cuadráticas. Teorema de Thales

Aplicación de la matemática en el deporte

Una de las grandes preocupaciones de los preparadores físicos ha sido el poder cuantificar la carga total del entrenamiento. Esta se refiere a la suma de estímulos a los que el jugador se ve sometido durante la realización de cualquier deporte, es decir, todas las sesiones, tanto técnico-tácticas como físicas. Todas ellas se deben tener en cuenta para poder planificar con sensatez y, lo que es más importante, intentar aumentar el rendimiento del equipo hasta el máximo de sus posibilidades.

Por esta razón, la importancia de la matemática en este ámbito es evidente, pues apoya la labor de los entrenadores en todos los ámbitos deportivos, por ejemplo, en el registro del rendimiento de los jugadores, la planificación de estrategias y jugadas e, incluso, para tomar acciones con relación al adversario.

Fuente: http://viref.udea.edu.co/contenido/publicaciones/libros_expo2011/planificacion_entrenamiento_deportivo.pdf



Preguntas generadoras

- ¿Qué otros deportes describen trayectorias parabólicas?
- ¿De qué otra manera se aplica la matemática en el deporte?
- ¿Cómo ayuda el uso de matemática en el rendimiento de los jugadores?

Álgebra y funciones

- Función cuadrática: dominio, recorrido, máximos, mínimos y paridad
- Ecuaciones cuadráticas: método gráfico, factoreo, completación de cuadrados y fórmula general

Geometría y medida

- Teorema de Thales
- Semejanza de triángulos

Objetivos

O.M.4.3. / O.M.4.5.

Tema 1 Función cuadrática

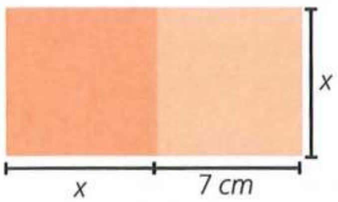

Shutterstock, 421652020.

Saberes previos

Infiere. ¿Cómo determinas el área del piso de una piscina cuadrangular?

Una función cuadrática definida $f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola.

El lienzo cuadrado de una pintura se aumenta sus lados paralelos en 7 *cm*, con lo cual se obtiene un rectángulo. ¿Cuál es el área del rectángulo en función del lado x?



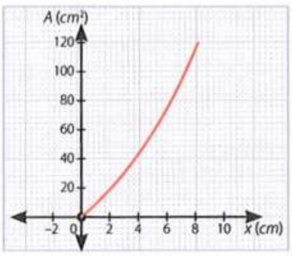
El área del rectángulo es: $A = (x + 7)\,x\,;A = x^2 + 7x$

Con base en esta función, calculamos lo siguiente:

El área del rectángulo cuando $x = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 *cm*.

Elaboramos una tabla.

x (cm)	0	1	2	3	4	5
A (cm²)	0	8	18	30	44	60



Graficamos los puntos antes encontrados y respondemos.

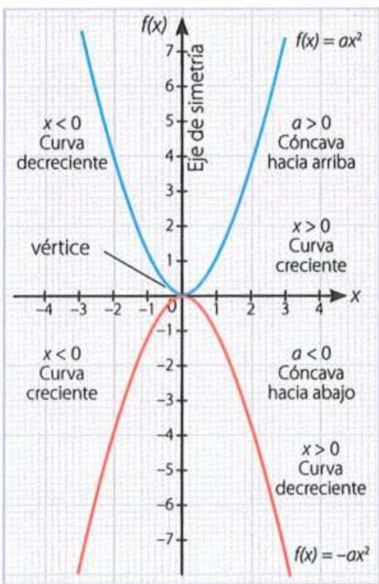
¿Para qué valor de x el área es 30 *cm²*? Para $x = 3$ *cm*

¿Para qué valor de x el área es de 120 *cm²*? Para $x = 8$ *cm*

La ecuación que representa el área del rectángulo en función de x es una función cuadrática. $A(x) = x^2 + 7x$; en donde: $a = 1$, $b = 7$ y $c = 0$

Representación gráfica de la función cuadrática y características

Gráfica



Características

Concavidad: esta orientación depende del signo del término cuadrático ax^2.

- Si $a > 0$ (positivo), la parábola es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo que es el vértice.
- Si $a < 0$ (negativo), la parábola es cóncava hacia abajo y tiene un máximo que es el vértice.

Cortes de la parábola con los ejes coordenados: son los puntos donde la función es cero. Para hallar el corte con el eje x, se tiene $f(x) = 0$ y se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
El corte con el eje y es $(0, c)$, cuando $x = 0$.

Eje de simetría: es la recta que divide simétricamente a la parábola; está dado por la ecuación $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Vértice (V): es el punto de corte del eje de simetría con la parábola; tiene como coordenadas: $V\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

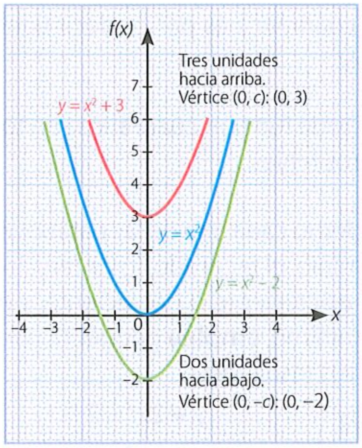
La función $f(x) = ax^2$ tiene: Dominio: $\mathbb{R}$
Recorrido: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, si $a > 0$ ó $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, si $a < 0$

Archivo editorial.

M.4.1.57. Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad.

Desplazamiento vertical de la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$

Trazamos y analizamos la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas:
$f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 2$.

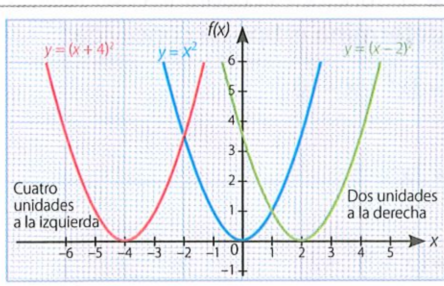


Graficamos la función $y = x^2$.
La gráfica de $y = x^2 + 3$ indica que la gráfica inicial $y = x^2$ se desplazó hacia arriba 3 unidades.
El dominio son los $\mathbb{R}$ y el recorrido $[3, +\infty)$.
La gráfica de la función $y = x^2 - 2$ indica que la gráfica $y = x^2$ se desplazó hacia abajo 2 unidades.
El dominio son los $\mathbb{R}$ y el recorrido $[-2, +\infty)$.
En forma general, en la función $f(x) = ax^2 + c$, con $a > 0$ se puede decir: si $c > 0$, la función se desplaza c unidades hacia arriba.
Si $c < 0$, la función se desplaza c unidades hacia abajo.
El dominio son todos los reales, los $\mathbb{R}$.
El recorrido: si $a > 0$, $y \geq c$, si $a < 0$, $y \leq c$.
Eje de simetría, eje y.
Vértice $(0, c)$.

Archivo editorial.

Desplazamiento horizontal de la función cuadrática de la forma $f(x) = (x + h)^2$

Trazamos y analizamos la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas:
$f(x) = (x + 4)^2$, $g(x) = (x - 2)^2$.



Graficamos la función $y = x^2$.
La gráfica de $y = (x + 4)^2$ indica que la gráfica inicial $y = x^2$ se desplazó hacia la izquierda 4 unidades y la gráfica de $y = (x - 2)^2$ indica que se desplazó hacia la derecha 2 unidades.
En forma general, en la función $f(x) = (x + h)^2$. Si $h > 0$, se desplaza la gráfica $y = x^2$ hacia la izquierda h unidades. Si $h < 0$, se desplaza la función inicial a la derecha h unidades.

Archivo editorial.

Ejemplo

Graficamos la función $y = x^2 - 2x - 3$. Luego determinamos la concavidad, eje de simetría, vértice, dominio y recorrido de la función.

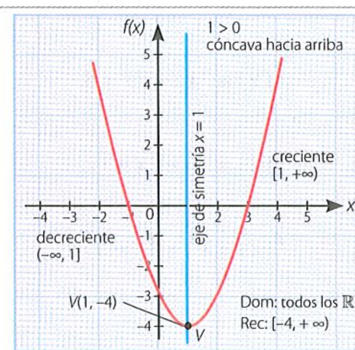
Reconocemos en la función $y = x^2 - 2x - 3$, los coeficientes: $a = 1$, $b = -2$ y $c = -3$.

Determinamos el vértice de la parábola: $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = 1 - 2(1) - 3 = -4; V(1, -4)$$

Determinamos la ecuación del eje de simetría. $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$, $x = 1$

Tomamos valores de x a los dos lados del eje de simetría. Elaboramos una tabla de valores y graficamos.



Taller Evaluación formativa

I.M.4.3.4.

1. **Identifica** la función cuadrática con una X en el literal correspondiente.
   a) $f(x) = x^3 + 2x + 1$
   b) $g(x) = \frac{1}{2x^2} + 2x + 1$
   c) $h(x) = -x^2 + 3$
   d) $i(x) = 2x + 1$

2. **Reconoce** en la función cuadrática los elementos *a*, *b* y *c*.
   a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
   b) $y = -4x + 2 - 7x^2$
   c) $g(x) = -x^2 + 2x$
   d) $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}x^2$

3. **Utiliza** la expresión $V = \left\{-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right\}$. **Determina** el vértice y el eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas.
   a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
   b) $f(x) = x^2 - 5$
   c) $g(x) = x^2 - 8x + 12$
   d) $m(x) = -x^2 + 4x$
   e) $f(x) = (x-4)^2 - 2$
   f) $p(x) = -4x^2$
   g) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
   h) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$
   i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
   j) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

4. **Escribe** en tu cuaderno verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
   a) Toda función cuadrática corta al eje x.
   b) Una función cuadrática puede ser cóncava o convexa.
   c) Toda función cuadrática es par, es decir tiene simetría al eje *y*.
   d) El dominio de toda función cuadrática son todos los números reales.

5. **Grafica** en tu cuaderno cada una de las parábolas. **Determina** el dominio, el recorrido, los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y el punto máximo o mínimo, **emplea** geogebra para que compruebes tus resultados.
   a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
   b) $f(x) = x^2 - 5$
   c) $g(x) = x^2 - 8x + 12$
   d) $f(x) = -x^2 + 4x$
   e) $f(x) = (x-4)^2 - 2$
   f) $y = 2x^2 - 2$
   g) $y = -x^2 + 4x + 5$
   h) $y = -x^2 + 9$
   i) $y = x^2 - 4x + 7$
   j) $y = x^2 - 1$

6. **Reconoce** las funciones cuadráticas sin realizar la gráfica y **determina** el tipo de concavidad.
   a) $g(x) = 3x^2 + x - 10$
   b) $f(x) = 2x^2 - 5$
   c) $k(x) = (x+1)^2 - 2$
   d) $f(x) = -4x^2 + x - 12$
   e) $r(x) = -7x^2 - 3x + 4$
   f) $t(x) = 4x - (x-3)^2 - 4$

7. **Resuelve** el siguiente problema. Para ello, **realiza** un gráfico.

   Una función cuadrática tiene su punto mínimo en el punto (1, –3). Además, se conoce que $f(0) = -1$, $f(3) = 5$. ¿Qué valores toma $f(2)$ y $f(-1)$?

8. **Determina** si los siguientes puntos pertenecen a la función cuadrática dada. Para ello, **reemplaza** las coordenadas del punto en la función.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ $\quad P(2,-3)$

b) $f(x) = -2x^2 - 3x$ $\quad P(-3,-9)$

c) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ $\quad P(4,-1)$

d) $f(x) = x^2 + 3x + 15$ $\quad P(-3,3)$

e) $f(x) = -x^2 + 2x + 10$ $\quad P(-4,-1)$

f) $f(x) = -3x^2 + 5x - 6$ $\quad P(1,-4)$

g) $f(x) = (x-3)^2 - 11$ $\quad P(3,-11)$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

9. **Grafiquen** en sus cuadernos cada una de las funciones cuadráticas; **determinen** el dominio, el recorrido, los intervalos donde la función es creciente o decreciente, el punto máximo o mínimo, el vértice de la parábola, y el eje de simetría. **Empleen** cualquier programa para **graficar** y **comprobar** sus resultados.

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 12$

d) $t(x) = (-2x - 3)(x - 6)$

e) $r(x) = -9x^2 + 4$

f) $f(x) = -(3x + 1)^2 + 5x^2 - 2$

g) $m(x) = x^2 - 2$

h) $n(x) = -3x^2 - 6x - 5$

i) $f(x) = (x - 6)^2$

10. **Determinen** la concavidad, su punto máximo y mínimo, sin realizar la gráfica de la función cuadrática.

a) $y = 5x^2$

b) $y = -4x^2 + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 1$

d) $y = -x^2 + 6x + 3$

e) $y = x^2 - 2x + 8$

11. **Determinen** el vértice y el eje de simetría de las funciones cuadráticas.

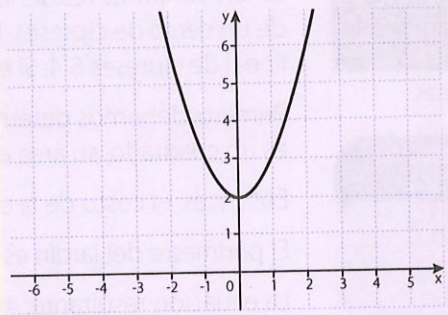
a) $y = (x-2)^2 + 3$

b) $y = x^2 - 5x + 2$

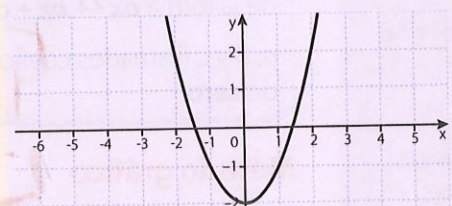
c) $y = (x+3)^2 - 3$

d) $y = x^2 + 5x - 14$

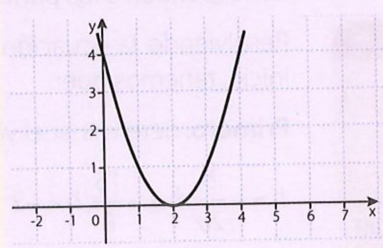
12. **Relaciona** cada gráfica de la función cuadrática con su ecuación.



i) $y = (x-2)^2$



ii) $y = x^2 + 2$



iii) $y = x^2 - 2$

Actividad indagatoria

13. **Encuentra** una función cuadrática para la siguiente situación. Luego, **grafica**.

Amelia tiene una piscina rectangular de 10 *m* de largo por 6 *m* de ancho, y quiere hacer un camino alrededor de la piscina de anchura constante. ¿Cuál es la expresión cuadrática que determina el área que ocupa la cubierta de piscina y su caminería?

Tema 2

Solución de una ecuación de segundo grado

Desequilibrio cognitivo

¿Qué grado tiene una ecuación cuadrática?


Shutterstock, 469419563.

Conjunto de cipreses.

Competencia matemática

En una ecuación cuadrática:
$ax^2 + bx + c = 0$

ax^2 es el término cuadrático.

bx es el término lineal.

c es el término independiente.

Responde: ¿cuántos resultados puede tener una ecuación cuadrática?

¿Sabías que?

Dependiendo de los valores de las constantes b y c, las ecuaciones cuadráticas se clasifican en incompletas y completas.

x	y
6	0
–2	–64
0	–48
1	–28
2	0

Para resolver una ecuación cuadrática, existen varios métodos. Entre ellos, el método gráfico, por factorización o empleando la fórmula general.

Vamos a comenzar analizando la solución por el método gráfico.

En un conjunto residencial se construye un jardín cuadrado de césped, rodeado de un cerco de cipreses. El precio del metro cuadrado de césped es $ 4, y el metro lineal de cipreses $ 4. Si el costo del jardín es $ 48, ¿cuál es el área del terreno?

Primero, debemos determinar la ecuación que modela la situación. Como el jardín es un cuadrado, su área es: x^2.

Entonces, el costo de la colocación del césped es $4x^2$.

El perímetro del jardín es $4x$ y el costo de la colocación de los cipreses es $16x$.

La ecuación resultante: $4x^2 + 16x = 48$.

Una **ecuación cuadrática** o de segundo grado es aquella que se puede escribir de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, donde:

a, b y c (llamados coeficientes) son números reales cualesquiera y $\boldsymbol{a}$ es distinto de **cero**.

Método gráfico

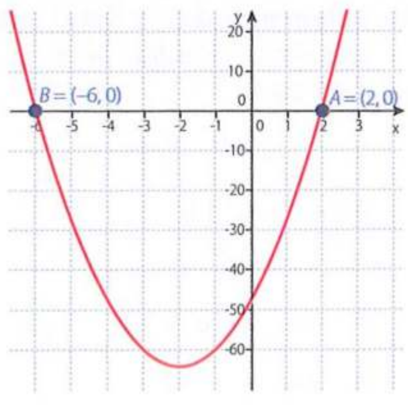
Resolver una ecuación cuadrática significa hallar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Graficamente, las soluciones reales de la ecuación corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje x.

Resolviendo la ecuación $4x^2 + 16x = 48$ que modela el problema planteado al inicio, tenemos que:

Primero: determinar el vértice (h, k) de la parábola.

$$h=-\frac{b}{2a};h=-\frac{16}{8};h=-2 \qquad k=f(-2)=4(-2)^2+16(-2)-48=-64 \qquad V(-2,-64)$$

Segundo: graficar la parábola.



Los puntos A (2, 0) y B (–6, 0) cortan al eje x. Es decir, las soluciones de la ecuación cuadrática son: $x = 2$ y $x = -6$.

Descartamos el valor negativo porque no satisface el problema, ya que el área no puede ser un valor negativo.

Solución

El terreno para el jardín tiene un área de $4\ m^2$.

M.4.1.58. Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.

Ejemplos

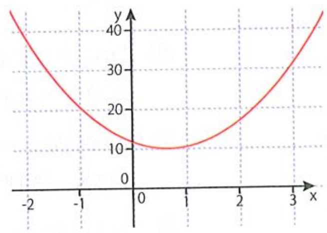
a) Resolver la ecuación $3x^2 - 5x + 12 = 0$.

Encontrar el vértice de la parábola (h, k).

$$h = -\frac{b}{2a};\ h = -\frac{-5}{6};\ h = \frac{5}{6} \qquad k = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 12 = \frac{119}{12} \qquad v = \left(\frac{5}{6};\ \frac{119}{12}\right)$$

Graficar la parábola para determinar los cortes con el eje x.

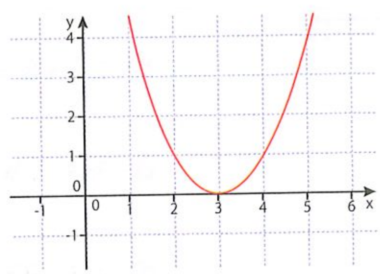
x	y
−2	34
−1	20
0	12
1	10
2	14



La parábola no corta al eje x. Entonces, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

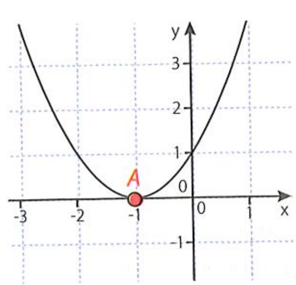
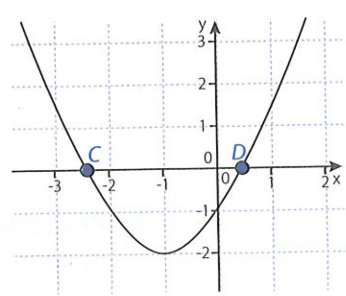
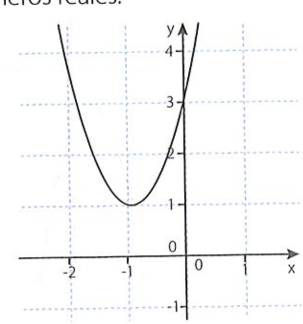
b) Determinar las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$. El vértice es $(3, 0)$

x	y
1	4
2	1
3	0
4	1
5	4



La solución de la ecuación es $x = 3$. La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales iguales.

Dependiendo de los puntos de la parábola que cortan el eje x, se presentan tres casos de soluciones.

Corta al eje x en un solo punto	Corta al eje x en dos puntos	No corta al eje x
La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales iguales.	La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes.	La ecuación cuadrática no tiene solución en el conjunto de los números reales.
		

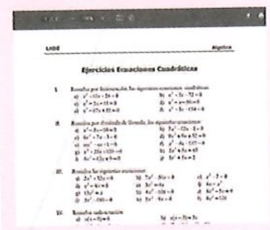
¿Sabías que?

Para resolver una ecuación cuadrática, es necesario que esté igualada a cero.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace web: *lynk.ec/10m16*

Practica y **refuerza** ecuaciones cuadráticas



¿Sabías que?

Ecuaciones completas: son aquellas en las que el valor de b y c es diferente de 0.

Ecuaciones incompletas: son aquellas en las que el valor de b o c es igual a 0.

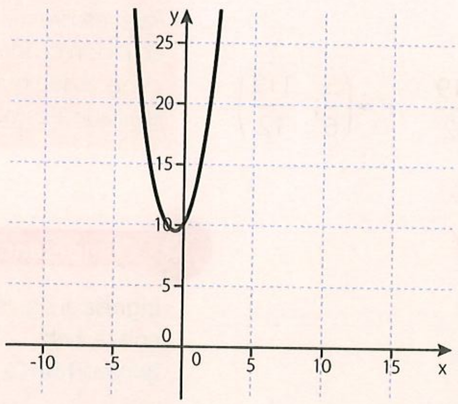
Taller

Evaluación formativa

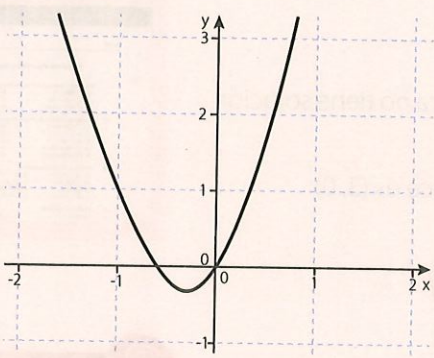
I.M.4.3.5

1. **Determina** el tipo de solución de cada función de acuerdo con su gráfica.

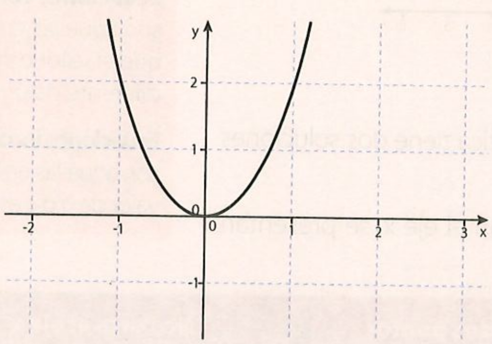
   a)



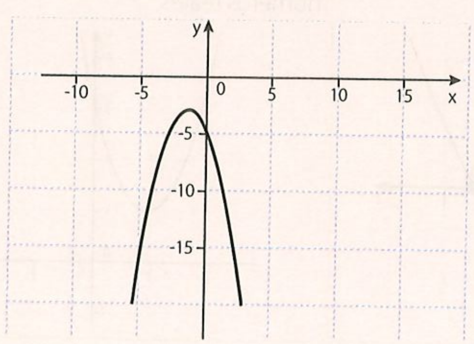
   b)



   c)



   d)



2. **Escribe** verdadero (V) o falso (F). **Justifica** tu respuesta.
   a) $2x^2 - 3x = 0$, es una ecuación cuadrática incompleta.
   b) Una ecuación cuadrática siempre tiene como solución dos raíces.
   c) Si la parábola es cóncava hacia abajo, no tiene raíces.
   d) Una ecuación cuadrática siempre se representa con una parábola.
   e) La ecuación de una parábola con el vértice en el origen tiene dos raíces iguales.
   f) Una de las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x = 0$ es cero.
   g) Una parábola siempre corta al eje y.

3. **Encuentra** la solución de cada ecuación, **determina** el vértice y **grafica** en tu cuaderno.
   a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
   b) $2x^2 + 8x = 0$
   c) $3x^2 - 12x + 12 = 0$
   d) $5x^2 - 10x + 5 = 0$
   e) $4x^2 - 16x + 16 = 0$
   f) $(x - 3)^2 + 5 = 0$
   g) $x^2 - 5x - 6 = 0$
   h) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

4. **Resuelve** las siguientes ecuaciones utilizando el método gráfico. **Trabaja** en tu cuaderno.
   a) $3x^2 - 9x = 0$

b) $-3x^2 + 8x - 4 = 0$

c) $8x^2 - 3 = 0$

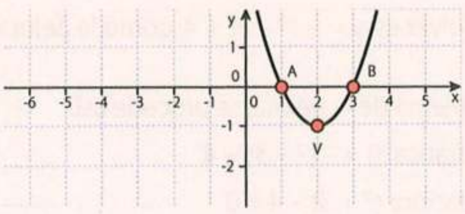
d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

e) $5x^2 - 10x = 0$

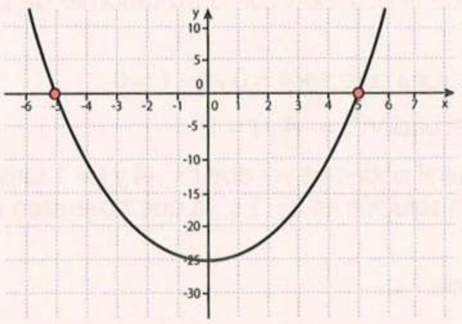
f) $-x^2 + 6x + 16 = 0$

5. **Escribe** las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

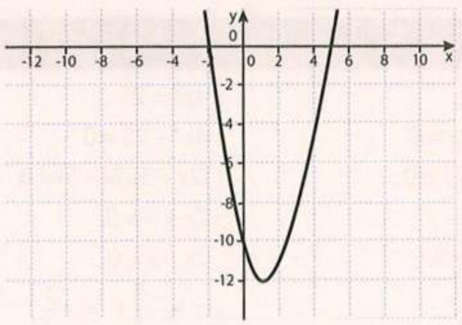
a)



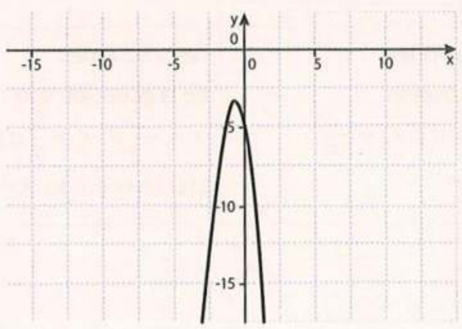
b)



c)



d)



Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

6. **Encuentren** las raíces de las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $g(x) = 2x^2 - 11x + 15$

d) $m(x) = x^2 - 6x$

e) $f(x) = 3x^2 - 6x$

f) $p(x) = 121x^2$

g) $f(x) = x^2 - 12x + 6$

h) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 7x + 3$

7. **Planteen** una ecuación cuadrática y **resuelvan** gráficamente.

a) Si al cuádruple de un número se le suma su cuadrado, se obtiene 117. ¿Cuál es ese número?

b) ¿Cuál es la edad de Eduarda si el cuadrado de su edad es igual a su edad aumentada en 6?

c) Si al lado de un cuadrado se le aumenta 2 *m* y al contiguo, 8 *m*, se obtiene un rectángulo con un área de 18 m^2 más que el doble del cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la figura?

d) Un número más el doble de su cuadrado es igual a 21. **Halla** dicho número.

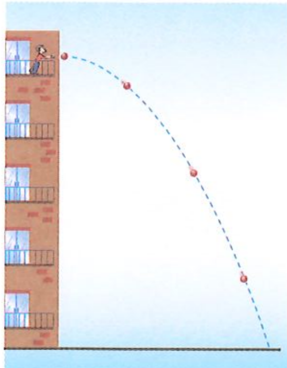
Actividad indagatoria

8. **Indaga** y **resuelve** en tu cuaderno.

Matías quiere hacer el marco de un retrato con un listón que mide 1 *m*, sin que le sobre ni le falte nada. Si se conoce que el retrato es rectangular y tiene 125 cm^2 de superficie, ¿qué longitud deben tener los listones para el marco?

Tema 3

Solución de la ecuación cuadrática por el método de factorización



Archivo editorial.

Ubicación del lanzamiento.

Saberes previos

Indaga. ¿Cómo determinas el tiempo de caída de un objeto?

Existen muchos problemas sobre movimiento de objetos que se solucionan por medio de una ecuación cuadrática.

Por ejemplo, se lanza desde una ventana de un dormitorio, ubicado a 4 *m* de altura, una pelota con una velocidad inicial de 3 *m/s*. La altura *y*, en metros, en función del tiempo *t*, en segundos, está dada por $y = -t^2 - 3t + 4$. ¿Cuál es el tiempo de caída de la pelota?

Solución

La ecuación que tenemos que resolver es: $y = -t^2 - 3t + 4$; como la pelota golpea el suelo, entonces $y = 0$.

Para encontrar la solución del problema de la pelota, se procede así:

Igualamos a cero la ecuación cuadrática: $0 = -t^2 - 3t + 4$

Multiplicamos por (–1) toda la ecuación: $t^2 + 3t - 4 = 0$

Factorizamos el primer miembro de la ecuación como un trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$

$(t + 4)(t - 1) = 0$ igualamos cada factor a cero: $t + 4 = 0$ y $t - 1 = 0$

Despejamos el valor de t en cada ecuación: $t = -4$ y $t = 1$

Por sustitución, en la ecuación general podemos ver que $t = -4$ y $t = 1$ satisfacen la ecuación, pero en este problema la solución es t = 1 s, ya que no existen tiempos negativos.

El tiempo de caída de la pelota es de 1 *s*.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas que se resuelve por factorización.

Si $ax^2 + bx + c = 0$	Si $ax^2 + bx = 0$	Si $ax^2 + c = 0; b = 0$
$x(x + 5) = 24$ $x^2 + 5x - 24 = 0$ $(x + 8)(x - 3) = 0$ $(x + 8) = 0$ y $(x - 3) = 0$ $x_1 = -8$ y $x_2 = 3$	$c = 0$ $5x^2 + 2x = 0$ $x(5x + 2) = 0$ $x_1 = 0$ $5x + 2 = 0$; $5x = -2$ $x_2 = -\frac{2}{5}$	$4x^2 = 25$ $4x^2 - 25 = 0$ $(2x + 5)(2x - 5) = 0$ $2x + 5 = 0$ $2x - 5 = 0$ $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{5}{2}$
Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = -8$ y $x_2 = 3$	Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{2}{5}$	Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{5}{2}$ o puede escribirse como: $x = \pm\frac{5}{2}$

Archivo editorial.

¿Sabías que?

Al obtener la solución de una ecuación, siempre debes verificar que efectivamente es la solución.

No todas las soluciones de una ecuación cumplen con las condiciones del problema, como sucede en el caso de la pelota.

Competencia socioemocional

En economía y finanzas, los números negativos expresan pérdidas o saldos en contra.

Responde: ¿por qué el control de los gastos ayuda a tener una economía sana?

M.4.1.59. Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo, completación de cuadrados, en la solución de problemas).

Método por completar el trinomio cuadrado perfecto

Existen expresiones algebraicas que no pueden ser factorizadas fácilmente. En estos casos podemos encontrar las raíces completando trinomios cuadrados perfectos. Que consiste en transformar ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en un trinomio cuadrado perfecto. Para ello, se verifica que el coeficiente de x^2 sea uno ($a = 1$). Luego, se suma a los dos miembros de la ecuación la expresión: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Ejemplos

a) Resolver la ecuación $2x^2 - 8x + 3 = 0$ por el método de completar T.C.P.

Dividimos toda la ecuación para 2: $x^2 - 4x = -\frac{3}{2}$

Tomamos el coeficiente de x, dividimos para 2 y elevamos al cuadrado.

$4 \div 2 = 2$; $2^2 = 4$

Sumamos el valor de 4 a los dos miembros de la ecuación:

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{3}{2} + 4$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto del primer miembro y reducimos términos: $(x-2)^2 = \frac{5}{2}$

Sacamos la raíz cuadrada a los dos miembros de la ecuación: $x - 2 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Finalmente, obtenemos las soluciones: $x_1 = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

b) Hallar las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Primero: se resta 8 en ambos lados de la igualdad.

En este caso, no se divide para a, porque a = 1.

$x^2 - 6x + 8 - 8 = 0 - 8$ $\qquad$ $x^2 - 6x = -8$

Segundo: se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en ambos lados; y se realiza la potencia.

$x^2 - 6x + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 9 = 1$

Tercero: se factoriza: $(x - 3)^2 = 1$

Cuarto: se obtiene la solución. $x - 3 = \pm\sqrt{1}$ Entonces: $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$

Quinto: se verifica las soluciones:

$x^2 - 6x + 8 = 0$ $(4)^2 - 6(4) + 8 = 0$ $0 = 0$	$x^2 - 6x + 8 = 0$ $(2)^2 - 6(2) + 8 = 0$ $0 = 0$

Las dos soluciones satisfacen a la ecuación cuadrática.

Interdisciplinariedad

Matemática e Historia

François Viète
(1540-1603, Francia)

Dr. Manuel, Wikimedia Commons

Fue un matemático francés que consideró las ecuaciones cuadráticas de la manera general, $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son cantidades conocidas. Gracias a esto, es posible escribir la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de este tipo.

Indaga sobre François Viète y **confecciona** una ficha bibliográfica.

Interculturalidad

En la actualidad, muchas comunidades indígenas continúan recreando sus prácticas educativas ancestrales que permiten conocer, no solo sus aspectos sociopolíticos y socioculturales, sino también sus conocimientos de ciencia.

Indaga y responde: ¿qué aspectos caracterizan a las comunidades indígenas?

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Factoriza** las siguientes expresiones.

a) $x^2+3x+2=$

b) $x^2+x-2=$

c) $x^2-x-2=$

d) $x^2-3x+2=$

e) $2x^2-3x-2=$

f) $6x^2-7x+2=$

g) $15x^2+16x-15=$

h) $x^2+6x+9=$

i) $20x^2+9x-18=$

j) $16x^2-9=$

k) $-4x^2-15x-9=$

l) $-2x^2+3x+9=$

2. **Resuelve** las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $2x^2-4x-6=0$

b) $x^2-\frac{3}{4}x=\frac{9}{8}$

c) $x^2-36=0$

d) $16x-36=0$

e) $(x+4)^2=6$

f) $x^2-x=20$

g) $4x^2-6x+2=0$

h) $x^2-5x+6=0$

i) $2x^2-7x+3=0$

j) $-x^2+7x-10=0$

k) $x^2+3x+2=0$

l) $-x^2+8x-12=0$

m) $x^2+3x+2=0$

n) $-x^2+8x-12=0$

o) $2x^2-3x-2=0$

p) $6x^2-7x+2=0$

q) $15x^2+16x-15=0$

r) $x^2+6x+9=0$

s) $20x^2+9x-18=0$

t) $16x^2-9=0$

3. **Grafica** en tu cuaderno las ecuaciones y **determina** su solución

a) $x^2-2x+1=0$

b) $2x^2-18=0$

c) $-x^2+4x+5=0$

4. **Encuentra** la solución de las ecuaciones completando el cuadrado.

a) $x^2-8x=0$

b) $x^2-4x+2=0$

c) $9x^2+5x=-\frac{9}{4}$

d) $25x^2-6x=0$

e) $x^2-10x=0$

f) $x^2+2x-15=0$

g) $2x^2+2x+1=313$

h) $x^2-3x-4=0$

5. **Despeja** la variable indicada en las siguientes ecuaciones.

a) Fórmula de la energía cinética: $E=\frac{mv^2}{2}$. **Despeja** v.

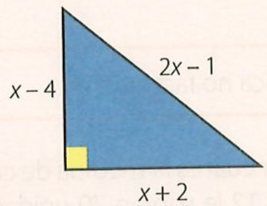
b) Ley de Newton de la gravitación universal: $F=\frac{gmM}{d^2}$. **Despeja** d.

c) Ecuación de distancia en el movimiento rectilíneo uniformemente variado: $d=Vt+\frac{1}{2}at^2$. **Despeja** t, si la velocidad inicial es 0.

d) Área de la circunferencia: $A=\pi r^2$. **Despeja** r.

6. **Resuelve** los siguientes problemas.

a) ¿Cuál es el área y el perímetro del triángulo rectángulo de la figura? Si $x = 10$ cm.



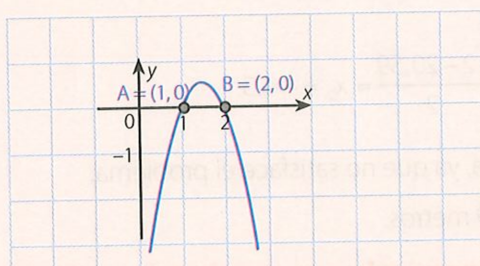
b) ¿Cuál es el número cuyo triplo aumentado en cuatro es igual a su cuadrado?

c) ¿Qué número multiplicado por dos es tres veces menor que su cuadrado?

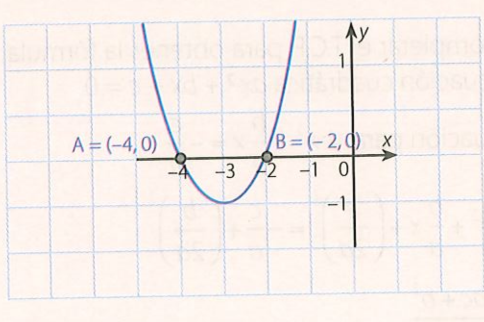
d) ¿Cuál es el número cuyo quíntuplo aumentado en 14 es igual a su cuadrado?

7. **Determina** las soluciones de las siguientes funciones cuadráticas.

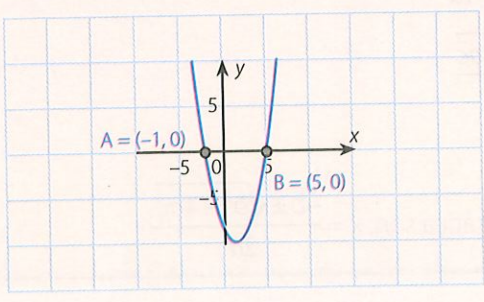
a)



b)



c)



Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. **Resuelvan** en sus cuadernos las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización.

a) $y^2 = 18y + 18$

b) $x^2 - 49 = 0$

c) $15x^2 + 12 = 27x$

d) $4x^2 - 81 = 0$

e) $-12 = -12y^2 - 7y$

f) $x^2 - 42 = -x$

g) $5x^2 - 37x - 24 = 0$

9. **Encuentren** la solución de las ecuaciones completando trinomios cuadrados perfectos.

a) $x^2 + 12x = 0$

b) $64x^2 - 3x + \frac{7}{4} = 0$

c) $x^2 + 16x = 0$

d) $x^2 + 24x = -2$

e) $36x^2 - 22x + 40 = 0$

10. **Resuelvan** los problemas.

a) ¿Qué número multiplicado por cuatro es dos veces menor que su cuadrado?

b) El producto de dos números consecutivos es 6. ¿Cuáles son esos números?

c) Juan tiene dos hermanos: Sebastián y Darwin. Sebastián es 3 años mayor que Juan y Darwin 5 años mayor. Se sabe que el producto de las edades de los hermanos mayores es 80. ¿Qué edad tiene cada hermano?

Actividad indagatoria

11. **Indaga** y **resuelve**.

El área de un círculo es de 24 cm^2. ¿Cuál es la medida del radio?

Tema 4 Ecuaciones cuadráticas. Fórmula general

Shutterstock. 655314643.

Desequilibrio cognitivo

Indaga. ¿Cómo resolverías una ecuación cuadrática no factorable?

Patricio quiere cercar un terreno y necesita conocer cuál es la medida de cada lado de un terreno cuadrangular, si al multiplicarlo por 12 le sobran 70 unidades para ser igual a su área. Planteemos la ecuación que modela el problema:

$$12x + 70 = x^2$$
$$x^2 - 12x - 70 = 0$$

La ecuación no es factorable, por lo tanto, resolveremos utilizando la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Identificamos los coeficientes de la ecuación:

$a = 1$, $b = -12$ y $c = -70$, reemplazamos en la fórmula general

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(-70)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{12 \pm 20{,}59}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 20{,}59}{2} = x_1 = 16{,}29\,; x_2 = \frac{12 - 20{,}59}{2} = x_2 = -4{,}3$$

Descartamos la solución negativa, ya que no satisface el problema.

Cada lado del terreno mide 16,29 metros.

Obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Podemos utilizar la técnica de completar el T.C.P. para obtener la fórmula general que determine las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

- Dividimos cada lado de la ecuación para a: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
- Completamos el cuadrado: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
- Resolvemos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces de la ecuación cuadrática son: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

¿Sabías que?

La fórmula general sirve para resolver todas las ecuaciones cuadráticas y las soluciones pueden no ser números reales o complejos.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

a: es coeficiente del término cuadrático.

b: es el coeficiente del término lineal.

c: es el coeficiente del término independiente.

La expresión que se encuentra bajo el radical se denomina discriminante y su análisis permite determinar el tipo de soluciones de la ecuación cuadrática sin necesidad de resolverla, así:

$D = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación. Se presentan estos casos:

$D = 0$, existen dos soluciones reales iguales.

$D > 0$, existen dos soluciones reales diferentes.

$D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

M.4.1.59. Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica, (fórmula binomial) en la solución de problemas.

Ejemplos:

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 420. ¿Cuáles son esos números?

Solución

La ecuación cuadrática es: $x^2 + (x+1)^2 = 420$.

Realizamos las operaciones necesarias: $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 420$

$2x^2 + 2x - 419 = 0$

Encontramos las soluciones utilizando la fórmula general.

$a = 2, b = 2, c = -419$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(2)(-419)}}{2(2)};$$

$$x = \frac{-2 \pm 57{,}9}{4}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 57{,}9}{4}; x_2 = \frac{-2 - 57{,}9}{4}$$

$$x_1 = 13{,}97; x_2 = -14{,}97$$

Los números son: 13,97 y 14,97, o también −14,97 y −13,97

b) El área de un terreno rectangular es de 430 m^2. Si el largo es 3 m más que 4 veces el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Solución

El área de un rectángulo es igual a $b \times h$, por lo tanto:

Base: $4x + 3$; altura: x

La ecuación es $x(4x + 3) = 430$

Operando: $4x^2 + 3x = 430$; $4x^2 + 3x - 430 = 0$

Resolviendo la ecuación por la fórmula general: $a = 4, b = 3, c = -430$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(4)(-430)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 83}{8}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 83}{8}; x_2 = \frac{-3 - 83}{8}$$

$$x_1 = 10; x_2 = -10{,}75$$

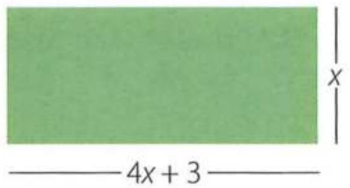
Descartamos la solución negativa; el ancho del terreno es 10 metros, y el largo es $4x + 3$, es decir, 43 metros.

¿Sabías que?

Cuando las raíces dentro de la fórmula son negativas, no existe solución dentro de los números reales. La solución está en los números complejos, es decir, la raíz es imaginaria.

Interculturalidad

En el Ecuador, las políticas educativas, para el bienestar de los pueblos y nacionalidades, han procurado una educación de calidad y reconocen la cultura de los pueblos para lograr aprendizajes en torno a sus vivencias culturales y modos de vida.



Competencia digital

Para conocer más ejercicios **ingresa** a:

lynk.ec/10m17

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Emplea** el análisis del discriminante y sin resolver las ecuaciones, **indica** cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

   a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   b) $20x^2 + 9x - 18 = 0$

   c) $x^2 + x - 2 = 0$

   d) $x^2 + 3x + 5 = 0$

   e) $-2x^2 - 9x + 5 = 0$

   f) $x^2 + 6x + 9 = 0$

   g) $25x^2 - 9 = 0$

   h) $x^2 + 3x - 10 = 0$

   i) $-3x^2 + 18x - 27 = 0$

   j) $-4x^2 + 8x + 32 = 0$

   k) $x^2 + 2x - 15 = 0$

2. **Indica,** utilizando las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática, si el conjunto dado es solución o no.

   a) $x^2 + 3x + 2 = 0 \quad S = \{1, 2\}$

   b) $x^2 - x - 2 = 0 \quad S = \{-1, -2\}$

   c) $x^2 - 3x + 2 = 0 \quad S = \{1, 2\}$

   d) $6x^2 - 7x + 2 = 0 \quad S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

   e) $\frac{x^2 - 8x}{6} + 2 = 0 \quad S = \{2, 6\}$

3. **Calcula** las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática.

   a) $x^2 - 30x - 20 = 0$

   b) $3x^2 - 8x - 2 = 0$

   c) $5x^2 - 2x - 3 = 0$

   d) $-7x^2 - 6x - 11 = 0$

   e) $-7x^2 - 5x + 12 = 0$

   f) $x^2 - 5x = 0$

4. **Utiliza** la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y **resuelve**.

   a) $5x^2 - 6x + 1 = 0$

   b) $2x^2 - 8x = -2$

   c) $5x^2 + 10x = 0$

   d) $2x^2 - 8x - 10 = 0$

   e) $12x^2 - 13x - 4 = 0$

   f) $6x^2 - 4x - 13 = 0$

   g) $3x^2 + x = -1$

   h) $x^2 + 10x + 1 = 0$

5. **Usa** la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado y **resuelve** las siguientes ecuaciones con estas condiciones: a) x en términos de y, b) y en términos de x.

   a) $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

   b) $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

   c) $3x^2 + 4y^2 + 18x + 8y + 19 = 0$

6. **Escribe** (V) si los siguientes enunciados son verdaderos o (F) si son falsos.

   a) Toda ecuación cuadrática se puede resolver con la fórmula general.

   b) Las ecuaciones cuadráticas tienen siempre solución en los números reales.

7. Resuelve los siguientes problemas.

a) Dentro de 9 años, la edad de Miguel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 11 años. ¿Cuál es la edad de Miguel?

b) ¿Qué número multiplicado por 4 es 2 veces menor que su cuadrado?

c) El producto de 2 números consecutivos es 462. ¿Cuáles son esos números?

d) Dentro de 10 años, la edad de Miriam será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 21 años. ¿Cuál es la edad de Miriam?

e) El área de un terreno rectangular es 250 m^2. Si la longitud es 2 m más que 3 veces el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

f) La suma de dos números es 15 y la suma de sus cuadrados es 113. ¿Cuáles son esos números?

g) **Calcula** el valor de k para que la ecuación $kx^2 + 3x - 1 = 0$ tenga dos soluciones reales iguales.

h) Si se multiplica la cuarta parte de un número por sus dos tercios, el resultado es el doble del número. ¿Cuál es el número?

i) Un avión recorre 4 200 km en volar de una ciudad a otra. El viaje de ida lo hizo a una velocidad de 100 km por hora menos que el viaje de regreso. Si el recorrido del viaje duró 13 horas de vuelo, ¿cuál es la velocidad de ida del avión?

j) Se quiere enmarcar de manera uniforme una pintura de 20 pulgadas de largo por 15 pulgadas de ancho. Para ello se coloca la pintura en una tabla rectangular, cuyo perímetro es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la banda alrededor de la pintura?

k) La base de un triángulo es 6 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es de 300 cm^2, ¿cuánto miden la base y la altura del triángulo?

l) La suma de dos números es 17 y la suma de sus cuadrados es 145. ¿Cuáles son esos números?

m) Dentro de 7 años, la edad de Martín será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 5 años. ¿Cuál es la edad de Martín?

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. Utilicen la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 = 5 - 4x$

b) $6x^2 - 3x - 9 = 0$

c) $x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $3x^2 - x = 5$

e) $18x^2 - 16x - 2 = 0$

f) $x^2 - 5x + 6 = 0$

g) $7x^2 + 15x = -2$

h) $x^2 - 5x + 6 = 0$

i) $16x^2 - 8x - 36 = 0$

j) $x^2 = \frac{25}{4}$

k) $5x^2 = x$

9. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Dentro de 11 años, la edad de Juan será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad de Juan?

b) La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es de 119 cm^2, ¿cuánto miden la base y la altura del triángulo?

10. Hallen la solución de las ecuaciones de segundo grado, despejen x en términos de y.

a) $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

b) $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

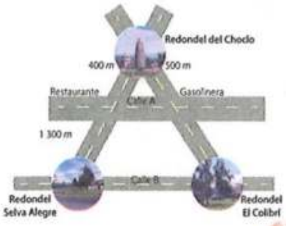
c) $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

Actividad indagatoria

11. Indaga y **resuelve**.

Un terreno rectangular de 100 m de largo por 15 m de ancho está rodeado por un camino de adoquín de anchura uniforme. ¿Cuál es la anchura del camino si se conoce que su área es de 12 000 m^2?

Tema 5 Teorema de Thales



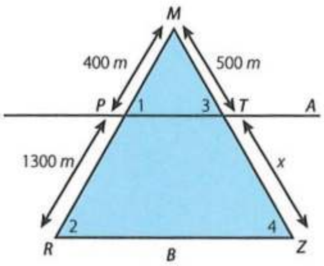
Flavio Muñoz M. Colección Sangolquí

Intersección de avenidas.

Saberes previos

Reflexiona. ¿Cuál es la diferencia entre congruencia y semejanza?

En un plano de la ciudad de Sangolquí se ve que la calle A es paralela a la calle B. Se aprecia que las calles se unen en rendondeles y forman un triángulo. Si en el plano se borró la distancia entre la gasolinera y el redondel El Colibrí, ¿cómo puedes calcular dicha distancia?



Teorema de Thales.

Teorema particular de Thales o fundamental de semejanza

Se refiere a los segmentos proporcionales que son determinados por dos paralelas. Existen tres enunciados.

Primer enunciado

Si se traza una línea paralela a cualquiera de los lados de un triángulo se obtiene como resultado un triángulo semejante el triángulo original.

Para responder la pregunta, realizamos un esquema del mapa llamando x a la distancia desconocida.

Aplicando el teorema:

La calle A es paralela a la calle B, entonces,

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{PR}}=\frac{\overline{MT}}{\overline{TZ}};\ \frac{400}{1300}=\frac{500}{x};\ x=\frac{500\cdot 1300}{400}\quad x=1\,625$$

Solución

La distancia entre la gasolinera y el redondel es de 1 625 m.

¿Sabías que?

Proporción. Dos segmentos son proporcionales cuando su razón es la misma.

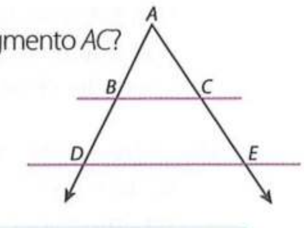
Razón. También conocida como relación de dos segmentos, es el resultado de dividir la longitud de esos dos segmentos.

Segundo enunciado

Al cortar los lados de un ángulo cualquiera por dos paralelas, los segmentos que se forman desde el vértice a los puntos de intersección de las paralelas son proporcionales entre sí.

Ejemplo

Si $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ y $\overline{AD}=18, \overline{AE}=20$ y $\overline{AB}=4$, ¿cuál es el valor del segmento AC?



$$\overline{BC} \parallel \overline{DE}, \text{entonces} \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}};\ \frac{18}{4}=\frac{20}{x};\ x=\frac{20\cdot 4}{18}=4{,}4$$

El segmento AC mide 4,44 unidades.

Simbología matemática

∽ = Paralela

$\overline{AB}$ = Segmento AB

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ = Segmento AB proporcional al segmento CD.

Tercer enunciado

Al cortar los lados de un ángulo cualquiera por dos paralelas, estas son entre sí como los segmentos medios desde el vértice a las paralelas.

M.4.2.5. Definir e identificar figuras geométricas semejantes, de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre las figuras (teorema de Thales).

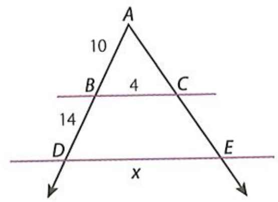
Ejemplo

a) Si $\overline{AB} = 10, \overline{BD} = 14$ y $\overline{BC} = 4$ /BC $\quad DE$, ¿cuál es el valor de la recta DE?

$AD = 10 + 14 = 24.$

$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}};$

$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}; \ \frac{x}{4} = \frac{24}{10}; x = \frac{24 \cdot 4}{10} = 9{,}6$



Solución

La recta DE mide 9,6 unidades.

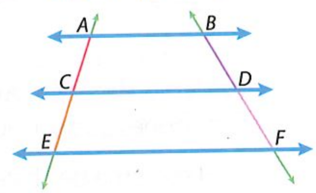
DFA

Cuando hay dificultades visuales o una discapacidad visual, la mejor forma de ayudar es proporcionando explicaciones de tipo descriptivo, concreto, preciso y claro.

Teorema general de Thales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, las rectas paralelas dividen a las transversales en segmentos proporcionales.

$\overline{AB} \ // \ \overline{CD} \ // \ \overline{EF}$

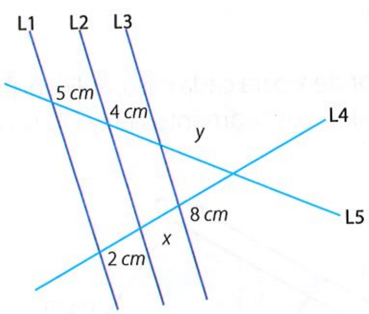


Del teorema de Thales se pueden obtener las siguientes proporciones.

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}; \ \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}; \ \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}$

Ejemplos

a) Hallar los valores de x e, y, si las rectas L_1, L_2 y L_3 son paralelas.



$\frac{5}{2} = \frac{4}{x}; \ x = \frac{4 \cdot 2}{5}; \ x = 1{,}6 \ cm$

$\frac{4}{x} = \frac{y}{8}$

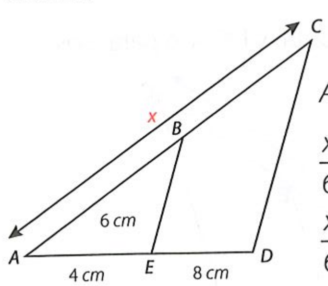
$\frac{4}{1{,}6} = \frac{y}{8}$

$y = \frac{4 \cdot 8}{1{,}6}; \ y = 20 \ cm$

Solución

$x = 1{,}6 \ cm, y = 20 \ cm$

b) Calcular el valor de x aplicando el teorema de Thales. BE // DC



$AD = 4 + 8 = 12 \ cm$

$\frac{x}{6} = \frac{12}{4}$

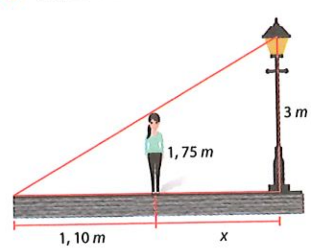
$\frac{x}{6} = 3$

$x = 18$

Solución

La recta AC mide 18 cm.

c) Encontrar el valor de x.



$\frac{x + 1{,}10}{x} = \frac{3}{1{,}75}$

$1{,}75x + 1{,}93 = 3x$

$1{,}25x = 1{,}93$

$x = 1{,}5$

Solución

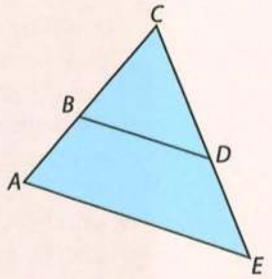
El valor de x es 1,5 m.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.5.1.

1. **Completa** las proporciones de acuerdo con la figura, si $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.



a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\quad}$

b) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} =$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} =$

d) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \dfrac{}{\quad}$

2. **Problema-decisión. Analiza** y **decide** las afirmaciones que son verdaderas (V) y las falsas (F).

   a) El teorema de Thales, para cumplirse, necesita tener dos o más rectas paralelas que se corten por dos rectas cualesquiera.

   b) Dos segmentos son proporcionales cuando tienen la misma longitud.

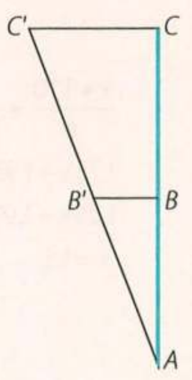
   c) La razón es la medida de cada segmento.

   d) El teorema de Thales divide a un segmento en varias partes iguales.

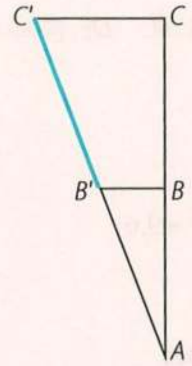
3. **Escribe** una fórmula para determinar la longitud del segmento en color azul a partir de los segmentos con longitudes conocidas listados.

   En cada figura $\overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$.

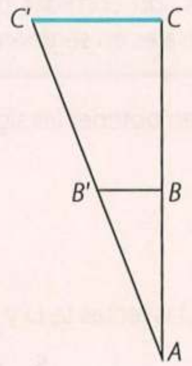
   a) Dados: $\overline{AB}$, $\overline{AB'}$ y $\overline{AC'}$



   b) Dados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB'}$

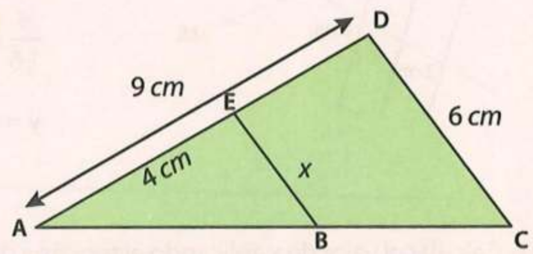


   c) Dados: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BB'}$

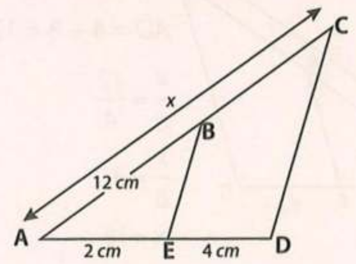


4. **Encuentra** el valor de x para cada caso, aplicando el teorema de Thales. Los segmentos BE y DC son paralelos.

   a)

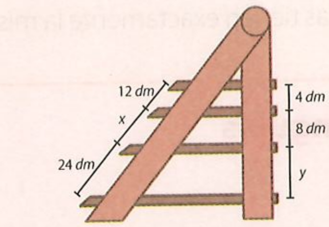


   b) Los segmentos BE y DC son paralelos.



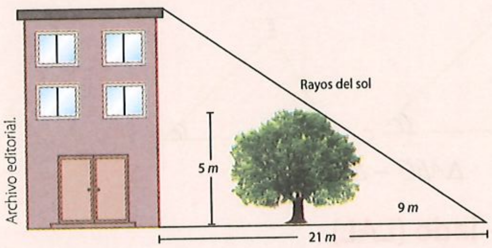
5. **Resuelve** los siguientes problemas aplicando el teorema de Thales.

a) Las baldas de una repisa son paralelas, tal como se muestra en la figura. **Calcula** el valor de x e y.



Archivo editorial.

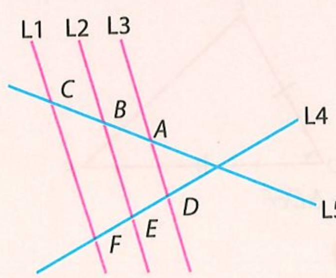
b) ¿Cuál es la altura del edificio si se conocen los datos que se muestran en la figura?



Archivo editorial.

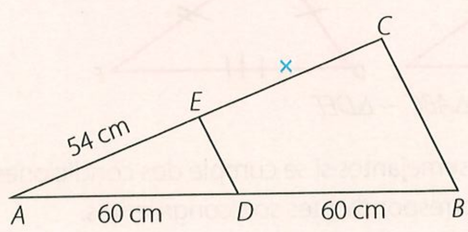
c) Si $\overline{AB} = 34\,cm$, $\overline{BC} = 18\,cm$ y $\overline{DE} = 8\,cm$, **halla** la longitud del segmento $\overline{EF}$. ¿Qué enunciado has aplicado?

Las rectas L1, L2 y L3 son paralelas.

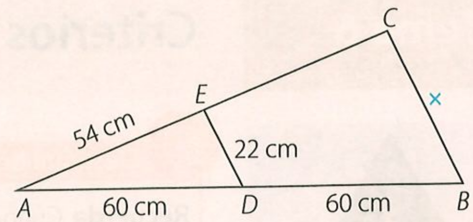


6. **Encuentra** el valor de x en las siguientes figuras partiendo de los datos brindados y conociendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

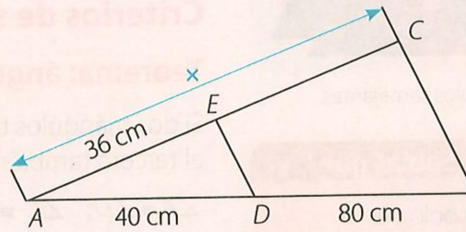
a)



b)



c)

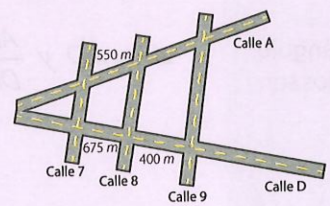


Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan** los siguientes problemas aplicando el teorema de Thales.

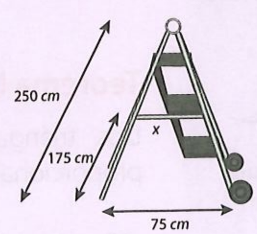
7. Las calles 7, 8 y 9 de la figura son paralelas. **Calculen** la distancia que separa la intersección de la:

a) Calle A con calle 9



Archivo editorial.

b) **Encuentren** el valor de x. El piso es paralelo al lado x.

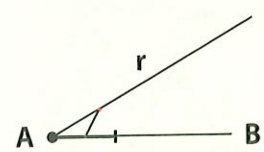


Archivo editorial.

Actividad indagatoria

8. **Indaga** y **resuelve**.

Divide al segmento $\overline{AB}$ de 10 cm en siete partes iguales.



Criterios de semejanzas de triángulos

Triángulos semejantes.

¿Sabías que?

El símbolo de semejanza es $\sim$:

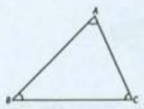
Para denotar que dos triángulos son semejantes se escribe:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

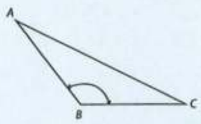
Recuerda que...

Esta es la clasificación de los triángulos según sus ángulos:

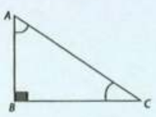
Triángulo acutángulo: todos sus ángulos son agudos.



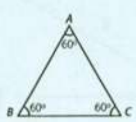
Triángulo obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.



Triángulo rectángulo: está formado por un ángulo recto.



Triángulo equiángulo: todos sus ángulos son congruentes.



Desequilibrio cognitivo

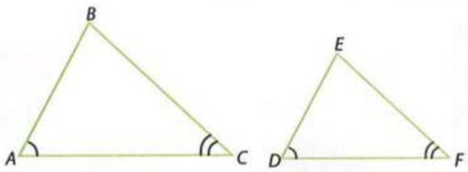
Recuerda. Cuando dos figuras geométricas tienen exactamente la misma forma, pero diferente medida, son semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

Teorema: ángulo – ángulo (AAA)

Si dos triángulos tienen sus dos ángulos correspondientes congruentes, entonces, el tercero también será congruente. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

$\measuredangle A \cong \measuredangle D; \quad \measuredangle C \cong \measuredangle F$

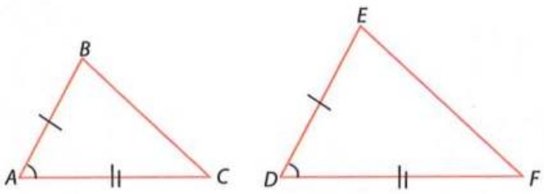


$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Teorema lado – ángulo – lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo correspondiente congruente, comprendido entre dos lados proporcionales.

$$\measuredangle A \cong \measuredangle D \text{ y } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

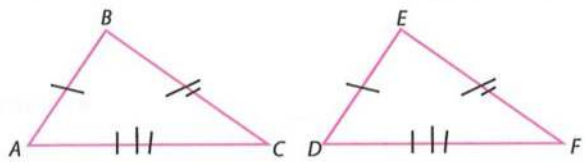


$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Teorema lado – lado – lado (LLL)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Definición: Dos triángulos son semejantes si se cumple dos condiciones:

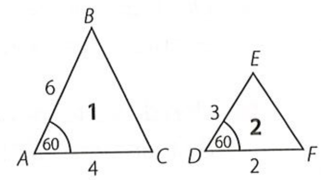
a) Todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes.

b) Todos los pares de lados correspondientes son proporcionales.

M.4.2.10. Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas.

Ejemplos

a) Un triángulo tiene dos lados de longitud 6 *cm* y 4 *cm*, y el ángulo comprendido entre ellos es de 60°. Otro triángulo tiene lados de 3 *cm* y 2 *cm*, *además*, el ángulo entre ellos dos es de 60°. ¿Son triángulos semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?



Utilizando los postulados de semejanza de triángulos de la página anterior, podemos conocer si los triángulos 1 y 2 son semejantes.

Aplicando el teorema LAL, tenemos: $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ y $\measuredangle A=\measuredangle D$

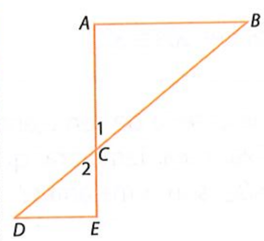
Reemplazamos los valores para encontrar la razón de semejanza:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}\rightarrow\frac{6}{3}=\frac{4}{2};\, k=2$$

Conclusión: la razón de semejanza es 2, es decir, los lados correspondientes de los dos triángulos son proporcionales y los ángulos *A* y *D*, ambos miden 60°. Por lo tanto, se cumple el teorema LAL. Los dos triángulos son semejantes.

b) En la figura, dado $AB \parallel DE$, demuestra: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$.

Demostración	
Enunciados	**Razones**
1. $AB \parallel DE$ 2. $\measuredangle A \cong \measuredangle E$ 3. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ 4. $\Delta ABC \sim \Delta EDC$	1. Dado. 2. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes. 3. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. 4. Criterio AAA.

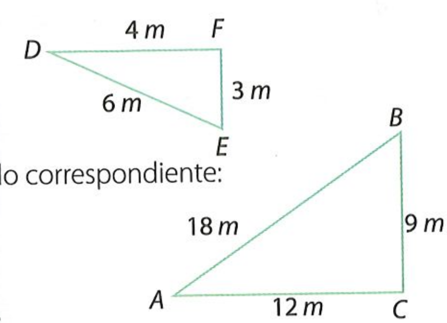


Conclusión: los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ son semejantes.

c) Un triángulo tiene como medidas de sus lados 18 *m*, 12 *m* y 9 *m*, y otro triángulo tiene medidas 6 *m*, 4 *m* y 3 *m*. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Son semejantes estos triángulos?

Aplicamos el teorema LLL:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$



Reemplazamos los valores con cada lado correspondiente:

$$\frac{18}{6}=\frac{12}{4}=\frac{9}{3}=3$$

Conclusión: la razón de semejanza es 3.

Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes.

¿Sabías que?

Razón

Es el cociente entre dos números o dos cantidades comparables entre sí, y se expresa como fracción.

$\frac{a\rightarrow}{b\rightarrow}$ antecedente / consecuente

Los términos de una razón se llaman: antecedente y consecuente.

El antecedente es el dividendo y el consecuente es el divisor.

Proporción

Proporción es una igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Constante de proporcionalidad o razón de semejanza

Es el cociente entre el antecedente y el consecuente de cualquier razón de una proporción.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

Taller Evaluación formativa

I.M.4.5.1

1. **Analiza** cada proposición y **escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

   a) Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos correspondientes son proporcionales.

   b) Uno de los teoremas de criterio de semejanza de triángulos es ALA.

   c) La semejanza de dos triángulos se puede demostrar con LLL.

   d) El triángulo rectángulo está formado por un ángulo de 90°.

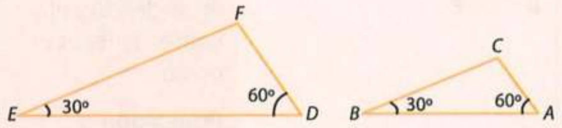
   e) Dos triángulos son semejantes si todos los pares de lados correspondientes son proporcionales.

   f) Si $\Delta PQR \sim \Delta MNO$, entonces $\measuredangle Q \cong \measuredangle N$

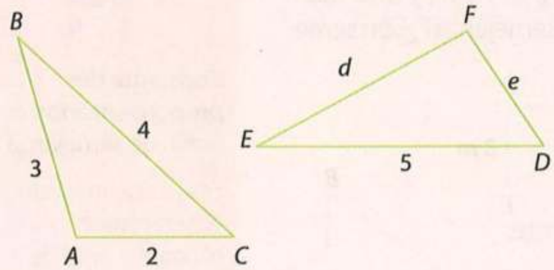
   g) Si $\Delta OPQ \sim \Delta RST$, entonces $\measuredangle STR \cong \measuredangle POQ$

   h) Si $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, entonces $\measuredangle A \cong \measuredangle Q$

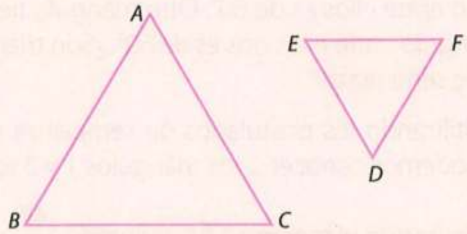
2. **Analiza** y **responde**. ¿Qué criterio de semejanza de triángulos puedes utilizar para demostrar que los triángulos ΔDEF y ΔABC son semejantes?



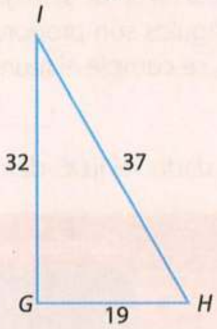
3. Dado $\measuredangle A \cong \measuredangle F$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ en la siguiente figura, **halla** las medidas respectivas de **d** y **e**.



4. Si los triángulos de la figura son equiláteros, **halla** la medida del $\measuredangle B$ y $\measuredangle D$.



5. Dado ΔGHI, **construye** un triángulo semejante, sabiendo que la razón de semejanza o constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$.



6. **Problema-decisión. Resuelve** el siguiente problema:

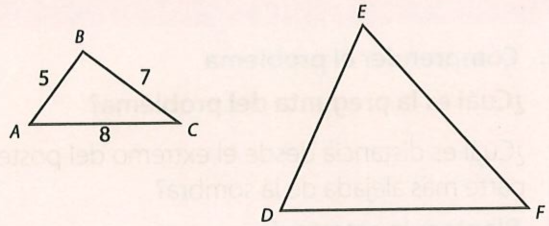
   Un poste eléctrico proyecta una sombra de 12 metros en un momento determinado del día. Al mismo tiempo, un florero de 25 centímetros de alto proyecta una sombra de 5 centímetros. **Determina** la altura del poste eléctrico.

   Si conoces que el poste está ubicado cerca de un colegio con riesgo de caer, ¿qué harías para evitar que provoque daños a las personas?

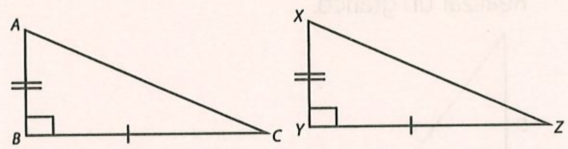
7. **Encuentra** la solución del siguiente problema.

Un triángulo tiene como medidas de sus lados 6,4 m, 6 m y 5 m, mientras que otro triángulo tiene como medidas 3,2 m, 3 m y 2,5 m. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Son semejantes estos triángulos?

8. **Resuelve**. Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, la longitud del lado EF es el triple del lado $\overline{BC}$, ¿qué longitudes tienen los lados respectivos de ΔDEF?



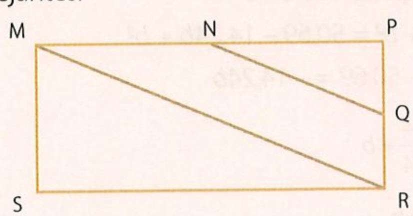
9. Dada la siguiente figura, **demuestra**: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$



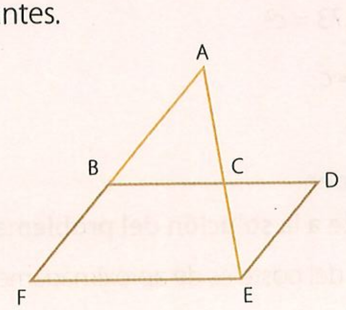
10. **Emplea** los criterios de semejanza y **determina** la solución del problema.

Un triángulo tiene dos lados de longitud 10 cm y 6 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 100°. Otro triángulo tiene lados de 5 cm y 3 cm y el ángulo entre ellos dos es de 100°. ¿Cuál es la razón de semejanza, si existe?

11. De la siguiente figura se conoce que: N es punto de $\overline{MP}$, Q es punto de $\overline{PR}$, $\overline{NQ}$ y $\overline{MR}$ son paralelas. **Demuestra** que los triángulos NPQ y MSR son semejantes.



12. En la figura, $BDEF$ es un paralelogramo. **Demuestra** que los triángulos AFE y CDE son semejantes.



Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

13. **Dibujen** dos triángulos semejantes ΔQRO y ΔDEO, opuestos por el vértice O, con D-O-Q y E-O-R puntos colineales.
$\overline{DE} = 6\ m$, $\overline{OQ} = 20\ m$, $\overline{DO} = 10\ m$, $\overline{QR} = 12\ m$, $\overline{OR} = 14\ m$, $\overline{EO} = 7\ m$.

Establezcan las respectivas correspondencias entre los lados y los ángulos homólogos y **hallen** la razón de semejanza entre los dos triángulos.

14. Los lados del ΔABC miden respectivamente: $a = 2\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 4\ cm$; los lados del ΔDEF miden respectivamente: $d = 8\ cm$, $e = 12\ cm$, $f = 16\ cm$. **Resuelvan**:

a) Los dos triángulos son semejantes, **establezcan** la relación de proporcionalidad.

b) **Hallen** los perímetros de ambos triángulos.

c) **Hallen** la razón de los perímetros.

d) **Encuentren** las áreas de los triángulos y **encuentren** su razón.

15. **Resuelvan** los siguientes problemas:

a) Un terreno mide 144 metros cuadrados de área. Otro terreno semejante es 10 veces más grande en cuanto a su área. ¿Cuánto mide el área grande?

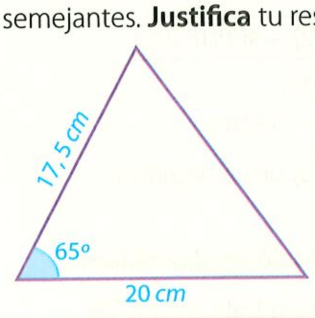
b) Una torre proyecta una sombra de 79,42 metros, y un poste que mide 3,05 metros proyecta una sombra de 5,62 metros. ¿Cuánto mide la torre?

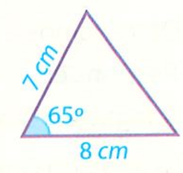
Actividad indagatoria

16. **Indaga** y **escribe** en tu cuaderno.

¿Es posible que dos triángulos sean semejantes, si el primero contiene ángulos que miden 50° y 79°, el segundo, 79°, y el tercero, 51°? ¿Por qué?

17. **Determina** si los siguientes triángulos son semejantes. **Justifica** tu respuesta.





Competencia matemática

Estrategia: realizar un gráfico

Problema resuelto

Manuel traza la ruta de su paseo y, observa que las ciudades de Quito, Ambato y Santo Domingo forman un triángulo rectángulo. Si la distancia entre Santo Domingo y Ambato es 234 *km* y el recorrido total de la ruta es 425 *km*, ¿cuál es la distancia entre Quito-Ambato?

1. **Comprender el problema**

   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿Cuál es la distancia entre Quito-Ambato?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   Realizar un gráfico.

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

   Realizar un dibujo.

Archivo editorial.

Determinar una ecuación y despeja y.

1) $x + y + 234 = 425$ $\quad y = 191 - x$

Encontrar la medida de un cateto. Aplicar el teorema de Pitágoras

2) $x^2 + y^2 = 234^2$

Sustituir la primera ecuación en la segunda.

$x^2 + y^2 = 234^2$

$x^2 + (191 - x)^2 = 234^2$

$x^2 + 36\,481 - 382x + x^2 = 54\,756$

$2x^2 - 382x - 18\,275 = 0$

Utilizar la fórmula general para resolver la ecuación.

$$x = \frac{-(382) \pm \sqrt{(-382)^2 - 4(2)(18\,275)}}{2(2)}$$

$x_1 = 230$ *km* y $x_2 = -39$ *km*

Descartamos la respuesta negativa.

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   La distancia Quito-Ambato es 230 *km*.

Problema resuelto

Al atardecer, un poste proyecta una sombra de 2,5 *m* de longitud. Cuál es la altura del poste, si la suma de las distancias que forman el triángulo es de 9,62 *m*.

1. **Comprender el problema**

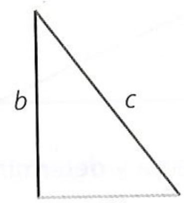
   ¿Cuál es la pregunta del problema?

   ¿Cuál es distancia desde el extremo del poste y la parte más alejada de la sombra?

2. **Plantear la estrategia**

   ¿Cuál es la estrategia de solución?

   Realizar un gráfico.



$a = 2,5$ *m*

3. **Aplicar la estrategia**

   ¿Cómo se aplica la estrategia?

1) $c + b + 2,5 = 9,62$

2) $(2,5)^2 + b^2 = c^2$

De la ecuación 1 despejamos c.

$c = 7,12 - b$

Reemplazando en 2

$6,25 + b^2 = 50,69 - 14,24b + b^2$

$6,25 - 50,69 = -14,24b$

$\frac{-44,44}{-14,24} = b$

$3,12 = b$

$a^2 + b^2 = c^2$

$6,25 + (3,12)^2 = c^2$

$6,25 + 9,73 = c^2$

$\sqrt{15,98} = c$

$c = 3,99$

4. **Responder**

   ¿Llegaste a la solución del problema?

   La altura del poste es de aproximadamente 3,12 *m*.

Problemas propuestos

1. Se va a realizar el cerramiento de un parque municipal de forma rectangular, que tiene de largo 36 m más que de ancho y cuya diagonal mide 216 m, ¿cuántos metros de cerramiento se necesitan?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

2. Una quinta mide 50 metros de frente y 80 metros de fondo. Tiene una huerta rodeada de una acera para protegerla y ocupan toda la superficie de la quinta. Además, si el área de la huerta es la misma que el área de la acera, ¿cuál es el ancho de la acera?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

3. Se necesita conocer el lado de un cuadrado, del que la suma de su área más su perímetro es numéricamente igual a 320:

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

4. Un poste de alumbrado público proyecta una sombra a cierta hora del día. Mientras que una persona de 1,8 m de altura, ubicada a 5,4 m de dicho faro, proyecta una sombra de 3,6 m a la misma hora del día. Halla la altura del poste:

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

5. **Halla** la altura de un árbol, teniendo en cuenta que la sombra que proyecta mide 12 metros y que, en ese mismo instante, la sombra de un palo de 1,5 metros mide 4,5 metros.

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

6. La altura que alcanza una pelota al lanzarla verticalmente hacia arriba viene dada por la ecuación $h = -16t^2 + v_0 t$, siendo v_0 la velocidad inicial y t el tiempo. Si la velocidad inicial de una pelota lanzada hacia arriba es de 80 pies/s.

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

- ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al suelo?
- ¿Qué altura alcanzará la pelota al cabo de los 2 segundos?
- ¿En qué tiempo alcanzará la pelota su altura máxima?

7. Cuáles son las dimensiones de una hoja de un libro cuyo perímetro es de 70 cm y su área es de 300 cm²?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

d) Responder.

8. Un terreno rectangular tiene de largo 3/4 de su ancho y su área es de 1 080 m². ¿Cuál es el perímetro del terreno?

a) Comprender el problema.

b) Plantear la estrategia.

c) Aplicar la estrategia.

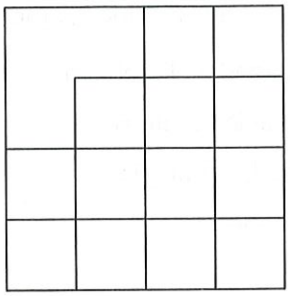
d) Responder.

Competencia matemática

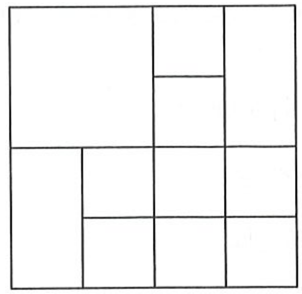
Pensamiento geométrico

1. ¿Cuántos cuadrados hay en cada figura?

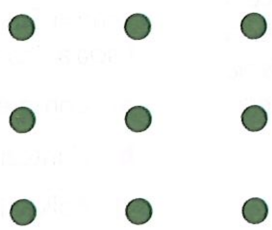
a)



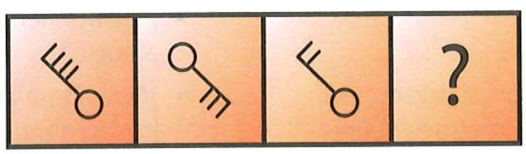
b)



2. ¿Cuántos triángulos pueden construirse si los vértices son tomados de los siguientes puntos?

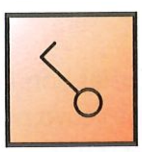


3. ¿Cuál alternativa pertenece al cubo dibujado en dos planos?



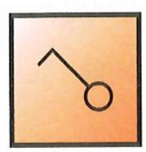
a)

b)



c)

d)



Cálculo mental

Descomponer números para sumar y restar

Se elige el número más alto y se descompone en un número múltiplo de 10. Por ejemplo:

a) $54 + 26 = 50 + 20$ y $4 + 6 = 70 + 10 = 80$

b) $73 + 63 = 70 + 60$ y $3 + 3 = 136$

c) $49 + 25 = 40 + 20$ y $9 + 5 = 74$

d) $36 + 45 = 30 + 40$ y $6 + 5 = 81$

e) $110 + 34 = 110 + 30 + 4 = 144$

Ahora, hazlo tú.

a) $87 + 55 =$

b) $54 + 32 =$

c) $125 + 85 =$

d) $66 + 67 =$

e) $42 + 57 =$

f) $72 + 36 =$

g) $120 + 204 =$

Matemática en el deporte

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Educación Física

Justificación / problemática

En nuestro país, en los últimos años se ha incrementado el sedentarismo, sobre todo en personas jóvenes. Esto se debe, en parte, al avance de la tecnología, ya que las personas prefieren pasar su tiempo frente a videojuegos, celulares o Internet, antes que realizar una actividad física. Por este motivo, en 2017, Ecuador realizó una importante inversión, que bordea los 100 millones de dólares por año. El Ejecutivo alienta a la población a dejar el sedentarismo a través de varios ejes que contemplan la construcción de infraestructura deportiva como los cinco Centros de Entrenamiento para el Alto Rendimiento (CEAR) que existen en el país; el apoyo a los deportistas de élite con el Plan de Alto Rendimiento y programas como Ecuador Ejercítate que activan a la ciudadanía. Con esto, se busca hacer que la práctica deportiva sea vital para la formación integral del ser humano y se pueda generar así una cultura deportiva.

Shutterstock. 321495263.

Texto adaptado de: http://www.ecuadorchequea.com/lenin-moreno-en-ecuador-hay-5-centros-de-alto-rendimiento-en-estados-unidos-solo-hay-2-falso/#:~:text=De%20acuerdo%20a%20la%20Direcci%C3%B3n,y%20R%C3%ADo%20Verde%20(Esmeraldas).

Objetivo

Fomentar la cultura deportiva en los jóvenes y despertar su interés, relacionando la matemática con el deporte en la medición de canchas o rendimiento, entre otras aplicaciones.

Recursos

- Grupo de trabajo
- Espacio para realizar un campeonato deportivo

Actividades

- **Organicen** un campeonato deportivo en su escuela.
- **Seleccionen** los deportes en los que participarán.
- **Investiguen** acerca de las medidas oficiales de las canchas para esos deportes, tipos de marcadores, tiempo de cada partido, entre otras cosas que se relacionen con la matemática.
- **Realicen** el evento.
- **Escriban** un informe que detalle en qué actividades usaron la matemática, y la importancia que esta tuvo para el campeonato deportivo.


Shutterstock. 373912963.

Evaluación

1. ¿Qué es lo más importante que aprendiste con el desarrollo de este proyecto?
2. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿cuál fue el cálculo más importante qué hiciste?
3. ¿Qué conclusión puedes obtener de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Los semáforos

Ecuaciones de segundo grado

Situación cotidiana

Diariamente, vemos semáforos en nuestros trayectos. Los semáforos ayudan a organizar el tráfico vehicular y la circulación de los peatones en el lugar que vivimos. Se puede relacionar la función de los semáforos con las ecuaciones de segundo grado, como lo verás en el siguiente problema.

Shutterstock, 707340751.

Se realizó una simulación del tiempo de frenado de un vehículo y se obtuvo la siguiente ecuación: $x = 6t^2 - 17t$, donde x es la distancia que recorre el vehículo y t es el tiempo de frenado.

Una persona que viene en su vehículo ve que el semáforo se pone en rojo 14 m antes de llegar a él e inmediatamente pisa el freno. ¿Durante qué tiempo debe mantener frenado al carro para no pasarse el semáforo?

Reflexiona

- ¿Por qué crees que los tiempos de espera en cada semáforo son diferentes?

  Se debe mantener por 3,5 segundos.

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- Si, en lugar de reaccionar inmediatamente, la persona que conduce demora su reacción medio segundo y mantiene frenado durante el mismo tiempo, ¿cuál es la distancia que recorre? ¿Alcanza a detenerse antes del semáforo?

Resuelve la situación

- Una persona va a cruzar una avenida de 30 m de ancho. Sabe que el semáforo peatonal le da 12 segundos y que, por estudios realizados, se utiliza la siguiente ecuación $x = t^2 - 7t$, donde x es la distancia que cruza el peatón y t es el tiempo empleado en cruzar. ¿Alcanza a cruzar la avenida en 12 seg? ¿Qué tiempo empleó?

- La distancia que recorre un auto, luego de que su conductor pisa el pedal de freno, está dada por la función $x = vt - 5t^2$, donde v es la velocidad a la que se desplaza el auto antes de frenar y t es el tiempo que demora hasta detenerse. **Calcula** la distancia que recorre un auto si se desplaza a 100 km/h si para detenerse totalmente necesita 5 segundos.

- Cuando lanzamos un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial, ésta se reduce conforme el objeto sube, debido a la acción de la gravedad. El objeto deja de subir y alcanza una altura máxima en donde su velocidad es cero y empieza a bajar hacia el suelo. La velocidad del objeto en función de la altura que este alcanza está dada por la ecuación $v^2 = v_o^2 - 2gh$ en donde v_o es la velocidad inicial, g es la gravedad = 9,8 m/s^2 y h la altura.

  ¿Qué altura alcanzará un objeto que es lanzado con una velocidad inicial de 10 m/s?

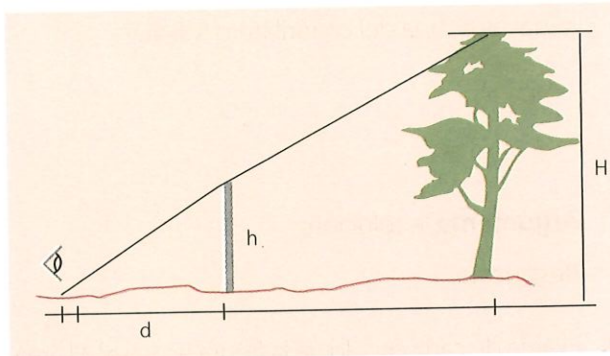
Shutterstock, 1062925232.

Tema: Altura de los árboles

Triángulos semejantes

Situación cotidiana

Uno de los métodos para medir la altura de los árboles, que evita subirse a ellos, es medir la proyección de la sombra en una determinada hora del día. Se utiliza una varilla previamente medida y, a la misma hora, se mide la proyección de su sombra. Con la ayuda de las propiedades de los triángulos semejantes, se elabora un gráfico y se realizan los cálculos.



Una varilla mide 1,5 m y proyecta una sombra de 2,15 m a las 16h00. A la misma hora se mide la sombra de un árbol y se obtiene un valor de 24 m. Se realiza el esquema y los cálculos necesarios para calcular la altura del árbol. ¿Cuál es el valor de esta altura?

Reflexiona

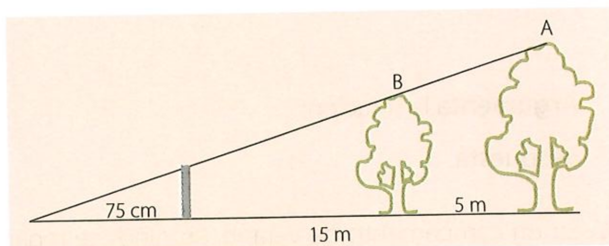
- ¿En qué otras situaciones cotidianas se utilizan la semejanza de triángulos?

La altura del árbol es de 14 m.

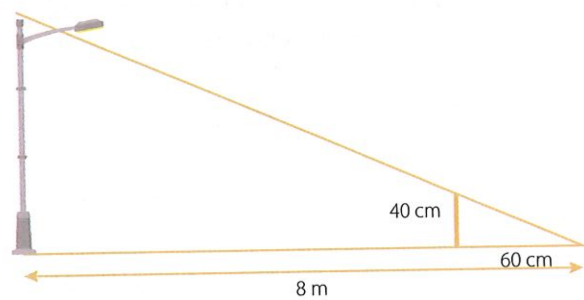
- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- ¿Crees que si se disminuye el tamaño de la varilla, disminuye la altura del árbol? Comprueba con estos datos: la varilla mide 1 m y su sombra mide 1,43 m. La medición se realiza a la misma hora.

Resuelve las situaciones

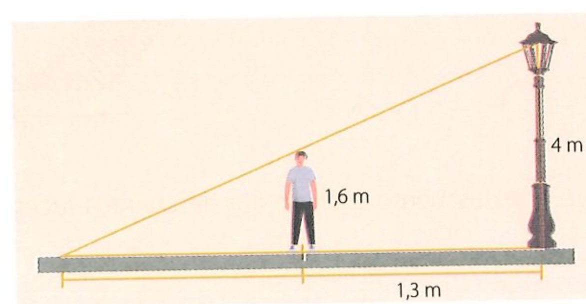
- A cierta hora del día, dos árboles separados entre sí 5 m proyectan una sombra común que, medida respecto del árbol más alejado, es de 15 m. Con una varilla de 1,2 m de longitud, a esa misma hora, produce una sombra de 75 cm. **Calcula** la altura de los árboles.



- Para saber la longitud de un poste se planta una varilla de 40 cm en un terreno a las 16h00. Enseguida se mide la sombra de la varilla que proyecta el sol sobre el piso y resulta de 60 cm. Luego, se mide la sombra del poste, siendo esta de 8 m. ¿Cuál es la longitud del poste?

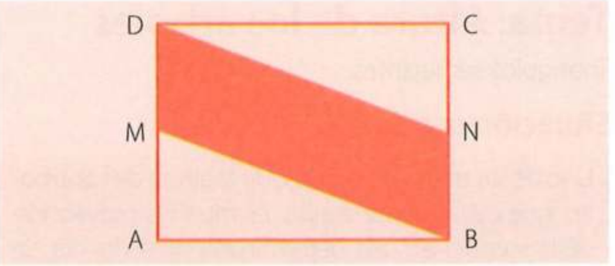


- Andrés se ha situado a 1,3 m de un poste de 4 m de longitud. Si la estatura de Andrés es de 1,6 m, ¿Cuál es la sombra que proyecta el poste sobre el piso?



Olimpiadas matemáticas

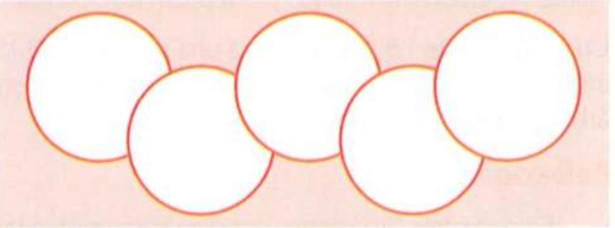
1. El área del rectángulo ABCD es 10 cm². Los puntos M y N son los puntos medios de los lados AD y BC. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MBND?



Argumenta la solución:

Respuesta:

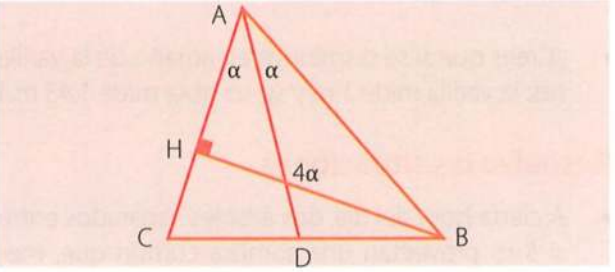
2. El área de cada círculo de la figura es 1 cm². El área común a dos círculos superpuestos es (1/8) cm². ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



Argumenta la solución:

Respuesta:

3. La figura muestra el triángulo ABC con la altura BH y la bisectriz AD. El ángulo obtuso entre BH y AD es 4 veces el ángulo DAB. ¿Cuánto mide el ángulo CAB?



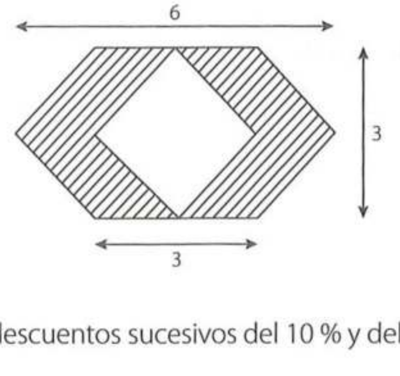
Argumenta la solución:

Respuesta:

Recuperado de: https://www.canguromat.org.es

4. En un campamento de verano, 96 niños se repartirán en varios grupos, de modo que cada grupo tenga el mismo número de integrantes. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer esto, si cada grupo debe tener más de 5, pero menos de 20 niños?

5. ¿Cuánto vale el área de la parte oscura?

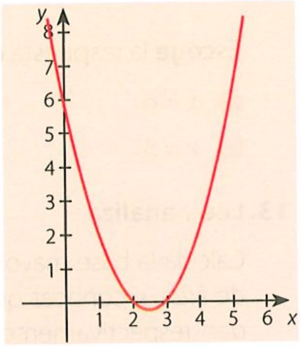


6. ¿A qué descuento equivale dos descuentos sucesivos del 10 % y del 20 %?

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Observa la gráfica de la ecuación y **determina** las raíces de la ecuación:



Escoge la respuesta correcta.

a) $x = 6$

b) $x = 2$ y $x = 3$

c) $x = 0$

d) No tiene solución

2. Lee y analiza.

Escribe el intervalo del rango de la gráfica anterior:

Escoge la respuesta correcta.

a) $[-0,5; \infty)$

b) $(-0,5; \infty)$

c) $[-0,25; \infty)$

d) $(-0,25; \infty)$

3. Lee y analiza.

De la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, indica las coordenadas del vértice:

Escoge la respuesta correcta.

a) $(-2,5; 0,25)$

b) $(2,5; -0,5)$

c) $(2,5; -0,25)$

d) $(-2,5; 0,5)$

4. Lee y analiza.

Encuentra por factorización las raíces de la ecuación: $x^2 - 8x + 12 = 0$

Escoge la respuesta correcta.

a) $x_1 = 6; x_2 = 2$

b) $x_1 = 4; x_2 = 3$

c) $x_1 = -6; x_2 = -2$

d) $x_1 = -4; x_2 = -3$

5. Lee y analiza.

El área de un rombo es 24 cm^2, **encuentra** el tamaño de su lado. La mitad de la diagonal mayor es x, y la mitad de la diagonal menor es $x - 1$:

Escoge la respuesta correcta.

a) 3,31 cm b) 10 cm c) 5 cm d) 2,64 cm

6. Lee y analiza.

Al resolver el problema anterior, se calculó las raíces de una ecuación cuadrática y fueron dos. ¿Qué raíz no se tomó en cuenta y por qué?

Escoge la respuesta correcta.

a) $x = 4$ porque no se verifica la ecuación

c) $x = -3$ porque no se verifica la ecuación

b) $x = 4$ porque no es un valor real

d) $x = -3$ porque no es un valor real

7. Lee y analiza.

Calcula la longitud de la base x de un triángulo si sabes que su área es de 16 cm^2, y que la altura mide 4 cm menos que la base:

Escoge la respuesta correcta.

a) La base mide 8 cm

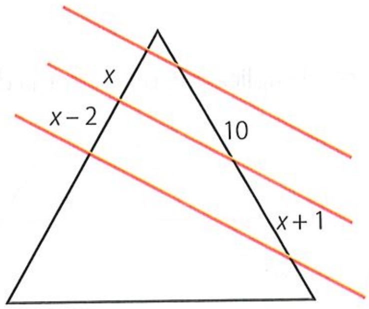
b) La base mide 4 cm

c) La base mide 16 cm

d) La base mide 2 cm

8. Lee y analiza.

Determina el valor de x con la utilización del teorema de Thales:



Escoge la respuesta correcta.

a) $x_1 = -5 \quad x_2 = -4$

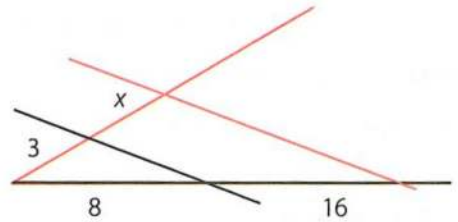
b) $x_1 = 4 \quad x_2 = -3$

c) $x_1 = 2 \quad x_2 = -5$

d) $x_1 = 5 \quad x_2 = 4$

9. **Lee** y **analiza**.

Encuentra el valor de x:



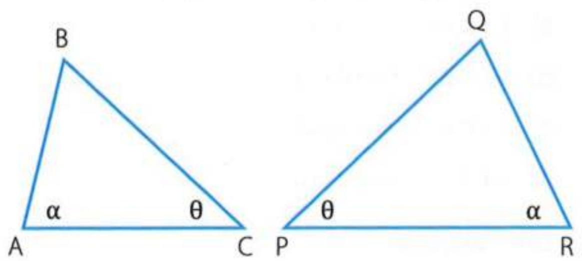
Escoge la respuesta correcta.

a) 3 **c)** 9

b) 6 **d)** 12

10. **Lee** y **analiza**.

Estos dos triángulos son semejantes, **encuentra** el valor de AB, si PQ = 25, QR = 15 y BC = 5:

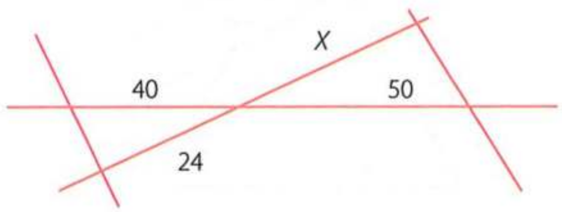


Escoge la respuesta correcta.

a) 5 **c)** 3

b) 4 **d)** 6

11. **Halla** x con la aplicación del teorema de Thales:



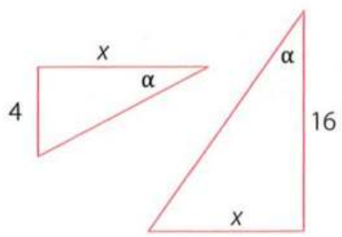
Escoge la respuesta correcta.

a) 54 **c)** 30

b) 40 **d)** 45

12. **Lee** y **analiza**.

Calcula x:



Escoge la respuesta correcta.

a) $x = 6$ **c)** $x = 4$

b) $x = 8$ **d)** $x = 10$

13. **Lee** y **analiza**.

Calcula la base mayor x de un trapecio de 130 m^2 de área, si conoces que la otra base y la altura miden, respectivamente, 2 cm y 4 cm menos que ella.

Escoge la respuesta correcta.

a) La base mayor mide 14

b) La base mayor mide –9

c) La base mayor mide 9

d) No tiene solución

14. **Lee** y **analiza**.

La suma de dos números es 17 y la suma de sus cuadrados es 145. ¿Cuáles son esos números?

Escoge la respuesta correcta.

a) 8 y 9

b) 10 y 7

c) 11 y 6

d) 12 y 5

15. **Lee** y **analiza**.

El valor de q para que la parábola $y = 2x^2 - 3x + (q + 4)$ pase por el punto (0,0) es:

Escoge la respuesta correcta.

a) 1

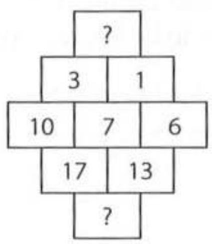
b) –4

c) –5

d) 6

16. **Lee** y **analiza**.

¿Por qué números se deben sustituir los signos de interrogación?



Escoge la respuesta correcta.

a) 2 y 14 **c)** 3 y 221

b) 2 y 30 **d)** 4 y 14

17. Lee y **analiza**.

El área de un rectángulo vale 1. ¿Cuál es el área del triángulo que resulta de cortar el rectángulo por la recta que une los puntos medios de dos lados adyacentes?

Escoge la respuesta correcta.

a) $\frac{1}{8}$ **c)** $\frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{3}{8}$

18. Lee y **analiza**.

Cristina añade 3 g de sal a 17 g de agua. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la solución obtenida?

Escoge la respuesta correcta.

a) 20 % **c)** 16 %

b) 17 % **d)** 15 %

19. Lee y **analiza**.

Las medidas de los ángulos en un triángulo, dadas en grados, son tres números enteros diferentes. ¿Cuál es la menor suma posible del ángulo mayor con el ángulo menor?

Escoge la respuesta correcta.

a) 91° **c)** 121°

b) 61° **d)** 131°

20. Lee y **analiza**.

Hay 4 niñas con diferentes edades, menores que 18. Si las edades son números enteros y su producto es 882, ¿cuál es la suma de sus edades?

Escoge la respuesta correcta.

a) 25 **c)** 23

b) 27 **d)** 31

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

Un rayo que recorrió 768 kilómetros en EE.UU., nuevo récord mundial

Shutterstock, 1723251952.

En las Grandes Llanuras en América del Norte y la cuenca del Plata en América del Sur se producen megatormentas.

"Un solo rayo que recorrió 768 kilómetros de distancia en el cielo del sur de Estados Unidos ha sido reconocido por la Organización Meteorológica Mundial (OMM) como el más largo jamás detectado.

Sirviéndose de la tecnología satelital más moderna, el comité de la OMM, encargado de los fenómenos meteorológicos y climáticos extremos, reconoció como el rayo más largo detectado a uno registrado el 29 de abril de 2020, que cruzó 768 kilómetros a través de Misisipi, Luisiana y Texas.

El nuevo valor de mayor distancia recorrida por un rayo jamás detectada supera en 60 kilómetros el récord anterior, dado que en esa ocasión el fenómeno se produjo a lo largo de 709 +/- 8 kilómetros a través del sur del Brasil, el 31 de octubre de 2018.

El mismo comité identificó como rayo individual de mayor duración una descarga que se produjo, de forma continuada, durante 17,102 +/- 0,002 segundos en una tormenta que se formó sobre Uruguay y el norte de Argentina, el 18 de junio de 2020. El anterior récord de mayor duración se observó en un rayo que se produjo de forma continuada durante 16,73 segundos en el norte de Argentina, el 4 de marzo de 2019.

Estas nuevas descargas sin precedentes se produjeron en zonas especialmente sensibles a las tormentas conocidas como sistemas convectivos de mesoescala, cuya dinámica hace posible que se produzcan megarrayos extraordinarios, a saber, las grandes llanuras en América del Norte y la cuenca del Plata en América del Sur.

«Cada vez que se oyen truenos, es momento de buscar un lugar seguro para protegerse de los rayos», señala Ron Holle, especialista en rayos y miembro del comité. «Los únicos lugares donde los rayos no constituyen una amenaza son los edificios de envergadura que cuentan con redes de cableado y de tuberías, no estructuras como las instaladas en la playa ni tampoco las paradas de autobús. Otro de los lugares considerados seguros es el interior de los vehículos con techo metálico completamente cerrado. Si se dispone de datos fiables que indiquen la presencia de rayos en un radio de 10 kilómetros, se deberá buscar refugio en un edificio o vehículo que brinde protección frente a los rayos. Cabe recordar que, como demuestran estos casos extremos, los rayos no solo pueden recorrer distancias descomunales en cuestión de segundos, sino que, además, forman parte de tormentas más grandes, así que hay que estar atentos»".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-rayo-recorrio-768-kilometros-eeuu-nuevo-record-mundial-202202030922_noticia.html

Ficha de comprensión lectora

1. ¿Sobre qué trata el artículo?
2. ¿Qué es el OMM y de qué se encarga?
3. ¿Cuándo y dónde fue detectado el rayo más largo? ¿Cuál fue la distancia que recorrió?
4. ¿En tu opinión qué pudo haber motivado al autor a escribir este texto?
5. ¿En qué zonas se han producido estas tormentas?
6. ¿A qué se refiere el especialista en rayos cuándo dice: «Cada vez que se oyen truenos, es momento de buscar un lugar seguro para protegerse de los rayos»?

Shutterstock, 1576801996.

Ficha de escritura académica

Actividad personall

1. **Investiga** en Internet acerca de cómo se producen los rayos. **Elabora** un resumen y **preséntalo** en clase.
2. **Ingresa** a la página web de la OMM. **Haz** una ficha técnica de la organización. ¿Quiénes son, qué hacen? ¿Cuál es su misión y visión?
3. **Toma** de la web diferentes imágenes sobre el tema principal de la lectura y **elabora** un *collage*.
4. **Indaga** sobre la forma de protegerse de los rayos y de las tormentas eléctricas, ¿Qué se debe hacer?, ¿Qué sitios son seguros? **Elabora** una infografía y **compártela** con tus compañeros.

Shutterstock, 116127718.

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para **crear** una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:

   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Hay que incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.

Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

I.M.4.3.4./I.M.4.3.5./I.M.4.5.1.

1. **Relaciona** cada característica de la función $f(x) = -5x^2 - x - 2$ con su respectiva respuesta.

a) Recorrido	1. $x = -0{,}1$
b) Vértice	2. $(-\infty, +\infty)$
c) Eje de simetría	3. $[-1{,}95; -\infty)$
d) Dominio	4. $(-0{,}1; -1{,}95)$

2. **Completa** la tabla con los términos de la ecuación.

Función	a	b	c
$f(x) = -3x^2 + 5x - 19$			
$y = 3x^2 + 4$			
$g(x) = -x^2 + 32x - 12$	En tu cuaderno		
$m(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - 2$			

3. **Resuelve** las ecuaciones cuadráticas utilizando el método gráfico.

a) $x^2 - 6x = 0$

b) $-x^2 - 8x = 0$

c) $-x^2 - 5x = 0$

4. **Soluciona** las ecuaciones cuadráticas utilizando cualquier método.

a) $625x^2 - 25x = 0$

b) $3x^2 - x - 2 = 0$

c) $-7x^2 + 17x + 12 = 0$

d) $2x^2 + 9x - 4 = 0$

5. **Resuelve** los siguientes problemas con ecuaciones cuadráticas.

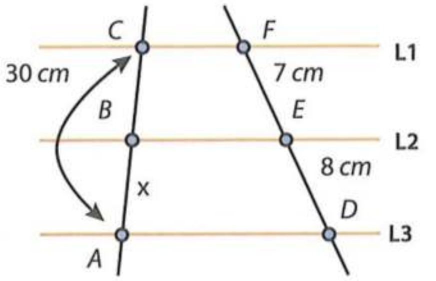
a) El área de un terreno rectangular mide 400 m^2. Si el largo es 3 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

b) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 85. ¿Cuáles son esos números?

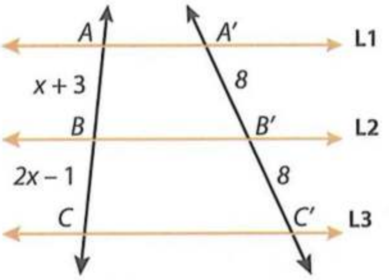
c) Dentro de 15 años, la edad de Angélica será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 5 años. ¿Cuál es la edad actual de Angélica?

6. **Aplica** el teorema de Thales y **encuentra** el valor de x. Si las rectas L1, L2 y L3 son paralelas.

a)



b)



Resuelve cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

7. **Selecciona** la respuesta correcta sobre el dominio y recorrido de la función $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$.

a) Dom: $(-\infty, +\infty)$ Rec : $[1, +\infty)$

b) Dom: $(-\infty, +\infty)$ Rec: $[-1, +\infty)$

c) Dom: $(-\infty, +\infty)$ Rec: $(-\infty, 1]$

d) Dom: $(-\infty, +\infty)$ Rec: $[-1, -\infty)$

8. **Determina** (V) si la afirmación es verdadera o (F) si la afirmación es falsa.

a) Una función cuadrática es estrictamente creciente o decreciente.

b) Cuando el coeficiente a es negativo, la función es cóncava hacia abajo.

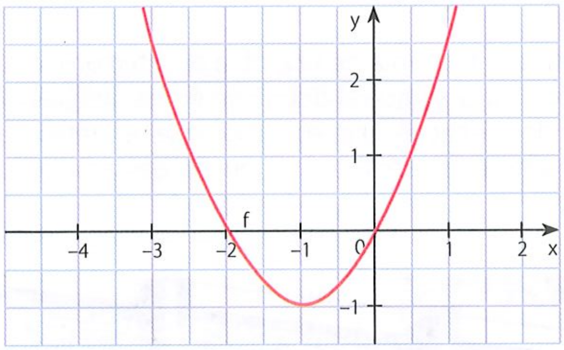
c) Los cortes con el eje x de una parábola son las soluciones de una ecuación cuadrática.

d) Una función que no corta el eje de las x tiene una única solución.

9. **Selecciona** las raíces de la ecuación cuadrática. $x^2 - 2x - 8 = 0$

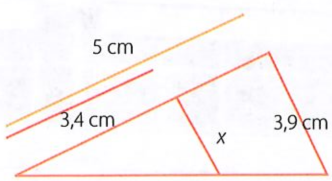
a) $x_1 = 4, x_2 = -2$
b) $x_1 = 4, x_2 = 2$
c) $x_1 = -4, x_2 = -2$
d) $x_1 = -4, x_2 = 2$

10. **Analiza** la siguiente gráfica y **responde**:



a) **Indica** la concavidad:
b) Las coordenadas del vértice son:
c) El punto de corte con el eje y:
d) Las raíces o soluciones de la ecuación son:
e) **Escribe** el dominio y rango:

11. **Encuentra** x con el teorema de Thales.



Coevaluación

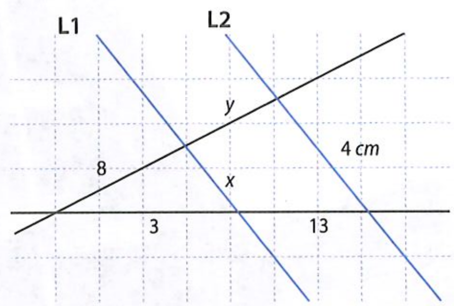
12. **Trabajen** en equipo y **resuelvan**.
Dada la función $f(x) = -x^2 - 6x + 9$, **determinen**.

a) Gráfica
b) Cortes con el eje y
c) Eje de simetría
d) Vértice
e) Dominio y recorrido
f) Monotonía
g) Raíces

13. **Resuelvan** las ecuaciones cuadráticas empleando el método más adecuado.

a) $3x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $4x^2 + 8x - 25 = 0$
c) $2x^2 - 6x - 3 = 0$
d) $4x^2 - 6x + 24 = 0$

14. **Determinen** el valor de x e y, aplicando el teorema de Thales. Si las rectas L1 y L2 son paralelas.



15. **Expreso mis emociones.** Cuando tengas que realizar tus tareas y demás obligaciones como estudiante, debes ser optimista. **Comparte** tu sentir con tus compañeros.

Autoevaluación

16. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros | **Resuelvo por mí mismo** | **Necesito ayuda** | **Estoy en proceso**

Contenidos	Determino las características: dominio, recorrido, monotonía, cortes de eje x y y, concavidad de una función cuadrática.	
	Encuentro las raíces mediante factoreo, completación de cuadrados o por la fórmula general.	
	Determino segmentos y triángulos semejantes aplicando el teorema de Thales en situaciones cotidianas.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad en situación de la vida cotidiana?

unidad 6

Ecuaciones cuadráticas, aplicaciones y eventos

Arquitectura y ecuaciones de segundo grado

A lo largo de la historia, ha surgido la necesidad del ser humano de construir un lugar donde refugiarse. Por esta razón, a través del tiempo han existido diferentes tendencias arquitectónicas y las ecuaciones de segundo grado siempre han estado ligadas a la arquitectura.

Es así que mediante el cálculo se puede determinar la estructura y forma de una obra arquitectónica. Por ejemplo, se puede construir diferentes tipos de puentes colgantes, ya que el diseño en forma de parábola permite distribuir uniformemente el peso al que son sometidos los cables. Otra aplicación que han tenido las ecuaciones de segundo grado es en el desarrollo de la creatividad e inventiva en lo que respecta a diseños vanguardistas que se observan en la imagen.

(Fuente: http://eprints.ucm.es/29760/1/160.pdf)

Preguntas generadoras

- ¿Qué otras aplicaciones de la parábola en la arquitectura hay?
- ¿En qué construcciones de tu ciudad has identificado parábolas?
- ¿Cómo ayuda el uso de la matemática en el sector de la construcción?

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones
- Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado
- Problemas con ecuaciones de segundo grado

Geometría y medida
- Relaciones trigonométricas
- Aplicaciones de las relaciones trigonométricas

Estadística y probabilidad
- Operaciones entre eventos
- Leyes de De Morgan en el cálculo de probabilidades

Objetivos
O.M.4.3. / O.M.4.5. / O.M.4.7.

Tema 1 Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado


Shutterstock, 540043255.

Los científicos suelen enunciar leyes mediante ecuaciones.

Desequilibrio cognitivo

Indaga. ¿En qué actividades se aplican las ecuaciones de segundo grado?

Antonio quiere determinar, sin resolver, cuál es el valor de la suma y el producto de las raíces de esta ecuación de segundo grado:

$$3x^2-7x-6=0$$

Sabemos que toda ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones o raíces:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La suma de las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática x_1+x_2 es:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=\frac{-2b}{2a}$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

Comparamos con la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Dividimos para a:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

La suma $\mathbf{S}=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ corresponde al coeficiente de x con signo contrario.

El producto de las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $x_1\cdot x_2$ es:

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Comparamos con la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Dividimos para a:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

El producto $\mathbf{P}=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ corresponde al término independiente.

¿Sabías que?

Existen otras propiedades.

- Suma de los cuadrados de las raíces.

$$x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-4ac}{a^2}$$

Cuando se conocen la suma y el producto de las raíces de la ecuación de segundo grado, la ecuación puede escribirse como: $x^2-Sx+P=0$.

Ejemplo

Encontrar la suma y el producto de las raíces de la ecuación $3x^2-7x-6=0$ sin resolverla.

Solución

Determinamos los coeficientes de la ecuación $3x^2-7x-6=0$.

$a=3, b=-7$ y $c=-6$

Obtenemos la suma: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{3}=\frac{7}{3}$

Obtenemos el producto: $P=\frac{c}{a}=-\frac{6}{3}=-2$

Enlace web

Para conocer más al respecto de este tema puedes **ingresa** al siguiente link *lynk.ec/10m18*

M.4.1.60. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

Análisis del discriminante

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

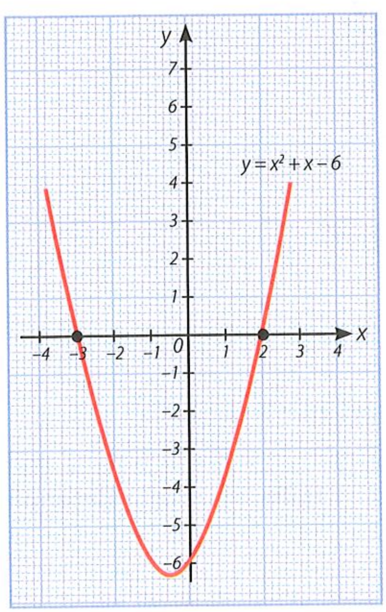
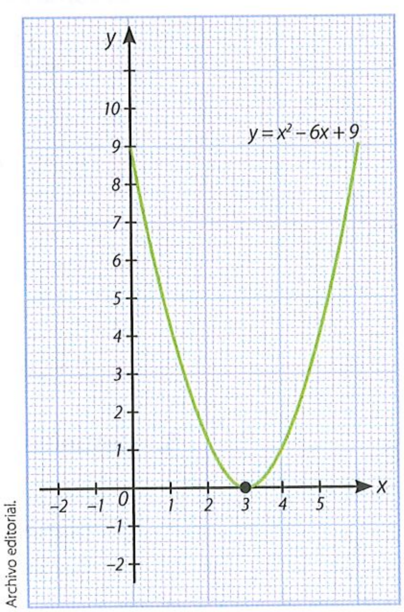
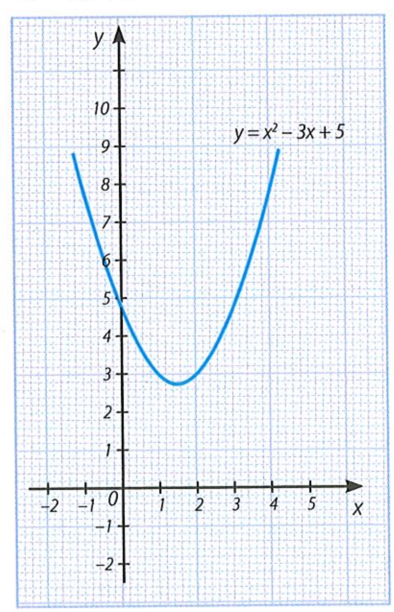
La cantidad subradical $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante, porque sirve para discriminar (discernir) entre los tipos de soluciones.

Existen tres posibles casos:

¿Sabías que?

La identidad de Legendre se aplica a las raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 \cdot x_2$$

Discriminante: $b^2 - 4ac > 0$ **Discriminante positivo** **Dos raíces reales diferentes**	**Discriminante: $b^2 - 4ac = 0$** **Discriminante nulo** **Raíces reales iguales**	**Discriminante: $b^2 - 4ac < 0$** **Discriminante negativo** **No hay raíces reales**
Ejemplo: $x^2 + x - 6 = 0$ Analizamos el discriminante. $a = 1,\ b = 1,\ c = -6$ $b^2 - 4ac > 0$ $1^2 - 4(1)(-6) > 0$ $1 + 24 > 0$ $25 > 0$ La ecuación tiene dos raíces reales diferentes. Graficamos la función cuadrática: $y = x^2 + x - 6$  Los puntos (–3, 0) y (2, 0) son los cortes de la parábola con el eje x, y son las soluciones de la ecuación: $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$	Ejemplo: $x^2 - 6x + 9 = 0$ Analizamos el discriminante. $a = 1,\ b = -6,\ c = 9$ $b^2 - 4ac = 0$ $(-6)^2 - 4(1)(9) = 0$ $36 - 36 = 0$ $0 = 0$ La ecuación tiene única solución, las dos raíces son reales e iguales. Graficamos la función cuadrática: $y = x^2 - 6x + 9$  Archivo editorial. El punto de corte de la parábola con el eje x es (3, 0), que es el vértice de la parábola. La ecuación tiene dos raíces reales iguales: $x_1 = x_2 = 3$	Ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 0$ Analizamos el discriminante. $a = 1, b = -3, c = 5$ $b^2 - 4ac < 0$ $(-3)^2 - 4(1)(5) < 0$ $9 - 20 < 0$ $-11 < 0$ La ecuación no tiene solución real. Graficamos la función cuadrática: $y = x^2 - 3x + 5$  La parábola no corta el eje de las x, por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones reales.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.3.5.

1. **Averigua**, sin resolver las ecuaciones, si los pares de números en cada caso son raíces de la ecuación.

   a) $x^2 + x - 12 = 0;$ $x_1 = 3,$ $x_2 = -4$

   b) $x^2 - 6x + 5 = 0;$ $x_1 = 1,$ $x_2 = 5$

   c) $2x^2 + 4x - 1 = 0;$ $x_1 = 2,$ $x_2 = -3$

   d) $x^2 - 6x + 9 = 0;$ $x_1 = -7,$ $x_2 = -1$

   e) $x^2 + 3x + 15 = ;$ $x_1 = -3,$ $x_2 = 3$

   f) $x^2 - 19x + 88 = 0;$ $x_1 = 8,$ $x_2 = 11$

   g) $3x^2 - 17x + 20 = 0;$ $x_1 = -5,$ $x_2 = -4$

   h) $2x^2 - 12x + 13 = 0;$ $x_1 = 12,$ $x_2 = 4$

   i) $5x^2 - 6x - 8 = 0;$ $x_1 = -\frac{4}{5}, x_2 = 2$

   j) $4x^2 - 12x + 9 = 0;$ $x_1 = \frac{3}{2},$ $x_2 = \frac{3}{2}$

2. **Construye** y **escribe** en tu cuaderno las ecuaciones de segundo grado dadas sus raíces en cada literal.

   a) $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$

   b) $x_1 = 3$ y $x_2 = -4$

   c) $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$

   d) $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$

   e) $x_1 = 8$ y $x_2 = -6$

   f) $x_1 = 10$ y $x_2 = 12$

   g) $x_1 = -15$ y $x_2 = -20$

   h) $x_1 = m - n$ y $x_2 = m + n$

   i) $x_1 = 3\sqrt{2} + 4$ y $x_2 = 4 - 3\sqrt{2}$

   j) $x_1 = \frac{1}{5}$ y $x_2 = -\frac{2}{5}$

3. **Determina** el valor de k en las ecuaciones para que cada una tenga dos soluciones iguales.

   a) $9x^2 + kx + 4 = 0$

   b) $x^2 + 5x + k = 0$

   c) $x^2 - 6x + k = 0$

   d) $kx^2 - 4x + 1 = 0$

4. **Halla** los números cuya suma S y producto P se dan a continuación. **Observa** el ejemplo.

   Ejemplo: $S = 4, P = -60.$

   Formamos la ecuación de segundo grado:
   $x^2 - 4x - 60 = 0$

   Buscamos la solución:
   $(x - 10)(x + 6) = 0$

   $x_1 = 10; x_2 = -6;$ estos son los números buscados. La suma es 4 y el producto –60.

   a) $S = \frac{15}{2}, P = \frac{7}{2}$

   b) $S = 18, P = 72$

   c) $S = -12, P = -45$

   d) $S = 20, P = -18$

5. **Resuelve** las siguientes situaciones.

   a) La ecuación $3x^2 - 2x + k = 0$ tiene como primera raíz –4. **Halla** la otra raíz y **determina** el valor de k.

   b) **Determina** el valor de k en la ecuación $9x^2 + kx + 1 = 0$, para que las raíces sean iguales y opuestas.

6. **Indica**, sin dibujarlas, en cuántos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 7x + 3$

b) $y = 3x^2 - 5x + 4$

c) $y = 2x^2 - 8x - 8$

d) $y = -2x^2 - x + 3$

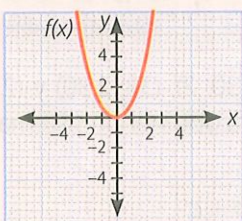
e) $y = 3x^2 - 22x + 35$

f) $y = -3x^2 + 5x - 6$

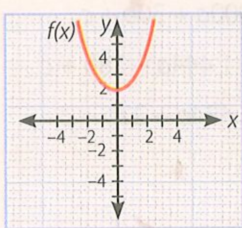
g) $y = -x^2 + 2x + 10$

7. **Analiza** cada gráfica y **determina** el tipo de raíces que tiene la función cuadrática en cada caso.

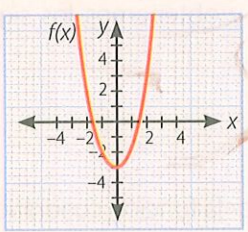
a)



b)



c)



Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. **Construyan** las ecuaciones de segundo grado dadas sus raíces en cada literal.

a) $x_1 = 8$ y $x_2 = 4$

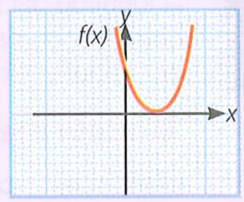
b) $x_1 = 10$ y $x_2 = 2$

c) $x_1 = 6$ y $x_2 = -2$

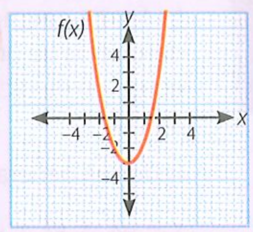
d) $x_1 = -4$ y $x_2 = 12$

9. **Observen** las gráficas y **determinen** el tipo de raíces que tiene la función.

a)



b)



10. **Resuelvan** los siguientes problemas.

a) Una raíz de la ecuación $2x^2 - kx + 48 = 0$ es 6. ¿Cuál es la otra raíz y cuál es el valor de k?

b) **Determinen** k en la ecuación $x^2 - 16x + k = 0$, sabiendo que sus raíces se diferencian en 4 unidades.

Actividad indagatoria

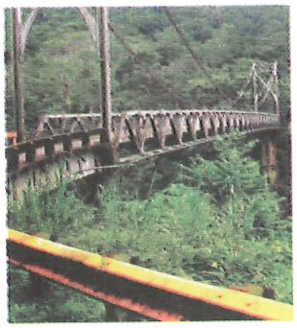
11. **Indaga** la forma de resolver el siguiente problema.

Mateo y Angélica solucionan un problema que se reduce a una ecuación de segundo grado. Mateo comete un error en el término independiente al escribir la ecuación de segundo grado y dice que las soluciones son 8 y 2. Angélica, en cambio, comete un error en el coeficiente del término lineal y dice que las soluciones son –9 y –1. ¿Cómo puedes encontrar la ecuación correcta?

Tema 2 Problemas con ecuaciones de segundo grado

Saberes previos

Indaga. ¿Qué es un puente colgante?



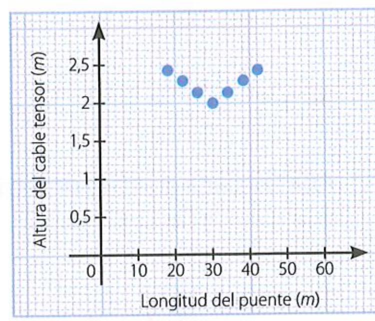
Shutterstock, 142460806.

Un equipo de estudiantes averigua que un puente colgante está sostenido por un cable en forma de arco invertido, formado por numerosos cables de acero de los que se suspende el tablero del puente, mediante tirantes verticales.

El equipo de estudiantes decide realizar una investigación de campo y acude a uno de los puentes colgantes, situado en la provincia de Pastaza. Encuentran que la longitud del puente es de 60 m, los cables tensores se encuentran separados entre sí con una distancia constante. Registran las observaciones que han hecho en la siguiente tabla. ¿Qué modelo matemático representan los datos?

Longitud del puente (m)	Altura del cable tensor (m)
30	2
34	2,15
38	2,30
42	2,45
26	2,15
22	2,30
18	2,45

Modelo matemático



Graficamos los datos obtenidos para determinar la forma geométrica que toma.

La forma geométrica que mejor aproxima los datos es la de una parábola. Para determinar la ecuación de dicha curva, haremos el siguiente análisis.

La forma general de la función cuadrática es:

$y = ax^2 + bx + c$. Tomamos tres puntos de la tabla: (30, 2); (38; 2,30) y (22; 2,30). Cada punto se reemplaza en la función cuadrática para obtener un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Así:

(30, 2), reemplazamos las coordenadas: $2 = 30^2a + 30b + c$;

$2 = 900a + 30b + c$; primera ecuación.

(38; 2,30) $2{,}3 = 38^2a + 38b + c$

$2{,}3 = 1\,444a + 38b + c$; segunda ecuación.

(22; 2,3) $2{,}3 = 22^2a + 22b + c$

$2{,}3 = 484a + 22b + c$; tercera ecuación.

Se forma el sistema de ecuaciones:

1. $2 = 900a + 30b + c$
2. $2{,}3 = 1\,444a + 38b + c$
3. $2{,}3 = 484a + 22b + c$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones lineales y obtenemos los siguientes valores:

$a = 0{,}004\,6$; $b = -0{,}281$; $c = 6{,}26$

Conclusiones matemáticas

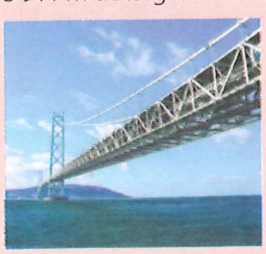
Nuestro modelo está representado analíticamente por la función cuadrática:

$y = 0{,}004\,6x^2 - 0{,}281x + 6{,}26$

La solución gráfica es la que se muestra a continuación.

¿Sabías que?

El puente colgante más largo del mundo es el Akashi Kaikyō, conocido como el "Puente de la Perla". Está en Japón y tiene una longitud de 3 911 m de largo.



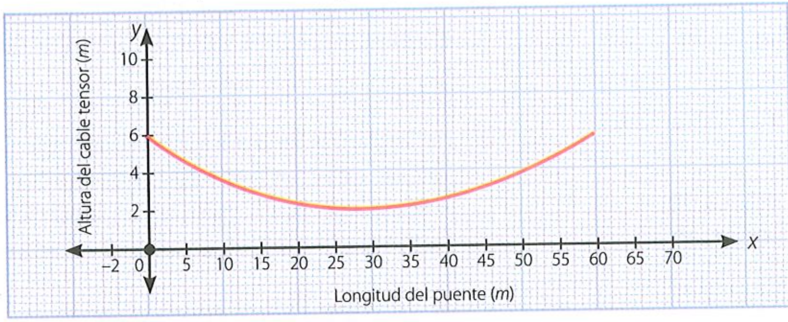
Shutterstock, 584878123.

M.4.1.61. Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Solución gráfica del modelo cuadrático

Representamos gráficamente la función: $y = 0{,}004\,6\,x^2 - 0{,}281x + 6{,}26$.

Nuestro modelo está representado gráficamente por una función cuadrática.



Predicciones en el mundo real. El arco que sostiene a un puente colgante tiene la forma de una parábola.

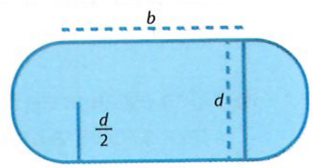
Un **modelo es** una descripción mediante una ecuación o una función de un fenómeno real.

Un **modelo es cuadrático** cuando lo podemos representar mediante una función cuadrática, cuya gráfica aproxime mejor a los datos.

Analicemos otro problema.

Problema del mundo real

Un terreno de 400 *m* de longitud tiene lados paralelos y cabeceras semicirculares, como indica la figura adjunta. ¿Cuál es el modelo matemático que expresa la relación entre el área encerrada por el terreno en función del diamétro de los semicírculos?



Modelo matemático

Determinamos el modelo matemático. Para ello, calculamos el área total del terreno:

$$A = b \cdot d + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$A = b \cdot d + \frac{\pi d^2}{4}$$

Ahora analizamos el perímetro del terreno.

$P = 2b + \pi d$; $400 = 2b + \pi d$

Despejamos b en función de d.

$$b = \frac{400 - \pi d}{2}$$

Reemplazamos la expresión anterior en la ecuación del área obtenida anteriormente.

$$A = b \cdot d + \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A = \left(\frac{400 - \pi d}{2}\right)d + \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A = \frac{800d - 2\pi d^2 + \pi d^2}{4}$$

$$A = 200d + \frac{1}{4}\pi d^2$$

El modelo matemático que relaciona el área del terreno con el diámetro de los semicírculos es el de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

¿Sabías que?

El proceso de un modelo matemático es:

Problema del mundo real
formular
Modelo matemático
resolver
Conclusiones matemáticas
interpretar
Predicciones en el mundo real

Competencia socioemocional

Si existen conflictos entre tus compañeros, aporta con soluciones positivas y concilia las diferencias que se puedan dar, siempre considerando la perspectiva y los sentimientos de los demás.

Reflexiona y **comenta** tu opinión sobre esta afirmación.

I.M.4.3.5.

1. **Resuelve** la siguiente situación.

El número de teléfonos celulares (en miles), vendidos por una empresa entre los años 2017 y 2021, se representa en la siguiente tabla:

Núm. (en miles)	20	35	50	70	65
años	2017	2018	2019	2020	2021

a) **Realiza** en tu cuaderno una gráfica del problema con la información de la tabla.

b) **Escribe** el modelo matemático que determina el problema.

c) **Establece** conclusiones.

2. **Resuelve** los siguientes problemas:

a) El lado de un rectángulo mide el doble que el otro lado. Si al mayor se le aumenta en 2 unidades y al menor se le disminuye en 2 unidades, el rectángulo obtenido tiene 4 m^2 de área más que la mitad del primer rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones?

b) Una escalera de 10 metros de longitud la cual reposa contra una pared.

El pie de la escalera se encuentra a 6 metros de la pared. Si la escalera se desliza, el pie se separa 3 metros más. ¿Qué distancia hacia abajo se mueve la parte superior de la escalera?

c) Juan tiene un alambre de 17 *m*. ¿Cómo debe doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 9 *m*?

d) Una piedra cae, en caída libre, desde una altura de 50 *m*, partiendo del reposo. ¿Qué tiempo tarda en llegar al suelo?

e) Una región rectangular tiene un perímetro de 300 *cm*. **Expresa** el área de la región en función de la longitud de uno de sus lados.

f) Una piscina rectangular fue construida con un área de 1 000 m^2 y un perímetro de 140 m. ¿Qué longitud tiene cada lado de la piscina?

g) ¿Cuáles son los dos números positivos, tales que, la suma de sus cuadrados sea 193 y su diferencia sea 5?

h) La suma de los cuadrados de dos números enteros, negativos y consecutivos es 481.

¿Cuáles son esos números?

i) Karla visitó la feria del libro. Allí compró una colección de libros por $ 90. Si hubiera comprado 3 libros más por la misma cantidad de dinero, cada libro le hubiese costado $ 1 menos.

i) ¿Cuántos libros compró Karla?

ii) ¿Cuánto pagó por cada libro de la colección?

j) José creó un cuadrado algo especial: su área más su perímetro suman 1 440.

¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?

k) La suma de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 340. ¿Cuáles son esos números?

l) Se sabe que 20 veces un número más 100 veces su recíproco es 10 unidades menor que 220. ¿Cuál es el número misterioso?

m) ¿Qué número negativo multiplicado por 5 es 50 unidades menos que su cuadrado?

n) Un equipo de diseñadores trabaja en un modelo para una mesa cuadrada. Ellos saben que si aumentan 4 cm a cada lado de la mesa, su área crecerá 825 cm^2.

¿Cuál es el ancho actual de la mesa?

3. **Resuelve** el problema con guía.

Los estudiantes de décimo de EGB quieren elaborar una cartelera rectangular de corcho para el aula. En ella van a colocar fotografías, recordatorios, mensajes, entre otros materiales. Disponen de algunas piezas de corcho de forma cuadrada. Cada lado mide 10 *cm*. También disponen de una tira de madera de 180 *cm* para el marco.

¿Cuántas piezas de corcho necesitan para que la cartelera sea la más grande que pueda ser enmarcada con la tira de madera?

a) ¿Qué posibles dimensiones puede tener la cartelera? Para averiguarlo, **completa** la tabla en tu cuaderno.

ancho (m)	largo (m)	perímetro (cm)	área (cm^2)
10	80	180	800

b) **Grafica** en tu cuaderno los pares ordenados determinados en la tabla anterior (ancho y área).

c) Al unir los puntos anteriores, ¿qué forma tiene la gráfica?

d) ¿Cuál es la solución del problema?

e) **Grafica** los pares ordenados formados por el ancho y el largo que se encuentra en la tabla.

f) ¿Qué gráfica obtienes?

g) ¿Cuál es la ecuación que modela la gráfica del ancho y el área?

4. **Resuelve** el siguiente problema.

Una pista de baile tiene forma circular. Un arquitecto calculó que para hacer la pista 16 veces más grande, debería aumentarse su radio en 12 metros, pero olvidó anotar el radio actual de la pista. ¿Cuál es el radio actual de la pista de baile?

5. **Problema-decisión.** Un grupo de estudiantes ha decidido realizar una excursión. Los gastos contratados ascienden a 90 dólares, pero si tres estudiantes no asisten, cada uno de los asistentes deberá pagar un dólar más.

¿Cuántos estudiantes tiene el grupo?

Si fueras uno de los estudiantes y debes elegir entre ir a la excursión o participar de una visita familiar prevista por tus padres, ¿qué decisión tomarías? **Justifica.**

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

6. **Resuelvan** los siguientes problemas:

a) El grupo de estudiantes de décimo de básica, para poder ahorrar alambre, decide utilizar una de las paredes del edificio como lado del terreno. De esta forma, solamente necesitan cerrar con 100 m de alambre tres lados del terreno. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones del terreno, de tal manera que el área por cercar sea máxima?

b) Este problema ha sido tomado del libro de matemática chino conocido como Chui-chang suan-shu. "Un vástago de bambú de 10 pies de largo se rompe de forma tal que su punta toca la tierra a 3 pies de la base". ¿A qué altura se rompió el bambú?

c) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 9 m, ¿cuál es el modelo matemático que expresa el área en función del ancho de la ventana?

7. **Resuelvan** la siguiente situación.

La altura en kilómetros de un cohete es un modelo particular descrita por la función cuadrática $h(t)=0{,}5\left(-9{,}89t^2+4{,}9t+2{,}5\right)$, donde t representa el número de segundos después del despegue. ¿Qué respuestas darías para las siguientes preguntas?:

a) ¿Qué representan los coeficientes −9,8; 4,9 y 2,5?

b) ¿Cuáles son las unidades usadas para describir la altura del cohete?

c) ¿Cuál es el vértice de la función?

d) ¿Qué puedes decir de la forma de la parábola?

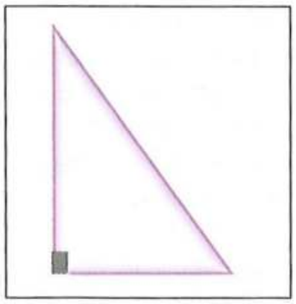
Actividad indagatoria

8. **Indaga** y **resuelve** en tu cuaderno.

a) **Plantea** un problema en el cual, para su resolución, debas tomar medidas y luego aplicar las ecuaciones de segundo grado.

b) **Indaga** sobre las ecuaciones del tiro vertical hacia arriba. **Halla** el tiempo que demora un objeto alcanzar su altura máxima si es lanzado con una velocidad de 20 m/s. **Considera** el valor de la gravedad g = 10 m/s^2. **Utiliza** solo la ecuación de la altura en función del tiempo.

Tema 3 Relaciones trigonométricas

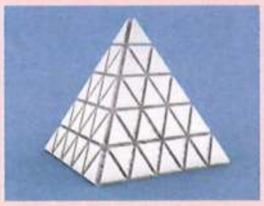


Archivo editorial.

Triángulo rectángulo

¿Sabías que?

Hace más de 5 000 años, los matemáticos egipcios conocían la relación entre el valor de las razones de las longitudes de los lados y la medida de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo. Esos valores eran útiles en la determinación de distancias imposibles de medir directamente y, por ello, se establecieron razones trigonométricas.



Shutterstock, 1581184210.

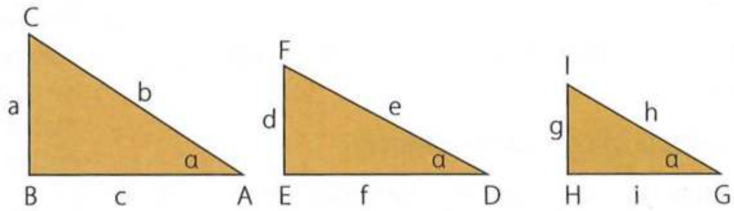
Interculturalidad

La Ley Orgánica de la Educación Intercultural (Ecuador, 2011) estipula la contextualización, valoración, respeto, desarrollo y transversalización de la interculturalidad en el sistema de educación nacional. Así, se busca fomentar la diversidad cultural y lingüística.

Desequilibrio cognitivo

Indaga. ¿Qué es una razón trigonométrica?

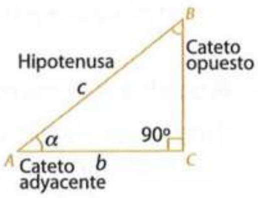
Observemos los siguientes triángulos rectángulos, que a su vez tienen un ángulo agudo congruente.



Los triángulos anteriores son semejantes por el criterio de semejanza ángulo-ángulo. Si se conoce uno de los ángulos agudos del triángulo, la razón entre dos lados del triángulo es constante.

En todo triángulo rectángulo, los catetos son los lados que forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado más grande del triángulo, opuesto al ángulo recto.

El cateto adyacente es aquel que forma un lado del ángulo agudo que se está empleando.



Razones trigonométricas

El valor de cada razón trigonométrica es independiente de la medida de los lados del triángulo rectángulo, porque solo depende del valor del ángulo agudo empleado.

Nombre	Razón trigonométrica	Definición	En la figura
Seno	$Sen(\alpha)$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
Coseno	$Cos(\alpha)$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{b}{c}$
Tangente	$Tan(\alpha)$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{a}{b}$
Cosecante	$Csc(\alpha)$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$\frac{c}{a}$
Secante	$Sec(\alpha)$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{c}{b}$
Cotangente	$Cot(\alpha)$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	$\frac{b}{a}$

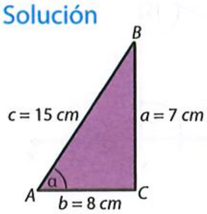
M.4.2.16. Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

Resolución de triángulos rectángulos

Ejemplos

a) Escribir las razones trigonométricas del triángulo rectángulo *ABC*.

Solución

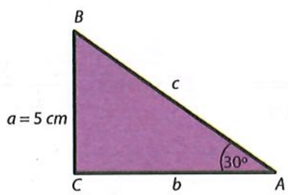


$$Sen(\alpha)=\frac{7}{15};\ Cos(\alpha)=\frac{8}{15};\ Tan(\alpha)=\frac{7}{8}$$

$$Csc(\alpha)=\frac{15}{7};\ Sec(\alpha)=\frac{15}{8};\ Cot(\alpha)=\frac{8}{7}$$

b) Resolver el siguiente triángulo rectángulo y escribir todas las razones trigonométricas.

Solución



Resolver el triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de todos los lados y ángulos.

a y *b* son los catetos, y *c* es la hipotenusa.

Primero: hallamos la medida de la hipotenusa.

$Sen(30°)=\frac{5}{c}$, despejando la incógnita *c*, empleamos una calculadora para calcular el *sen*(30°)

$$c=\frac{5}{Sen(30°)}=\frac{5}{0,5}=10\ cm$$

Segundo: encontramos la medida del lado *b*, para lo cual aplicaremos el teorema de Pitágoras.

$b=\sqrt{c^2-a^2}$ Reemplazando los datos:

$b=\sqrt{10^2-5^2}=8,66\ cm$

Tercero: determinamos la medida del ángulo *B*. Como aprendimos en temas anteriores, la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, por lo tanto, si conocemos el valor de dos ángulos, por sumatoria, obtenemos el valor del tercer ángulo.

$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°;\quad 30°+\measuredangle B+90°=180°\quad \measuredangle B=60°$

Cuarto: escribimos las razones trigonométricas con relación al ángulo *A*.

$$Sen(\alpha)=\frac{5}{10};\ Cos(\alpha)=\frac{8,66}{10};\ Tan(\alpha)=\frac{5}{8,66}$$

$$Csc(\alpha)=\frac{10}{5};\ Sec(\alpha)=\frac{10}{8,66};\ Cot(\alpha)=\frac{8,66}{5}$$

Uso de la calculadora

Para encontrar el valor de una razón trigonométrica, se utilizan las teclas: *sen, cos, tan*. Por ejemplo:

Archivo editorial.

Para hallar el seno de 30° se ingresa *Sen*30.

DFA

Cuando en un grupo hay personas con discapacidad, es importante coordinar tiempos que resulten cómodos y adecuados para la realización o exposición de los trabajos.

Interdisciplinariedad

Matemática y Medicina

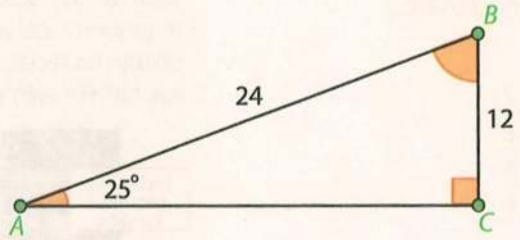
En la medicina, la matemática tiene una gran importancia. Ayuda a conocer las problemáticas presentes en una comunidad, los factores de riesgo o predisposición a ciertas patologías y puede ser muy útil a la hora de buscar una respuesta para las enfermedades.

Indaga y **elabora** un párrafo acerca de la relación entre la matemática y la medicina.

I.M.4.6.2.

1. **Completa** con las razones trigonométricas de cada triángulo rectángulo dado. **Encuentra** el lado faltante aplicando el teorema de Pitágoras.

a)

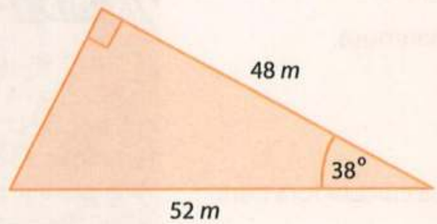


i) $Sen(25°)$ iv) $Csc(25°)$

ii) $Cos(25°)$ v) $Sec(25°)$

iii) $Tan(25°)$ vi) $Cot(25°)$

b)

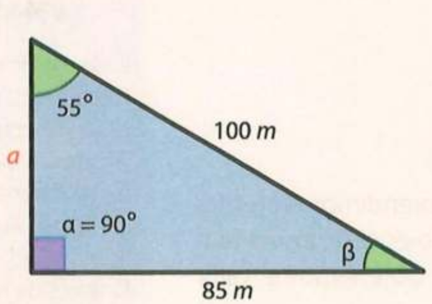


i) $Sen(38°)$ iv) $Csc(38°)$

ii) $Cos(38°)$ v) $Sec(38°)$

iii) $Tan(38°)$ vi) $Cot(38°)$

c)

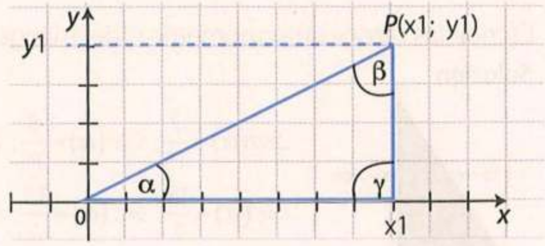


i) $Sen(55°)$ iv) $Csc(55°)$

ii) $Cos(55°)$ v) $Sec(55°)$

iii) $Tan(55°)$ vi) $Cot(55°)$

2. **Selecciona** la expresión correcta según la figura mostrada:



* El ángulo ϒ es recto (ϒ = 90º).

a) $tan(\alpha) = \frac{x1}{y1}$

e) $tan(\alpha) = \frac{y1}{x1}$

b) $tan(\alpha) = \frac{y1}{\sqrt{x1^2 + y1^2}}$

f) $sen(\alpha) = \frac{y1}{\sqrt{x1^2 + y1^2}}$

c) $sen(\alpha) = \frac{x1}{\sqrt{x1^2 + y1^2}}$

g) $sen(\alpha) = \frac{x1}{y1}$

d) $cos(\alpha) = \frac{x1}{\sqrt{x1^2 + y1^2}}$

h) $cos(\alpha) = \frac{y1}{\sqrt{x1^2 + y1^2}}$

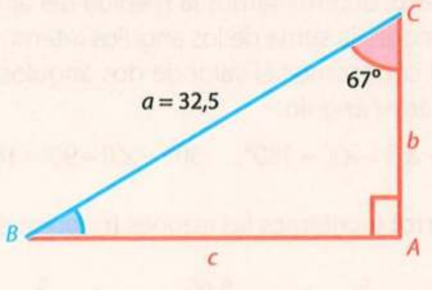
3. **Escribe** V si la afirmación es verdadera o F si la afirmación es falsa.

a) Las razones trigonométricas se realizan con base en un ángulo obtuso.

b) El coseno de un ángulo es igual a la hipotenusa sobre el cateto adyacente.

4. **Resuelve** los triángulos rectángulos encontrando todas las medidas del triángulo y **escribe** sus razones trigonométricas.

a)

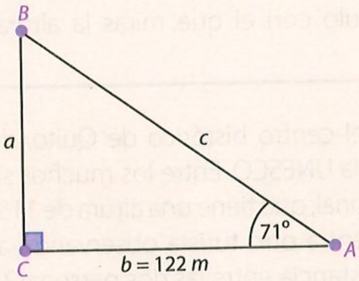


i) $Sen(67°)$ **iv)** $Csc(67°)$

ii) $Cos(67°)$ **v)** $Sec(67°)$

iii) $Tan(67°)$ **vi)** $Cot(67°)$

b)

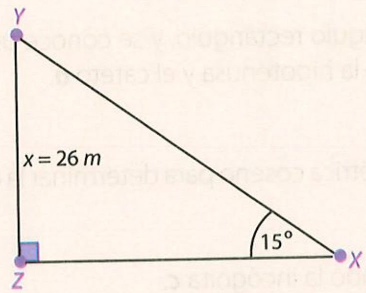


i) $Sen(71°)$ **iv)** $Csc(71°)$

ii) $Cos(71°)$ **v)** $Sec(71°)$

iii) $Tan(71°)$ **vi)** $Cot(71°)$

c)

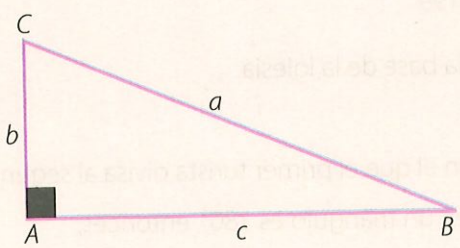


i) $Sen(15°)$ **iv)** $Csc(15°)$

ii) $Cos(15°)$ **v)** $Sec(15°)$

iii) $Tan(15°)$ **vi)** $Cot(15°)$

5. Determina, en cada caso, la longitud del segmento indicado, con la ayuda de una calculadora.



a) $\measuredangle ABC = 20°,\ b = 10u,\ a = ?$

b) $\measuredangle ABC = 20°,\ b = 10u,\ c = ?$

c) $\measuredangle ACB = 30°,\ c = 8u,\ b = ?$

d) $\measuredangle ABC = 15°,\ a = 20u,\ c = ?$

e) $\measuredangle ABC = 15°,\ a = 20u,\ b = ?$

f) $\measuredangle ACB = 60°,\ a = 25u,\ b = ?$

6. Resuelve el siguiente problema.

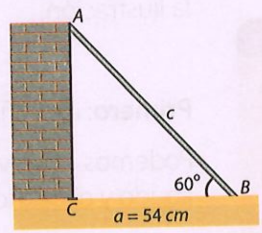
Una persona se encuentra a 5 *m* de un árbol. Si observa a la punta del árbol con un ángulo de 52°, ¿cuál es la altura del árbol? ¿Cuál es la distancia de la punta del árbol a la persona?

Trabajo colaborativo

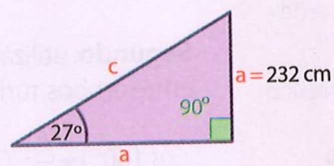
Trabajen en equipo y **resuelvan.**

7. Encuentren las medidas de los lados que faltan en cada triángulo rectángulo.

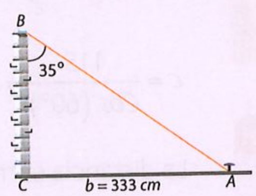
a)



b)



c)



8. Resuelvan los problemas.

a) Cuál es la altura de un triángulo rectángulo que mide 12 *cm* de base y el ángulo que forma la hipotenusa con su base es 40°.

b) Una niña vuela una cometa a 65 *m* de la sombra proyectada perpendicularmente de dicha cometa, y el ángulo formado por la longitud del hilo y el suelo es 65°. ¿Cuál es la longitud del hilo de la cometa?

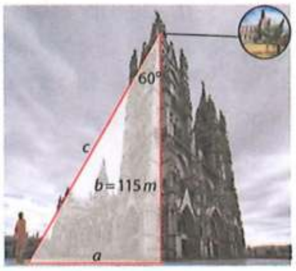
Actividad indagatoria

9. Investiga dos aplicaciones en la vida cotidiana de las razones trigonométricas y **plantea** problemas con esos datos.

Tema 4 Aplicaciones de las relaciones trigonométricas

Saberes previos

Reflexiona. ¿Cómo encontrarías el ángulo con el que miras la altura de un monumento?



Shutterstock, 1179388887 / 511563886 / 208526053.

Vista a la Basílica.

Una persona viaja a Ecuador a conocer el centro histórico de Quito, declarado Patrimonio Cultural de la Humanidad por la UNESCO. Entre los muchos sitios que visita, se encuentra la Basílica del Voto Nacional, que tiene una altura de 115 *m* hasta su cúpula más alta. Si desde ahí se encuentra otro turista observando al primer viajero con un ángulo de 60°, ¿cuál es la distancia entre las dos personas? ¿Cuál es la distancia entre el viajero que se encuentra en el suelo al pie de la Basílica? ¿Cuál es el ángulo con el que el primer viajero observa al segundo?

Para resolver este problema, es necesario dibujar la situación como se muestra en la ilustración.

Primero: identifiquemos los datos e incógnitas del problema.

Podemos observar que se forma un triángulo rectángulo, y se conoce un ángulo agudo y el cateto ***b***, siendo las incógnitas la hipotenusa y el cateto ***a***.

Segundo: utilizaremos la razón trigonométrica coseno para determinar la distancia entre ambos turistas.

$Cos\left(60°\right)=\frac{b}{c}$; $\text{Cos}\left(60°\right)=\frac{115}{c}$. Despejando la incógnita ***c***.

$$c=\frac{115}{Cos\left(60°\right)}=230$$

La distancia entre los dos turistas es 230 *m*.

Tercero: aplicamos el teorema de Pitágoras para determinar la distancia entre el primer turista y la base de la Basílica.

$a=\sqrt{c^2-b^2}$; $a=\sqrt{230^2-115^2}=199$

El turista se encuentra a 199 *m* de la base de la iglesia.

Cuarto: encontremos el ángulo con el que el primer turista divisa al segundo.

La sumatoria de ángulos internos en un triángulo es 180°, entonces,

$90°+60°+\measuredangle B=180°$, $\measuredangle B=30°$

El primer turista observa al segundo con un ángulo de 30°.

¿Sabías que?

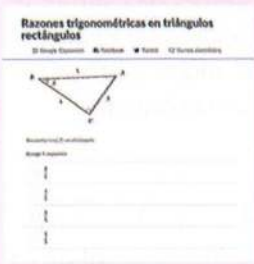
El ángulo de elevación es el que forma la horizontal del observador y el lugar observado cuando este está situado arriba del observador.

El ángulo de depresión es el que se va a medir por debajo de la horizontal del observador.

Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace: *lynk.ec/10m19*

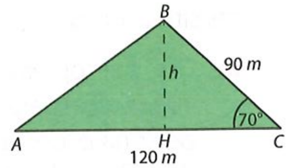
Practica relaciones trigonométricas **evalúa** tu aprendizaje mediante ejercicios interactivos.



M.4.2.17. Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Ejemplos

a) Para sembrar arroz, Eugenio tiene una parcela triangular cuyos lados miden 90 m y 120 m y entre ellos forman un ángulo de 70°. ¿Cuál es el área del terreno que se puede sembrar?



Terreno en forma triangular.

Solución

Identificar las incógnitas del problema.

Para encontrar el área de un triángulo, necesitamos conocer su base y su altura. En este caso no tenemos el valor de la altura, pero por definición sabemos que la altura es perpendicular a la base y forma un triángulo rectángulo *HBC* como se muestra en la figura.

Primero: aplicamos la razón trigonométrica sen (70°) para encontrar el valor de *h*.

$$Sen\left(70°\right)=\frac{h}{90};\ h=90\cdot Sen\left(70°\right);\ h=84{,}57m$$

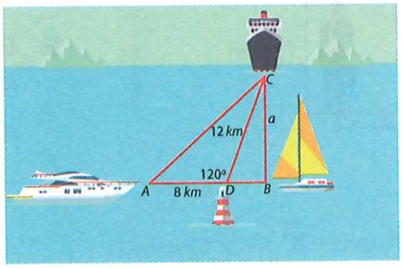
La altura del triángulo es 84,57 m.

Segundo: hallamos el área de la parcela.

$$A=\frac{b\times h}{2};\ A\ =\ \frac{120\times 84{,}57}{2}=5\ 074{,}2$$

El área del terreno es 5 074,2 m^2.

b) Tres barcos se encuentran en una posición tal que entre ellos forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. El barco *A* se encuentra a 8 km de una boya marina, y el barco *C* a dicha boya tiene una distancia de 12 km. El ángulo entre estas dos distancias es 120°. ¿Cuál es la distancia del barco *B* al barco *C*?



Archivo editorial.

Solución

Primero: tenemos dos triángulos rectángulos, pero trabajaremos con el triángulo *BCD*. Para hallar la distancia entre las embarcaciones debemos conocer un ángulo agudo. Entonces tenemos que:

$120° + \measuredangle D = 180°$. Por ser ángulos suplementarios, $\measuredangle D = 60°$.

Segundo: encontremos el valor de *a*, aplicando la razón trigonométrica *Sen* (60°).

$$Sen\left(60°\right)=\frac{a}{12};\ a=12\cdot Sen\left(60°\right);\ h=10{,}39\,km$$

La distancia entre los barcos es 10,39 km.

Uso de la calculadora

Para hallar el ángulo de un triángulo rectángulo, se aplica la inversa de la función trigonométrica que se está utilizando.

$$Sen(\beta)=\frac{a}{b}\rightarrow \beta = Sen^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Solo se puede hallar el ángulo de un triángulo usando las funciones seno, coseno o tangente.

Para obtener el valor del ángulo en la calculadora, ingresa a:

Shift la función el valor.

Por ejemplo: Si *Sen A* = 0,86

Shift sen 0,86

A = 60°

¿Sabías que?

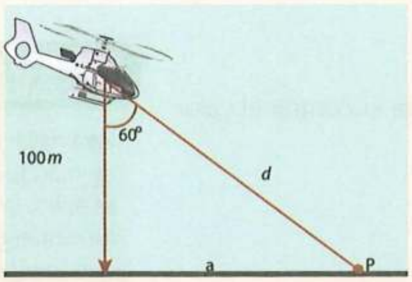
Se llaman ángulos suplementarios aquellos que al sumarlos dan como resultado 180 °.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.6.2.

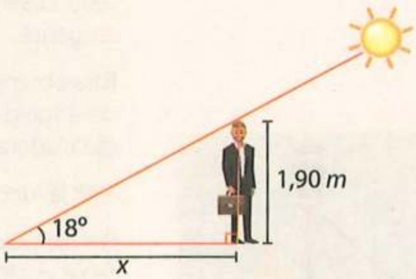
1. **Halla** el valor de los datos faltantes en las siguientes situaciones.

   a) Un helicóptero se encuentra volando a 100 *m* del suelo. Si desde el helicóptero una persona observa un punto *P*, con un ángulo de 60°, ¿cuál es la distancia del helicóptero al punto *P*? ¿Cuál es la distancia del punto *P* a la sombra proyectada perpendicularmente del helicóptero? ¿Cuál es el ángulo *P*?



Archivo editorial.

   b) La estatura de una persona es 1,90 *m*, y el ángulo de elevación del sol, 18°. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por la persona?



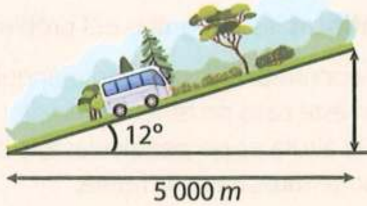
Archivo editorial.

   c) Un faro tiene una altura de 70 *m*. Si a lo lejos se divisa un barco, ¿cuál es la distancia desde la base del faro al barco? ¿Cuál es la distancia desde lo alto del faro al barco? **Utiliza** los datos de la figura.

Shutterstock, 386504383.

2. **Problema-decisión. Decide** los procedimientos y estrategias para resolver el siguiente problema.

   La distancia horizontal desde un punto a otro es 5 000 *m*, como se observa en la figura. ¿Cuál es la distancia de la carretera por donde circula el automóvil?



Shutterstock, 401941669.

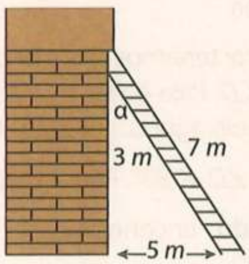
3. El esquema muestra la vela y el mástil para un bote que se construye en un astillero. **Determina** la altura del mástil.

4. La vista lateral de una escalera eléctrica muestra un triángulo rectángulo de base 14 m. La inclinación de la escalera es de 40°.

   Calcula la longitud de la escalera.

5. **Encuentra** los ángulos en cada problema, **dibuja** si es necesario.

   a) La altura de una pared es 3 *m*. Si una escalera se encuentra a 5 *m* de la pared, y la distancia de la escalera a lo alto de la pared es 5,8 *m*, ¿qué ángulos forma la escalera con la pared y el piso?



Archivo editorial.

   b) Los lados de un rectángulo miden 12 *cm* y 9 *cm* respectivamente. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos que forman la diagonal con los lados del rectángulo? ¿Cuánto mide la diagonal?

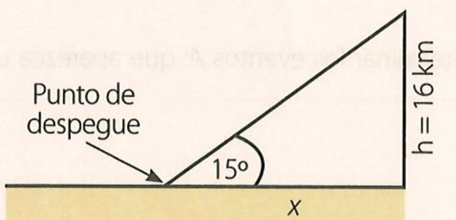
c) Una persona se encuentra a 200 *m* del pie de un acantilado. Si en lo alto del acantilado se encuentra un piedra, el acantilado tiene 300 *m* de altura. ¿Cuál es el ángulo con el que la persona observa dicha piedra? ¿Cuánto mide el otro ángulo?

d) Una cancha de fútbol rectangular en una escuela mide 25 *m* de largo y 9 *m* de ancho. Si para las actividades de educación física se divide la cancha por su diagonal, ¿cuánto mide la diagonal de la cancha? ¿Cuáles son sus ángulos internos?

e) Desde un punto sobre el suelo, situado a 150 *m* de la base de un edificio, el ángulo de elevación a la cúspide del mismo es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio?

6. Un avión despega del aeropuerto elevándose con un ángulo constante de 15º, hasta alcanzar una altura de 16 km.

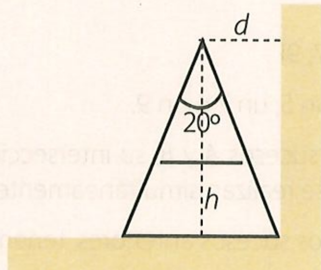
El gráfico que describe la trayectoria del avión es.



Determina cuál es la distancia horizontal que recorre el avión antes de elevarse.

7. Una escalera en forma de "A" tiene un ángulo de abertura entre sus patas de 20º. Una de sus dos patas de 1,5 m reposa en el suelo, tocando una pared vertical.

El gráfico que ilustra la situación es:



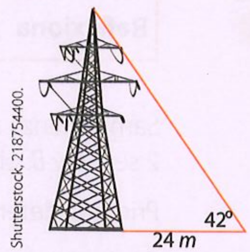
Determina a qué distancia de la pared se encuentra su extremo superior?

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. **Resuelvan** los siguientes ejercicios.

a) **Calcula** la altura de la torre.



b) **Halla** el largo de la resbaladera.

9. **Resuelvan** los siguientes problemas.

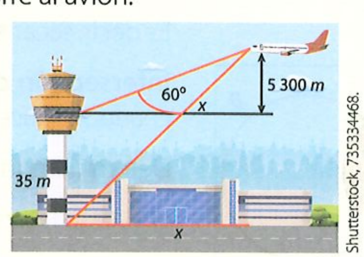
a) Un gato se encuentra a 2 *m* de la base de una mesa. Si la distancia del gato a lo alto de la mesa es 4 *m*. ¿Cuál es el ángulo entre el gato y el suelo? y ¿cuál es la altura de la mesa?

b) Un niño observa un juguete en lo alto de una repisa con un ángulo de 27°. Si la distancia horizontal del niño a la repisa en 5 *m*, ¿cuál es la distancia del niño al juguete?

Actividad indagatoria

10. **Indaga** cómo **resolver** la siguiente situación.

Una torre de control de un aeropuerto divisa con un ángulo de 60° un avión. Sabiendo que el avión está a 5 300 *m* de altura y que la torre mide 35 *m*, **calcula** la distancia desde el pie de la torre al avión.



Tema 5 Eventos. Operaciones


Shutterstock. 603434018.

Lanzar al aire tres monedas.

Desequilibrio cognitivo

Reflexiona. ¿Qué es un evento o suceso imposible?

Samuel lanza al aire tres monedas. Determinemos los sucesos *A*: obtener al menos 2 sellos, y *B*: obtener al menos un sello.

Primero, determinemos el espacio muestral, que son todos los posibles resultados.

$E = \{ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss\}$

Encontremos el suceso *A* y *B*.

$A: \{css, scs, ssc, sss\}$ $B: \{ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss\}$

Los sucesos son subconjuntos del espacio muestral. Con ellos, se pueden realizar las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento.

¿Sabías que?

Experimento aleatorio: es el proceso que produce resultados que no se pueden anticipar.

Espacio muestral (S): es el conjunto de todos los posibles resultados; se designa como (*E*).

Operaciones con sucesos

Suceso contenido en otro. Un suceso *A* se dice que está contenido o inducido en otro *B*. Siempre que se verifica *A* se verifica *B*. Se representa $A \subset B$.

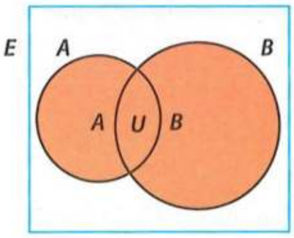
Ejemplo

Una persona lanza un dado. Determinar los eventos *A*: que aparezca un número impar, y *B*: obtener el 3 o el 5.

Solución

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{3, 5\}$

El suceso $B \subset A$, ya que el suceso $B = \{3, 5\}$ pertenece a *A*.



Unión de sucesos. Se representa por $A \cup B$ a la unión de un suceso *A* con un suceso *B*, es decir, todos los elementos que están en *A* o están en *B* (*A* o *B*).

Ejemplo

En un sorteo existen boletos del 1 al 10. Se tienen los sucesos:

A : sacar en el sorteo un número impar $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

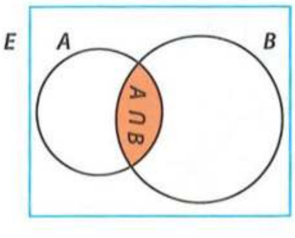
B : sacar un número mayor que 5 $B = \{7, 9\}$

Solución

El suceso unión será:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{7, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Es decir, sacar en el sorteo un 1, un 3, un 5, un 7 o un 9.



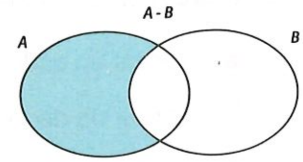
Intersección de sucesos. Dados dos sucesos *A* y *B*, su intersección $A \cap B$ se da cuando el suceso se realiza si y solo si se realizan simultáneamente *A* y *B*.

Determinando la intersección de los dos sucesos anteriores, tenemos que:

el suceso intersección es $A \cap B = \{7, 9\}$. Es decir, sacar en el sorteo un 7 y un 9.

M.4.3.12. Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) (destreza desagregada).

Diferencia de sucesos. Dados dos sucesos A y B, la diferencia se representa $A - B$, donde al primer suceso se le resta el segundo, es decir, son los sucesos que pertencen a A, pero no a B.



Ejemplo

Al lanzar un dado, determinemos los siguientes sucesos:

A : obtener números pares $A = \{2, 4, 6\}$

B : obtener un número mayor a 2; $B = \{3, 4, 5, 6\}$

La diferencia entre estos sucesos es:

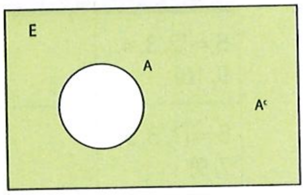
$A - B = \{2\}$

La diferencia tambien puede escribirse: $A - B = (A \cap B^c)$


Shutterstock, 504622015.

Dados.

Sucesos complementarios. Dado un suceso A, el suceso complementario A^c está formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.



Ejemplo

Al lanzar una moneda al aire dos veces, se tiene el suceso:

Espacio muestral $E = \{cc, cs, sc, ss\}$

A : obtener una cara $A = \{cs, sc\}$

El suceso complementario es igual a:

$A^c = \{cc, ss\}$

Podemos observar que el suceso complementario son todos los subconjuntos del espacio muestral que no pertenecen al evento A.

Sucesos compatibles. Dos sucesos son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común. Su intersección es distinta del vacío: $A \cap B \neq \varnothing$.

Ejemplo

Al lanzar un dado, determina los sucesos:

A : obtener un número mayor a 3. B : obtener un múltiplo de 2.

Espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{4, 5, 6\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

El suceso A y B son compatibles, ya que $A \cap B \neq \varnothing$.

¿Sabías que?

Para los sucesos complementarios existen algunas leyes.

$A^c = E - A$

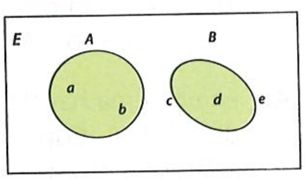
$A \cap A^c = \varnothing$

$A \cup A^c = E$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Sucesos incompatibles. Dos sucesos son incompatibles o mutuamente excluyentes cuando no tienen algún suceso elemental común, es decir, no pueden ocurrir simultáneamente. Su intersección es el suceso imposible: $A \cap B = \varnothing$.



Ejemplo

Al lanzar un dado, determina los sucesos:

A : obtener un número par. B : obtener un número impar.

Espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 3, 5\}$

El suceso A y B son incompatibles ya que $A \cap B = \varnothing$.

Taller

Evaluación formativa

I.M.4.8.2.

1. **Marca** con una X los experimentos aleatorios:
   - **a)** Lanzar un dado no cargado.
   - **b)** Lanzar un dado trucado.
   - **c)** Lanzar una moneda trucada al aire.
   - **d)** El fallo simultáneo de la computadora del profesor y de uno de sus alumnos.
   - **e)** Ganarse la lotería.
   - **f)** Sacar un As de corazones al tomar una carta de la baraja de naipes.

2. **Completa** en tu cuaderno la siguiente tabla y el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, siendo el suceso: $A = \{3, 4, 6, 7\}$. **Determina.**

Suceso B	$A \cup B$	$A \cap B$	B^c	$B - A$
$B = \{2, 3, 4, 9, 10\}$				
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$				
$B = \{1, 2, 5, 6, 8\}$				
$B = \{3, 4, 7, 8\}$				

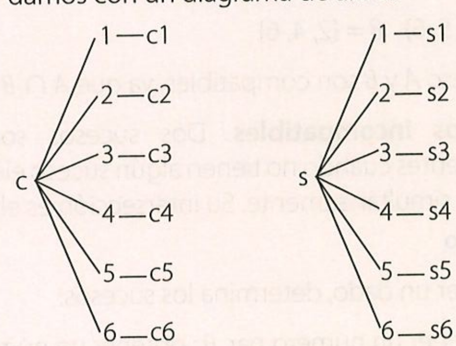
En tu cuaderno

3. **Escribe** V si la afirmación es verdadera o F si la afirmación es falsa.
   - **a)** Dos sucesos son incompatibles si su intersección es diferente del vacío.
   - **b)** El complemento de un suceso puede ser el vacío.
   - **c)** El espacio muestral de un experimento son todos los posibles casos.
   - **d)** Da el mismo resultado realizar la diferencia $A - B$, que $B - A$.

4. En una urna hay 9 bolas de billar (numeradas del 1 al 9). **Considera** que el experimento aleatorio consiste en extraer una bola de la urna. **Describe** por extensión:
   - **a)** El espacio muestral.
   - **b)** El suceso P consiste en extraer una bola con un número par.
   - **c)** El suceso P consiste en extraer una bola con un número impar.
   - **d)** El suceso $M6$ consiste en extraer una bola con un número menor o igual que 6.
   - **e)** $P \cap I =$
   - **f)** $P \cap M6 =$
   - **g)** $I - M6 =$
   - **h)** $P - M6 =$
   - **i)** $P \cup I =$
   - **j)** $P \cup M6 =$
   - **k)** $I \cup M6 =$
   - **l)** $P^C =$
   - **m)** $I^C =$
   - **n)** $M6^C =$
   - **o)** $(P - I)^C =$
   - **p)** $(P \cap M6)^C =$
   - **q)** $(I \cup M6)^C =$
   - **r)** $(P^c)^C =$

5. **Determina** el espacio muestral de cada experimento, y los sucesos en cada caso. **Escribe** si son sucesos compatibles o incompatibles. Ver ejemplo.
   - **a)** Lanzar al aire una moneda y un dado. **Determina** los sucesos: A : obtener sello y un número par, B : obtener sello y un múltiplo de 3.

     Para determinar el espacio muestral, nos ayudamos con un diagrama de árbol.



$E = \{c1, c2, c3, c4, c5, c6, s1, s2, s3, s4, s5, s6\}$

$A = \{s2, s4, s6\}, B = \{s3, s6\}$

$A \cap B = \{s6\}$

b) Tenemos una caja con 6 bolas de color azul, 2 verdes, y 5 rojas. **Determina** los sucesos: A : sacar una bola azul, B : sacar dos bolas: una verde y una azul. ¿Qué tipo de sucesos son?

c) Lanzar al aire una moneda y sacar una carta. **Determina** los sucesos: A : obtener un número primo y una carta roja, B : obtener el número 6 y sacar una carta negra. ¿Qué tipo de sucesos son?

6. Realiza las operaciones con los siguientes sucesos. En una rifa se tienen los boletos del 1 al 20. Dados los eventos A : boletos pares, B : boletos impares, C : boletos múltiplos de 2, **calcula**:

a) $A \cup B =$

b) $A \cup C =$

c) $B \cup C =$

d) $A^c \cup B^c =$

e) $A \cap B =$

f) $A \cap C =$

g) $B \cap C =$

h) $B - C =$

i) $(A \cup B) \cap C =$

7. Resuelve las siguientes situaciones.

a) Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:

A : salen al menos dos sellos, B : sale algún sello. **Calcula** los sucesos:

i) $(A \cup B)$

ii) $(A - B)$

iii) $A^c \cup B^c$

iv) $(A \cap B)$

v) $(B - A)$

b) Tenemos tarjetas numeradas del 5 al 9. Se sacan sucesivamente tres de ellas sin reposición. **Determina** los sucesos: A : obtener un número primo, B : obtener un número impar. **Calcula** los sucesos.

i) $(A \cup B)$

ii) $(A - B)$

iii) $A^c \cup B^c$

iv) $(A \cap B)$

v) $(B - A)$

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. Resuelvan las siguientes operaciones entre sucesos:

a) Dado el espacio muestral $E = \{2, 9, 12, 25, 36\}$ y los sucesos A : números pares, B : múltiplos de 3, y C : números impares, **determinen**:

i) $A \cup B$

ii) $A^c \cup B^c$

iii) $A \cap B$

iv) $B \cap C$

v) $(A \cup B) \cap C$

vi) $B \cup C$

vii) $A^c \cap C^c$

viii) $A \cap C$

ix) $B - C$

x) $A - B$

b) Dado el espacio muestral $E = \{cs, ss, cc, sc\}$ y los sucesos A : obtener al menos una cara, B : obtener al menos un sello y C : obtener dos caras, **determinen**:

i) $A \cup B$

ii) $A^c \cup B^c$

iii) $A \cap B$

iv) $B \cap C$

v) $A - C$

vi) $(A \cup B) \cap C$

vii) $B \cup C$

viii) $A^c \cap C^c$

ix) $A \cap C$

x) $B - C$

xi) $(A \cup C) \cap B$

xii) $A - B$

c) Dado el espacio muestral $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 15\}$ y los sucesos A : obtener un número compuesto, B : obtener un múltiplo de 5, y C : obtener un número primo, **determinen**:

i) $A \cup B$

ii) $A^c \cup B^c$

iii) $A \cap B$

iv) $B \cap C$

v) $(A \cup B) \cap C$

vi) $B \cup C$

vii) $A^c \cap C^c$

viii) $A \cap C$

ix) $B - C$

x) $A - B$

Actividad indagatoria

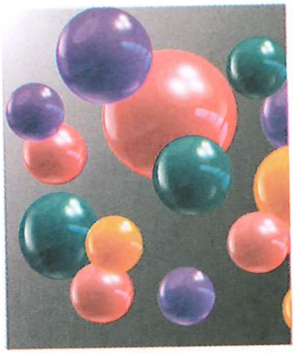
9. Indaga y **resuelve**.

En una bolsa se colocan bolas numeradas del 1 al 8. Si se sacan sucesivamente tres de ellas con reposición y se forman números de tres cifras respetando el orden de salida, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral?

Tema 6 Cálculo de probabilidades

Saberes previos

Reflexiona. ¿Existe la intersección con el vacío?



Shutterstock, 185549141.

Bolas de colores.

En una caja existen tres bolas verdes, cuatro azules y dos negras. Si la ganadora del sorteo es aquella persona que saque la bola negra, ¿cuál es la probabilidad de ganar en el sorteo?

Determinemos el espacio muestral, contando el número total de bolas que están dentro de la caja. $E = 9$.

Para obtener la probabilidad de un evento, analicemos cuáles son los casos favorables, es decir, los que cumplen con la condición.

En este caso, dos son los casos favorables, ya que en la caja hay dos bolas negras.

Casos favorables = 2.

Ley de Laplace. La probabilidad de cualquier suceso *A* es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total del espacio muestral.

$$P(A) = \frac{\text{Núm. de casos favorables}}{\text{Espacio muestral}}$$

Archivo editorial.

Resolviendo la situación inicial, tenemos: $P(A) = \frac{2}{9} = 0{,}22$

La probabilidad de ganar el sorteo es 22 %.

¿Sabías que?

- Cuando la probabilidad es el 100 %, se dice que es igual a 1 y, cuando la probabilidad es imposible o 0 %, se dice que es igual a 0.

Propiedades de operaciones con sucesos

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup E = E$

$A \cap E = A$

Propiedades de la probabilidad

Unión de sucesos compatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Sucesos contrarios	$P(B^c) = 1 - P(B)$
Suceso seguro	$P(E) = 1$
Suceso imposible	$P(\varnothing) = 0$
Ley de De Morgan	$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^C$ $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^C$

Ejemplos

a) De una baraja de 52 cartas, se desea extraer una carta de corazón negro. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una al primer intento?

Solución

Determinemos el suceso A: obtener una carta de corazón negro. Definamos su espacio muestral: E = 52

Números de casos favorables: 13

Calculemos la probabilidad del suceso *A*.

$$P(A) = \frac{13}{52} = 0{,}25$$

La probabilidad de sacar una carta de corazón negro es del 25 %.

M.4.3.12. Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y aplicar las leyes de De Morgan para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

b) Para un truco de magia, se lanzan dos dados al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números primos o al menos un número primo?

Solución

Determinemos el espacio muestral. E = {(1,1); (1, 2); (1, 3); (1,4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2), (3, 3); (3, 4); (3, 5), (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)} = 36

Definamos el número de elementos de cada suceso:

A : obtener dos números primos = 8

B : obtener al menos un número primo = 22

Hallemos la probabilidad de cada suceso:

$$P(A)=\frac{8}{36}=0{,}22 \qquad P(B)=\frac{22}{36}=0{,}61$$

Resolviendo la situación inicial tenemos $P(A \text{ o } B)$ que es igual a $P(A \cup B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{8}{36}+\frac{22}{36}-\frac{8}{36}=\frac{22}{36}=0{,}22$$

La probabilidad de que salgan dos números primos o al menos un número primo es 22 %.

c) La probabilidad de un suceso $A=\frac{1}{3}$, la de B es $\frac{4}{5}$ y de la intersección, $\frac{3}{7}$. **Calcula**:

A) La probabilidad de que ocurra el suceso A o bien ocurra el suceso B.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{7}=\frac{74}{105}=0{,}70$$

B) La probabilidad del contrario de A sería, entonces:

$$P(A^c)=1-p(A) \qquad P(A^c)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

C) La probabilidad de que no ocurra ni A ni B.

Debemos calcular $P(A^c \cap B^c)$. Utilizando las leyes de De Morgan tenemos:

$$P(A^c\cap B^c)=p(A\cup B)^C=1-P(A\cup B)$$

$$P(A^c\cap B^c)=1-P(A\cup B)=1-\frac{74}{105}=\frac{31}{105}=0{,}30$$

D) La probabilidad de que no ocurra el suceso A o bien no ocurra el suceso B.

$$P(A^c\cup B^c)=P(A\cap B)^c=1-P(A\cap B)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}=0{,}57$$

Dados.

¿Sabías que?

* Dos sucesos se dicen **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la ocurrencia de otro y, por tanto, no afecta su probabilidad.

* Dos eventos se dicen **dependientes** si la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia y probabilidad del otro.

Competencia socioemocional

Si algún tema de clase no te quedó claro, pregunta a tu profesor, no te quedes con la duda.

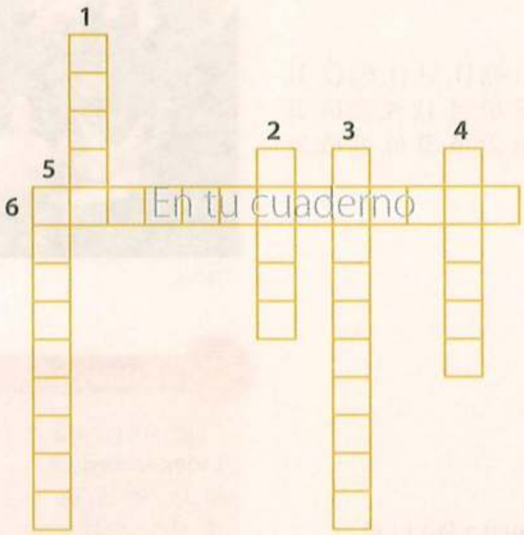
Interculturalidad

Antes de la conquista española, los pueblos indoamericanos ya tenían sus propias matemáticas. Esto se puede identificar, tanto en las actividades socioculturales de sus descendientes como en los restos arqueológicos y crónicas disponibles que nos informan al respecto.

Taller Evaluación formativa

I.M.4.8.2.

1. **Completa** en tu cuaderno el siguiente crucigrama.



Horizontal

6. Cuando la intersección de dos sucesos es igual al vacío, son sucesos…

Vertical

1. Cuando los elementos de un suceso están en A o en B, se representan por la…
2. La intersección de un suceso con el vacío da como resultado el…
3. Un suceso que pertenece a uno pero no al otro…
4. La probabilidad que es igual a 1 es un suceso…
5. La probabilidad que es igual a cero se da cuando un suceso es…

2. **Utiliza** la fórmula de probabilidad clásica y sus propiedades para resolver los siguientes ejercicios:

E es el espacio muestral en un problema cualquiera y se sabe que $E \neq \phi$.

a) Calcula $P(E) =$

b) Calcula $P(\phi) = P(E^c) =$

c) **Completa** la expresión, conociendo que A y B son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles).
$P(A \cup B) =$

3. **Escribe** verdadero V o falso F, según el análisis de cada proposición.

a) La probabilidad de un suceso siempre es menor a 1.

b) La probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos no favorables.

c) Si los sucesos A y B son compatibles, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

d) La probabilidad de un suceso puede ser igual a la de otro suceso diferente.

e) Los casos favorables son subconjuntos del espacio muestral que pertenecen al suceso del que se desea obtener la probabilidad.

4. **Identifica** con verdadero (V) o falso (F) en las siguientes expresiones.

a) $E = \{a, e, i, o, u\}$, la probabilidad de sacar a y e es $\frac{2}{5}$.

b) $E = \{a, e, i, o, u\}$, la probabilidad de seleccionar la letra a es $\frac{1}{5}$.

c) $A^c \cup B^c = A \cup B$

d) $A^c \cup B^c = A^c \cap B^c$

e) $P(A) = 1 - P(A^c)$

f) $P((A^c \cup B^c)^c) = P(A \cap B)$

g) $1 \leq P(E) + P(\phi) \leq 1$

h) $0 \leq P(X) + P(\phi) \leq 1$

5. **Encuentra** la probabilidad del suceso: al lanzar dos dados al aire.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma igual a 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números pares?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un producto igual a 4?

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor a 5?

6. **Encuentra** la probabilidad de los siguientes sucesos si se lanzan una moneda y un dado.

a) Que salga al menos una cara con un número impar o salga al menos un número impar.

b) La probabilidad de que no salga una cara con un número impar.

c) La probabilidad de que no salga una cara con un número impar, ni salga al menos un número impar.

d) La probabilidad de que no salga una cara con un número impar o bien no salga al menos un número impar.

7. **Resuelve** los siguientes problemas.

a) La probabilidad de que gane el equipo A es 0,5; la probabilidad de que gane el equipo B es 0,4; y la de que gane el equipo A y el equipo B es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el equipo A o el equipo B?

b) **Calcula** la probabilidad de los siguientes eventos mutuamente excluyentes.

Se saca una carta al azar de un grupo normal de 52 cartas.

A) **Justifica** por qué los eventos son mutuamente excluyentes.

B) ¿Cuál es la probabilidad de que sea siete o una figura?

c) En una urna hay 15 bolas numeradas del 2 al 16, se saca una bola al azar y se anota el número que tiene.

Encuentra los siguientes sucesos:

A = "Obtener par" B = "Obtener impar"

C = "Obtener primo"

D = "Obtener impar menor que 9"

E = "Obtener par mayor que 6"

F = "Obtener múltiplo de 5"

Trabajo colaborativo

Trabajen en equipo y **resuelvan**.

8. Dadas las siguientes probabilidades, **realicen** las operaciones que se indican.

a) $P(A)=\frac{5}{8},\ P(B)=\frac{1}{5},\ P(A\cap B)=\frac{4}{6}$

Realicen:

A) $P(A^C)$ **D)** $P(A\cup B)$

B) $P(B^C)$ **E)** $P(A^C\cup B^C)$

C) $P(A^C\cap B^C)$ **F)** $P(A^C\cup B)$

b) $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{3}{7},\ P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

Realicen:

A) $P(A^C)$ **D)** $P(A\cup B)$

B) $P(B^C)$ **E)** $P(A^C\cup B^C)$

C) $P(A^C\cap B^C)$ **F)** $P(A^C\cup B)$

9. **Resuelvan** los siguientes problemas.

a) De 200 niñas y niños examinados por un nutricionista, se encontró que 90 pacientes padecían desnutrición leve, 60 padecían desnutrición crónica y 50 no presentaban problemas. Si de los pacientes examinados se selecciona uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que padezca desnutrición leve o desnutrición crónica?

b) De una encuesta realizada a 100 estudiantes sobre su materia preferida, 35 respondieron Química, 40 respondieron Matemática y 10 respondieron ambas. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a un estudiante que le guste Química o Matemática?

Actividad indagatoria

10. **Indaga** y **resuelve** en tu cuaderno.

De un grupo de 150 computadoras, 75 se encuentran en buen estado, 50 se encuentran dañadas y 15 se encuentran en buen estado pero con pequeños defectos. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar una computadora en buen estado o una computadora dañada?

Estrategia: dividir el problema en partes

Problema resuelto

Se llevó a cabo un estudio a 600 familias para determinar si los alimentos subsidiados por el Estado son consumidos por la gente de bajos recursos. Los resultados fueron: 350 familias perciben ingresos menores al salario mínimo vital, 90 familias consumen alimentos subsidiados y 50 familias perciben ingresos menores al salario mínimo vital y consumen alimentos subsidiados por el Estado. Si se selecciona una familia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que perciba un salario inferior al mínimo vital o consuma alimentos subsidiados por el Estado?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la probabilidad de percibir un salario inferior o consumir alimentos subsidiados?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Dividir el problema en partes.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso 1

Espacio muestral: 600

A: perciben salarios menores al mínimo vital = 350

B: consumen alimentos subsidiados por el Estado = 90

$A \cap B$: perciben salarios menores al básico y consumen alimentos subsididados = 50

Paso 2

$$P(A)=\frac{350}{600}=\frac{7}{12};\ \mathrm{P(B)}=\frac{90}{600}=\frac{3}{20}$$

$$P(A\cap B)=\frac{50}{600}=\frac{1}{12}$$

Paso 3

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=\frac{7}{12}+\frac{3}{20}-\frac{1}{12}=\frac{13}{20}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La probabilidad es de 65 %.

Problema resuelto

En el censo realizado en una población de 88 personas para conocer cuántas pueden ejercer su derecho al voto, se determinó que 54 son mayores de edad que votan, 24 son menores de edad, y 10 son personas menores de edad que pueden votar. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar a una de las personas se obtenga una que pueda votar o que sea menor de edad?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar a una de las personas se obtenga una que pueda votar o que sea menor de edad?

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

La estrategia que se utiizará es dividir el problema en partes.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Paso1

A: aptos para votar, B: menores de edad, C: aptos para votar y menores de edad.

Paso2

Encuentra la probabilidad de cada suceso.
A: personas mayores de edad = 54
B: personas menores de edad = 24
A ∩ B. personas menores de edad que pueden votar: 10

$$P(A)=\frac{54}{88}=\frac{27}{44};\quad P(B)=\frac{24}{88}=\frac{3}{11};$$

$$P(A\cap B)=\frac{10}{88}=\frac{5}{44};$$

$$P(A\cup B)=\frac{27}{44}+\frac{3}{11}-\frac{5}{44}=\frac{17}{22}=0{,}77$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La probabilidad es del 77 %.

Problemas propuestos

1. Los tres lados de un triángulo miden 18, 16 y 9 cm. **Determina** qué cantidad se debe restar a cada lado para que resulte un triángulo rectángulo:
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

2. **Encuentra** la ecuación de segundo grado que representa el área de un rectángulo, cuyas soluciones suman 5 y su producto es –24:
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

3. De una urna con 50 bolas numeradas se extrae varias bolas y se forman los siguientes sucesos:

   A = {sacar un número múltiplo de 2}
   B = {sacar un número múltiplo de 3}
   C = {sacar un número múltiplo de 5}

   Determina los elementos de los siguientes sucesos:
   - $A \cup B$
   - $A \cap C$
   - A^C

   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

4. Lanzamos una moneda y un dado. **Calcula** el espacio muestral mediante un diagrama de árbol:
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

5. Una piscina rectangular fue construida con un área de 1 000 m^2 y un perímetro de 140 m. ¿Qué longitud tiene cada lado de la piscina?
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

6. ¿Cuáles son los dos números positivos, tales que, la suma de sus cuadrados sea 193 y su diferencia sea 5?
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

7. La suma de los cuadrados de dos números enteros positivos es 1301.

   ¿Cuáles son esos números?
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

8. Beatriz es dos años mayor que Ricardo y la suma de los cuadrados de ambas edades es 1 154. ¿Cuál es la edad de Beatriz y Ricardo?

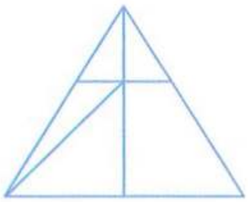
   ¿Cuáles son esos números?
   - **a)** Comprender el problema.
   - **b)** Plantear la estrategia.
   - **c)** Aplicar la estrategia.
   - **d)** Responder.

Competencia matemática

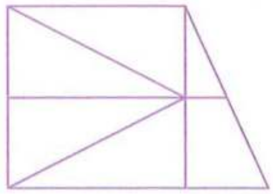
Razonamiento geométrico

1. ¿Cuántos triángulos hay en cada figura?

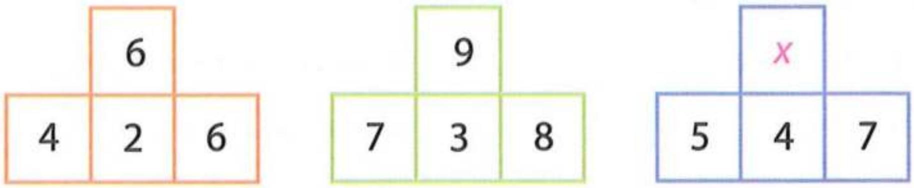
a)



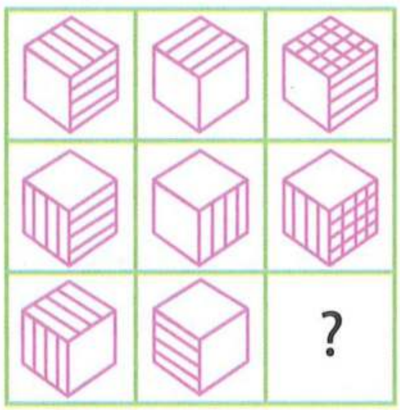
b)



2. ¿Cuál es el valor de x?



3. ¿Cuál es la alternativa que continúa la secuencia?



a)  b)  c)  d) 

Cálculo mental

Multiplicar un múltiplo de 5 por un múltiplo de 2

a) 55·4 = 11·5·2·2 = 10·22 = 220

b) 35·8 = 7·5·2·4 = 10·28 = 280

c) 95·12 = 19·5·2·6 = 114·10 = 1 140

d) 45·16 = 9·5·2·8 = 72·10 = 720

e) 65·18 = 13·5·9·2 = 10·117 = 1 170

Ahora, hazlo tú.

a) 35·12 =

b) 15·20 =

c) 30·18 =

d) 40·6 =

e) 65·22 =

Rampas de acceso para personas con discapacidad

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Ciudadanía

Justificación / problemática

En los últimos años, Ecuador ha avanzado significativamente en la inclusión educativa de personas con discapacidad, siendo ahora 15 158 estudiantes con discapacidad que asisten a escuelas regulares, en comparación a las 9 326 en 2007. A pesar de esto, aún falta mucho por hacer para lograr una convivencia inclusiva entre niños y niñas en las escuelas. Los pequeños con algún tipo de diversidad funcional deben afrontar algunos obstáculos en la movilidad, el acceso a las instalaciones y a las baterías sanitarias. Por tal motivo, muchos colegios han modificado sus infraestructuras para hacerlas más inclusivas, construyendo, por ejemplo, rampas de acceso.

Texto adaptado de: http://www.elcomercio.com/tendencias/inclusion-educativa-escuelas-regulares-avanza-discapacidad-discapacidades.html.

Shutterstock, 421163092.

Objetivo

Reflexionar sobre la importancia de la inclusión educativa de personas con discapacidad o diversidad funcional, e investigar las normas que debe tener una infraestructura para ayudar a que esto se dé.

Shutterstock, 460237735.

Recursos

- Grupo de trabajo
- Libros, Internet
- Metro o flexómetro
- Cuaderno

Actividades

- **Organicen** equipos.
- **Busquen** en su colegio las rampas de acceso para personas con discapacidad. En caso de no haber, **búsquenlas** en ciertos sitios de la ciudad.
- **Tomen** las medidas de los lados del triángulo rectángulo que forma una rampa. **Anótenlas** en su cuaderno.
- Utilizando las razones trigonométricas, **encuentren** el ángulo de elevación de la rampa.
- **Investiguen** si este ángulo es acorde con las normas de construcción de rampas para personas con discapacidad.

Evaluación

1. ¿Qué es lo más importante que aprendiste con el desarrollo de este proyecto?
2. De acuerdo con los cálculos anteriores, ¿cuál fue el cálculo más importante qué hiciste?
3. ¿Qué conclusión puedes obtener de este proyecto?

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Túneles de agua

Ecuaciones de segundo grado

Situación cotidiana

En algunas ciudades del Ecuador tienen como entretenimiento los túneles de agua. Hay en Quito, Machala y La Libertad, entre otras. Como se aprecia en la imagen, tienen forma de parábola y son varias parábolas paralelas que producen el efecto de un túnel. Los turistas cruzan este túnel y evitan mojarse ya que cada cierto tiempo la parábola disminuye hasta desaparecer.

Shutterstock. 314649668.

Si tomamos el suelo como el eje de las abscisas (x) y el de simetría como el eje de las ordenadas (y), se obtienen los siguientes datos en metros: el vértice de la parábola se encuentra en (0,4) cuando el agua está al máximo; los cortes de la parábola en ese momento en el eje x son: (–1,5; 0) y (1,5; 0). Encuentra la ecuación de la parábola.

Fuente: https://www.eltelegrafo.com.ec/noticias/regional/1/cuatro-parques-de-machala-se-consolidan-como-turisticos

Reflexiona

- ¿Qué figura forma el agua que sale de la pileta? ¿Puedes escribir una ecuación para representarla?

  Respuesta: $1{,}7x^2 - 0x + 4 = 0$

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- ¿Cuál es la altura de la parábola? **Argumenta** tu respuesta.

Resuelve las situaciones

- El túnel de agua, con las mismas condiciones del problema anterior, tiene una longitud de 5 m; cada 10 segundos la parábola disminuye su altura a una velocidad de 2,5 m por segundo. Dos turistas con estatura de 1,8 m y 1,65 m deciden cruzar el túnel en el octavo y noveno segundos, respectivamente, a una velocidad de 3,5 m por segundo. ¿Se mojan o no?

- Un campesino compró plantas de naranjo para plantar n carriles paralelos con n posturas en cada carril. Pero se ha dado cuenta que le faltan 8 plantas para completar ese esquema de siembra. Si construye un carril menos y pone en cada carril una planta menos, le sobrarían 19 plantas. ¿Cuántas plantas de naranjo compró el campesino?

Freepik.es.

Tema: Los juegos de azar

Probabilidad

Situación cotidiana

Uno de los juegos de azar más popular en el país es el bingo. Consta de una tabla, generalmente, de cartón con 25 números, organizados en cinco filas y cinco columnas, de forma aleatoria, y de un bolillero con 75 bolas numeradas.

Shutterstock, 626812673.

Jonathan y Rosa van a jugar al bingo. Anuncian que habrá premio a los que consigan:

a) Llenar una fila, una columna o una diagonal.

b) Llenar las cuatro esquinas.

c) Llenar toda la tabla.

¿Calcula la probabilidad que tienen Jonathan y Rosa de ganar en cada una de ellas?

Reflexiona

- ¿Qué significa juego de azar?

Probabilidad de **a)** 6,66 % **b)** 5,33 % **c)** 33,33%

- **Comprueba** la respuesta.
- En el caso de estar errada la respuesta, ¿cuál es la solución?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar 2 de los 3 premios?

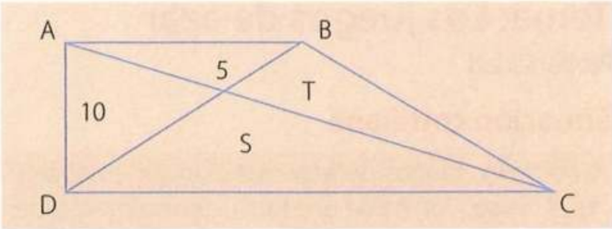
Resuelve las situaciones

- Al jugar con barajas deciden calcular la probabilidad de extraer del mazo un as y, además, calcular la probabilidad de sacar dos ases seguidos, sin reponer el primer as al mazo. Realiza estos cálculos y encuentra las dos probabilidades.
- Tres familias amigas han organizado una rifa de beneficencia con un solo premio. La familia Pérez compra 10 boletos, los Aguirre 12, y los Robles 15 boletos. ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de los Pérez o de los Aguirre gane la rifa?

Shutterstock, 556610047 - 322612859.

Olimpiadas matemáticas

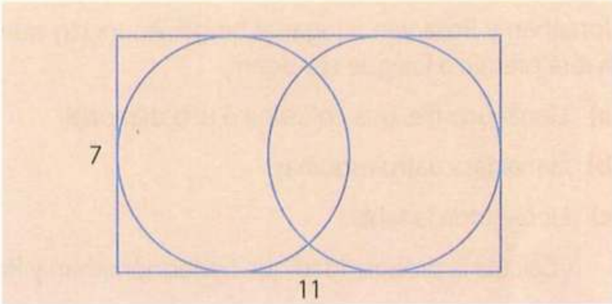
1. El cuadrilátero ABCD tiene ángulos rectos en A y en D. Los números mostrados indican las áreas en centímetros cuadrados de dos de los triángulos. ¿Cuál es el área de ABCD?



Argumenta la solución:

Respuesta:

2. La figura muestra un rectángulo de dimensiones 7×11 cm que contiene dos circunferencias, de modo que cada una es tangente a tres de los lados del rectángulo. ¿Cuál es la distancia entre los centros de las circunferencias?



Argumenta la solución:

Respuesta:

3. Se escribe un entero del 1 al 9 en cada celda de una tabla 3×3. No hay números repetidos. Se calcula la suma de los enteros de cada una de las filas y de cada una de las columnas de la tabla. Cinco de los resultados son 12, 13, 15, 16 y 17, en algún orden. ¿Cuál es el sexto resultado?

Recuperado de: https://www.canguromat.org.es

Argumenta la solución:

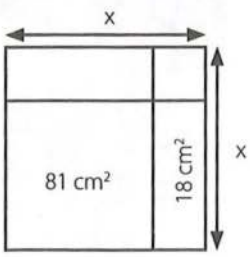
Respuesta:

4. En la figura, D es el punto más a la derecha y las distancias AC = 10 m, BD = 15 m, AD = 22 m. **Hallar** la distancia BC.

Argumenta la solución:

Respuesta:

5. ¿Cuánto vale x en la figura?



Argumenta la solución:

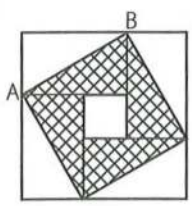
Respuesta:

6. A Beatriz le gusta calcular la suma de las cifras que ve en su reloj digital (por ejemplo, si el reloj marca 21:17, entonces, Beatriz obtiene 11. ¿Cuál es la máxima suma que puede obtener?

Argumenta la solución:

Respuesta:

8. Un cuadrado grande contiene cuatro rectángulos iguales y un cuadrado pequeño. El área del cuadrado grande es 49 cm^2 y el largo de la diagonal AB de uno de los rectángulos es 5 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?



Refuerza tus aprendizajes

1. **Lee** y **analiza**.

Encuentra la suma y el producto de las raíces de la ecuación: $3x^2 + 11x - 20 = 0$:

Escoge la respuesta correcta.

a) $S = -\frac{11}{3}$ $P = -\frac{20}{3}$

b) $S = -\frac{11}{3}$ $P = \frac{20}{3}$

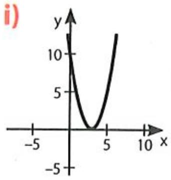
c) $S = \frac{11}{3}$ $P = \frac{20}{3}$

d) $S = \frac{11}{3}$ $P = -\frac{20}{3}$

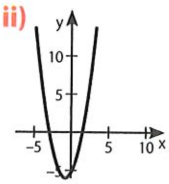
2. **Lee** y **analiza**.

Observa las gráficas y **escoge**, en el orden establecido, cuál es el discriminante en cada una:

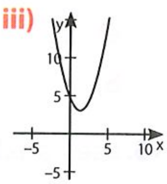
i)



ii)



iii)



Escoge la respuesta correcta. **Recuerda** el triángulo significa discriminante.

a) $\Delta \text{I} < 0$ $\Delta \text{II} = 0$ $\Delta \text{III} > 0$

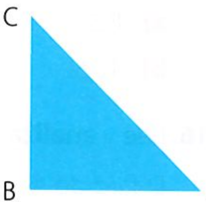
b) $\Delta \text{I} > 0$ $\Delta \text{II} < 0$ $\Delta \text{III} = 0$

c) $\Delta \text{I} = 0$ $\Delta \text{II} > 0$ $\Delta \text{III} < 0$

d) $\Delta \text{I} < 0$ $\Delta \text{II} = 0$ $\Delta \text{III} > 0$

3. **Lee** y **analiza**.

Observa el triángulo e indica cuál es el cateto adyacente al ángulo B:



Escoge la respuesta correcta.

a) AB

b) BC

c) AC

d) Ninguno de los anteriores

4. **Lee** y **analiza**.

Resuelve el triángulo rectángulo que tiene por catetos $a = 2{,}7$ cm y $b = 3$ cm.

Escoge la respuesta correcta.

a) Hipotenusa = 5,7; A = 22,06°; B = 67,94

b) Hipotenusa = 1,3; A = 32,06°; B = 57,94

c) Hipotenusa = 4,03; A = 42,06°; B = 47,94

d) Hipotenusa = 3,5; A = 52,06°; B = 37,94

5. **Lee** y **analiza**.

Resuelve el triángulo rectángulo que tiene $\angle A = 36°$ y su cateto opuesto a = 2,4 m:

Escoge la respuesta correcta.

a) c = 4,08; b = 3,30; B = 54°

b) c = 2,96; b = 1,73; B = 60°

c) c = 4,08; b =1,73°; B = 60°

d) c = 2,96; b = 3,30°; B = 54°

6. **Lee** y **analiza**.

¿Cuál es la altura de un triángulo rectángulo que mide 10 cm de base, y el ángulo que forma la hipotenusa con su base es de 35°?

Escoge la respuesta correcta.

a) 10

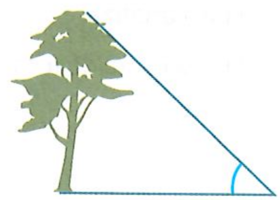
b) 8

c) 7

d) 6

7. **Lee** y **analiza**.

Encuentra la altura del árbol de la figura si sabes que $\text{tg}(\beta) = \frac{1}{4}$, siendo β el ángulo marcado y la distancia de este con el árbol es de 24 m.



Escoge la respuesta correcta.

a) 6 m

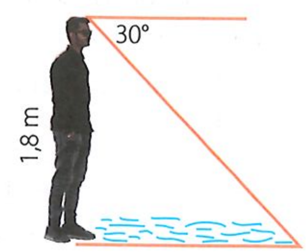
b) 7 m

c) 8 m

d) 9 m

8. **Lee** y **analiza**.

Una persona de 1,8 m de altura se para en la orilla de un río y su sombra alcanza justamente la otra orilla. ¿Cuál es la anchura del río si el ángulo de depresión es de 30°?



Shutterstock, 1475117378.

Escoge la respuesta correcta.

a) 6 m

b) 7 m

c) 8 m

d) 9 m

9. **Lee** y **analiza**.

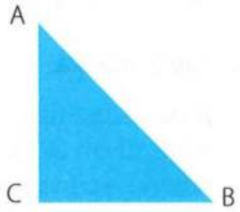
¿Cuál de los siguientes valores no puede corresponder a sen (α)?

Escoge la respuesta correcta.

a) 0,9
b) 0,6
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\sqrt{2}$

10. **Lee** y **analiza**.

¿Cuánto mide el cateto BC si la hipotenusa mide 14 cm y el $\angle A$ es igual al $\angle B$?

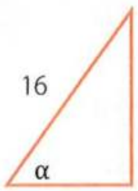


Escoge la respuesta correcta.

a) 9,89
b) 8,99
c) 7,89
d) 9,32

11. **Lee** y **analiza**.

Si la secante de α es 1,55, ¿cuáles el valor de α?



Escoge la respuesta correcta.

a) 32,82°
b) 40°
c) 50°
d) 40,17

12. **Lee** y **analiza**.

¿En cuál de los siguientes sucesos tienes mayor probabilidad de ganar?

- Al sacar un número de 100.
- Al lanzar un dado.
- Al sacar una carta de la baraja.
- Al lanzar una moneda.

Escoge la respuesta correcta.

a) Al sacar un número de 100.
b) Al lanzar un dado.
c) Al sacar una carta de la baraja.
d) Al lanzar una moneda.

13. **Lee** y **analiza**.

¿Cuál es la probabilidad de ganar una rifa de 1 000 boletos si se compró 80 boletos?

Escoge la respuesta correcta.

a) 0,8
b) 0,08
c) 0,4
d) 12

14. **Lee** y **analiza**.

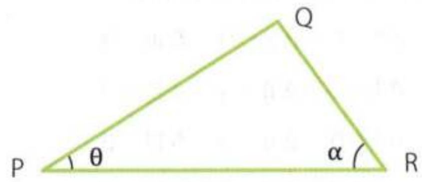
Los triángulos ABC y PQR son semejantes, **encuentra** el valor de AB, si PQ = 25, QR = 15 y BC = 5.

Escoge la respuesta correcta.

a) 5
b) 4
c) 3
d) 6

15. **Lee** y **analiza**.

¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo, si α es el doble que θ, y PQ mide 8 cm?



Escoge la respuesta correcta.

a) 8,3
b) 10,5
c) 9,23
d) 8,5

16. **Lee** y **analiza**.

El faro de Alejandría tiene una altura aproximada de 100 m sobre el nivel del mar. Un náufrago lo observa, totalmente, desde su pequeña balsa con un ángulo vertical de 20° más o menos. ¿A qué distancia de la isla se encuentra el náufrago?

Escoge la respuesta correcta.

a) 300 m
b) 200 m
c) 150 m
d) 275 m

17. **Lee** y **analiza**.

La suma de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 340. ¿Cuáles son esos números?

Escoge la respuesta correcta.

a) 10 y 12 b) 12 y 14 c) 18 y 20 d) 14 y 16

18. Lee y **analiza**.

En una playa de Hawái, una ola elevó a un surfista 8 metros de altura para luego undirlo unos segundos en sus cálidas aguas. Otro surfista que descanzaba sobre la arena informó a los rescatistas que la ola llegó a formar un ángulo de unos 5º más o menos. ¿A qué distancia de la costa se encontraba el surfista abatido por la ola?

Escoge la respuesta correcta.

a) 75 m

b) 91 m

c) 100 m

d) 150 m

19. Lee y **analiza**.

La vista lateral de una escalera eléctrica muestra un triángulo rectángulo de base 14 m. La inclinación de la escalera es de 40º. Calcula la longitud de la escalera.

Escoge la respuesta correcta.

a) 18,28 m

b) 15 m

c) 20 m

d) 25,2 m

20. Lee y **analiza**.

Un avión despega del aeropuerto elevándose con un ángulo constante de 15º hasta alcanzar una altura de 16 km. ¿Cuál es la distancia horizontal que recorre el avión antes de elevarse?

Escoge la respuesta correcta.

a) 100 km

b) 40 km

c) 60 km

d) 50 km

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto **Incorrecto**

1. Pinta totalmente los círculos.
2. No hagas marcas fuera del círculo.
3. En caso de concluir antes de tiempo, revisa los ejercicios en los que hayas tenido dudas.

1)	A	B	C	D
2)	A	B	C	D
3)	A	B	C	D
4)	A	B	C	D
5)	A	B	C	D
6)	A	B	C	D
7)	A	B	C	D
8)	A	B	C	D
9)	A	B	C	D
10)	A	B	C	D
11)	A	B	C	D
12)	A	B	C	D
13)	A	B	C	D
14)	A	B	C	D
15)	A	B	C	D
16)	A	B	C	D
17)	A	B	C	D
18)	A	B	C	D
19)	A	B	C	D
20)	A	B	C	D

En tu cuaderno

Descubierto un asteroide justo antes de impactar contra la Tierra

"Un asteroide de entre dos y cuatro metros de diámetro se estrelló, el 11 de marzo de 2022, contra la Tierra, tan solo dos horas después de que fuera detectado por astrónomos húngaros. La roca, conocida como 2022 EB5, se desintegró en la atmósfera cerca de Jan Mayen, una remota isla noruega. Es la quinta vez que se descubre un objeto de este tipo poco antes de entrar en la capa gaseosa de nuestro planeta.

El asteroide fue observado a las 20:25 (hora peninsular española) desde la estación Piszkéstető del Observatorio Konkoly, en Hungría. Pero lo más emocionante es que solo 30 minutos después del descubrimiento, los datos mostraron que el objeto estaba a apenas dos horas de colisionar con la atmósfera de la Tierra.

Sobre las 22:23 horas, menos de dos horas después de que se detectara su estela desde Hungría, 2022 EB5 chocó contra la atmósfera terrestre al suroeste de la isla de Jan Mayen, en el mar de Noruega, en una zona al norte de Islandia y al este de Groenlandia. Este objeto rocoso produjo una ráfaga de aire a una altura de alrededor de 20-30 km y se rompió; solo pequeños fragmentos pudieron caer al mar de Noruega.


Shutterstock, 622750775.

La roca, conocida como 2022 EB5 se desintegró en la atmósfera cerca de Jan Mayen, una remota isla noruega.

Sobre la hora prevista del impacto, algunas personas en el norte de Islandia (cerca de Akureyri) declararon haber observado un destello brillante en el horizonte. Luego, las señales originadas por la entrada del asteroide se registraron en estaciones infrasónicas de Groenlandia y Noruega.

Según el profesor, Peter Brown, de la Universidad de Ontario Occidental (Canadá), esas señales permiten estimar la energía total del evento en torno a 2 kilotones de TNT. Esto ayuda a calcular que la velocidad de entrada del asteroide fue de cerca de 18 km/s para un objeto con un diámetro de unos dos metros a 15 km/s si tenía entre tres y cuatro metros.

Los datos de momento son provisionales, pero en cualquier caso era un asteroide pequeño y no ha representado un peligro: la atmósfera de la Tierra nos protege de los asteroides de unos pocos metros de diámetro.

Los expertos creen que la roca espacial se quemó en nuestra atmósfera, creando una bola de fuego en el cielo. Debido al pequeño tamaño del asteroide, es poco probable que la roca espacial sobreviviera al viaje. Lo más factible es que se haya quemado por completo en la atmósfera de la Tierra y, en este momento, no se ha encontrado ningún meteorito resultante".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-descubierto-asteroide-justo-antes-impactar-contra-tierra-202203161409_noticia.html

Ficha de comprensión lectora

Shutterstock, 2107872635.

1. ¿Sobre qué trata el artículo?
2. ¿Cuánto medió este asteroide?
3. ¿A qué hora fue por primera vez observado y a qué hora colisionó contra la atmósfera de la Tierra?
4. ¿Cuál fue el lugar en el que colisionó el asteroide?
5. ¿Qué opinas acerca de la posibilidad real de desviar un asteroide?
6. ¿Por qué los asteorides de tamaño pequeño no constituyen un verdadero peligro?

Ficha de escritura académica

Shutterstock, 723897568.

Actividad personal

1. **Investiga** en Internet acerca de los asteroides y su potencial peligro para nuestro planeta.
2. **Averigua** acerca de los programas para detectar asteroides que se consideren peligrosos por un eventual choque.
3. **Toma** de la web diferentes imágenes sobre el tema principal de la lectura y **elabora** un *collage*.
4. ¿Cuáles crees que serían las consecuencias del choque de un asteroide contra nuestro planeta? **Conversa** con tus compañeros sobre esto.

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y utilicen las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente labor: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

   Presenten su trabajo ante el resto de la clase.

   Tomen en cuenta las siguientes recomendaciones:

   - Debe haber un organizador gráfico.
   - Hay que incluir imágenes.
   - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
   - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.

Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

I.M.4.3.5. / I.M.4.8.2. / I.M.4.6.2.

1. **Determina** las ecuaciones cuadráticas, dadas sus raíces.

   a) $x_1 = 6$ y $x_2 = -3$

   b) $x_1 = 4$ y $x_2 = -7$

   c) $x_1 = -6$ y $x_2 = -8$

   d) $x_1 = 12$ y $x_2 = 24$

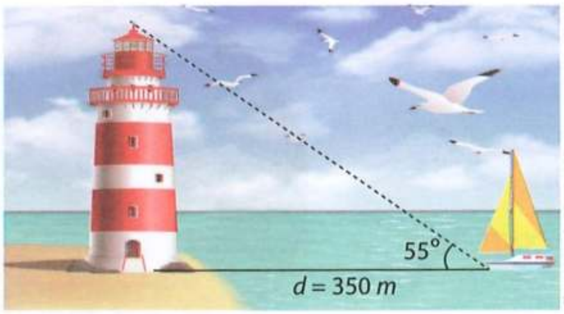
2. **Resuelve** los siguientes problemas.

   a) El área de un terreno rectangular mide 600 m^2. Si el largo es 10 metros más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

   b) Un persona golpea una pelota de tenis, cuya trayectoria está modelada por la ecuación, $y = -0{,}0113x^2 + x + 1{,}5$, donde x es la distancia recorrida (en metros) e y es la altura (también en metros). ¿Qué tan largo es el tiro?

3. **Resuelve** el problema y **escribe** sus razones trigonométricas.

   Dados los siguientes datos, ¿cuál es la distancia del barco a lo alto del faro?



Shutterstock, 386504383.

   i) $Sen(55°) =$

   ii) $Cos(55°) =$

   iii) $Tan(55°) =$

   iv) $Csc(55°) =$

   v) $Sec(55°) =$

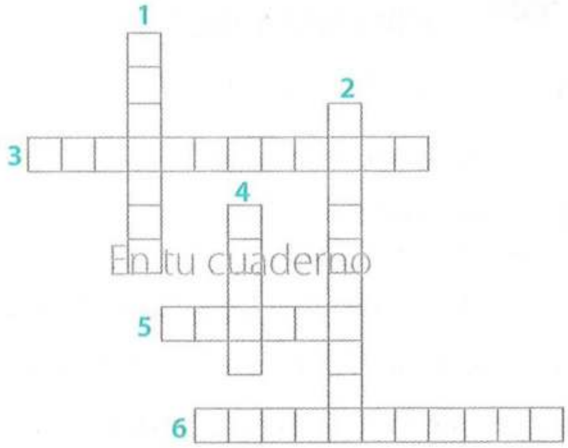
   vi) $Cot(55°) =$

4. **Completa** la siguiente tabla. El espacio muestral $E = \{5, 7, 9, 10\}$, siendo el suceso: $A = \{5, 9, 10\}$.

Suceso B	$A \cup B$	B^c	$B - A$
$B = \{5, 9\}$			
$B = \{10\}$			
$B = \{9, 10\}$			
$B = \{9\}$			

En tu cuaderno

5. **Resuelve** el siguiente crucigrama.



Horizontales

3. Operación cuando los sucesos se realizan simultáneamente.
5. Cuando los elementos de un suceso están en A o en B se representa por la:
6. Cuando la intersección de dos sucesos es diferente al vacío son sucesos:

Verticales

1. Son subconjuntos del espacio muestral.
2. Un suceso que pertenece a uno pero no al otro.
4. La intersección de un suceso con su complemento es el:

Resuelve cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

6. **Selecciona** la ecuación cuadrática sin resolverla, dadas sus raíces: $x_1 = -3$ y $x_2 = -5$

   a) $x^2 + 8x + 15 = 0$

   b) $x^2 - 8x - 15 = 0$

   c) $x^2 + 8x - 15 = 0$

   d) $x^2 - 8x + 15 = 0$

7. **Selecciona** la respuesta correcta.

   La tangente de un ángulo es igual a:

   a) $\frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

   b) $\frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}}$

   c) $\frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}}$

   d) $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}}$

8. **Escribe** V si la afirmación es verdadera o F si la afirmación es falsa.

   a) Las razones trigonométricas se obtienen en cualquier triángulo.

   b) Las razones trigonométricas se realizan siempre con el ángulo de 90°.

9. **Selecciona** la respuesta correcta. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar de una baraja de 52 cartas?

   a) $\frac{5}{52}$ b) $\frac{4}{13}$

   c) $\frac{5}{13}$ d) $\frac{8}{13}$

10. **Encuentra** la solución del siguiente problema.

    Se realizó un estudio a 70 personas sobre su plato típico favorito: 30 personas respondieron hornado, 20 dijeron chugchucaras y 10 personas contestaron hornado y chugchucaras. Si se escoge a una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el hornado o las chugchucaras?

11. **Emplea** los conceptos de funciones trigonométricas y **resuelve**.

    La distancia de una persona a la punta de un árbol es 50 m. Si la persona observa la copa del árbol con un ángulo de 43°, ¿cuál es la altura del árbol?, ¿cuál es la distancia de la persona a la base del árbol?

Coevaluación

12. **Resuelvan** el problema.

    La distancia de una persona a la punta de un edificio es 45 m. Si la persona observa la punta del edificio con un ángulo de 76°, ¿cuál es la altura del edificio? ¿Cuál es la distancia de la persona a la base del edificio?

13. **Determinen** las operaciones entre sucesos si se lanza una moneda dos veces y se consideran los sucesos:

    A : sale al menos una cara, B : salen dos caras o dos sellos. **Calculen** los sucesos:

    a) $(A \cup B)$ c) $(A - B)$

    b) $(A \cap B)$ d) $A^C \cup B^C$

14. **Calculen** la siguiente probabilidad.

    La probabilidad de que apruebe matemática es 0,65; la probabilidad de que apruebe física es 0,4 y la de que apruebe ambas es 0,55. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe matemática o apruebe física?

15. **Expreso mis emociones.** **Enfrenta** con optimismo y entusiasmo los problemas y contrariedades que se puedan presentar en tus actividades escolares. **Describe** una actitud positiva frente a tus responsabilidades académicas.

Autoevaluación

16. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros **Resuelvo por mí mismo** **Necesito ayuda** **Estoy en proceso**

Contenidos	Aplico las propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo grado en la resolución de problemas en la vida cotidiana.	
	Aplico las razones trigonométricas en la resolución de problemas en la vida cotidiana.	
	Realizo operaciones entre eventos y calculo probabilidad de eventos aleatorios en la resolución de problemas.	

Metacognición

- ¿Qué es lo más relevante que aprendiste en esta unidad?
- ¿Cómo puedes aplicar lo aprendido en esta unidad, en situación de la vida cotidiana?

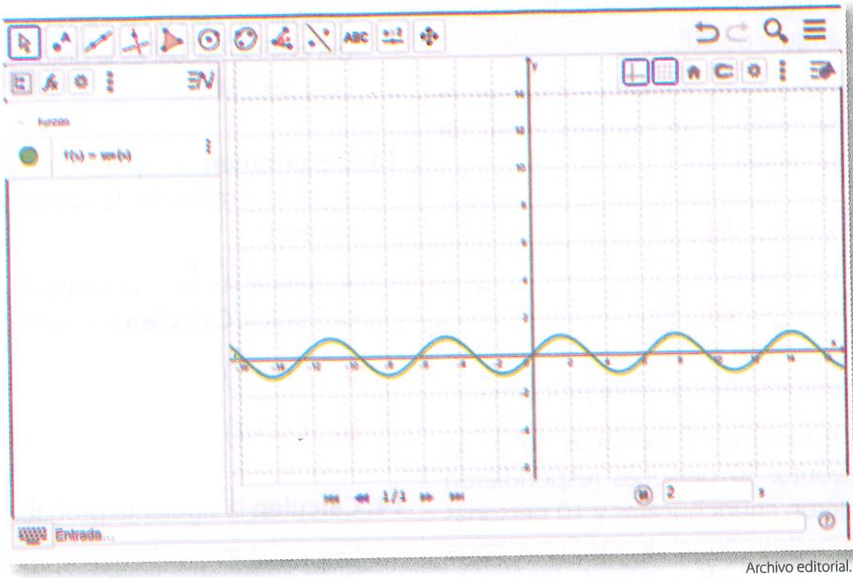
Competencia digital

Uso de Geogebra para graficar funciones

¿Qué es GeoGebra?

GeoGebra es un *software* interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Lo puedes descargar del Internet, en la siguiente dirección:

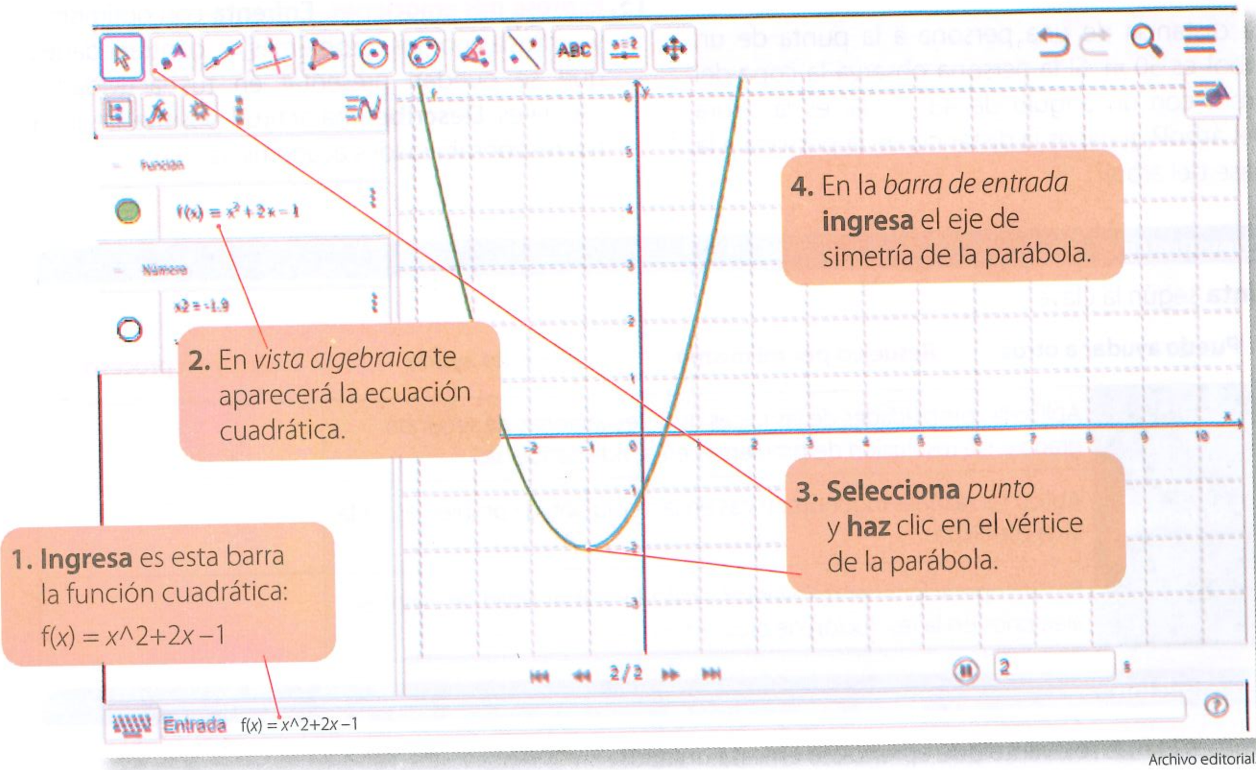
lynk.ec/10m20



Archivo editorial.

Uso de GeoGebra para la función cuadrática

Puedes utilizar GeoGebra para graficar una función cuadrática y determinar sus características. Por ejemplo, vamos a graficar la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x - 1$.



Archivo editorial.

Incluimos en esta sección uno o varios URL de sitios web que, en su momento, estaban en pleno funcionamiento; sin embargo, estos podrían haberse eliminado o cambiado por decisión de los creadores de esos portales. Si tienes algún problema, reporta a: coordinacion@mayaeducacion.com ecuador

REPÚBLICA
DEL ECUADOR

@MinisterioEducacionEcuador

@Educacion_Ec

www.educacion.gob.ec