

MATEMÁTICA

Educación General Básica - Subnivel Superior

9

Texto de consulta y cuaderno de trabajo.

Ministerio de Educación



REPÚBLICA
DEL ECUADOR

Queridos estudiantes y docentes,

Es una profunda alegría dirigirnos a ustedes en este momento tan significativo, donde reafirmamos el compromiso del Ministerio de Educación con su desarrollo y su futuro. La educación es el motor que impulsa los sueños, el puente hacia nuevas oportunidades y el cimiento sobre el cual construiremos juntos una sociedad más justa, solidaria y próspera.

Los textos escolares que hoy llegan a sus manos no son solo herramientas de aprendizaje; son ventanas al conocimiento, puertas hacia la imaginación y compañeros de aventura en el camino del saber. A través de sus páginas, descubrirán historias que los inspirarán, resolverán desafíos que fortalecerán su pensamiento crítico y explorarán culturas que los conectarán con el mundo.

Este texto es un testimonio de nuestro esfuerzo por garantizar que cada niña, niño y joven del Ecuador reciba una educación pública, gratuita y de calidad. Queremos que este material sea más que un recurso académico; que sea una fuente de inspiración, una chispa que encienda su curiosidad y una guía que los ayude a alcanzar sus metas.

Estudiantes, el futuro está en sus manos. Cada página que lean, cada idea que cuestionen y cada conocimiento que compartan contribuirá a la construcción de sus sueños y, al mismo tiempo, al desarrollo de nuestro querido Ecuador.

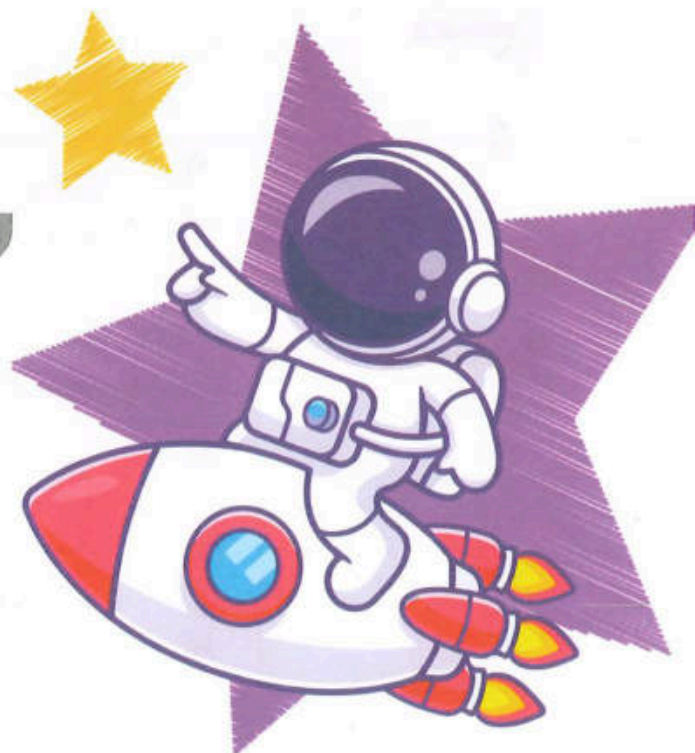
Docentes, ustedes son el corazón de este proceso educativo. Gracias por su dedicación, su paciencia y su amor por la enseñanza. Su labor transforma vidas y siembra las semillas de un mejor porvenir.

Aprovechen al máximo este material. Lean con atención, hagan preguntas, busquen respuestas, compartan ideas. La educación es un compromiso que nos une a todos: estudiantes, docentes, familias y Estado.

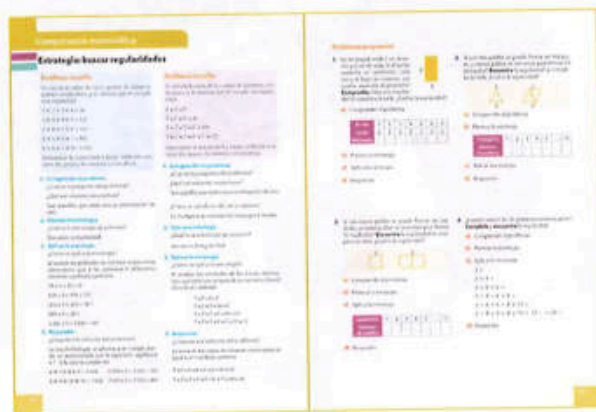
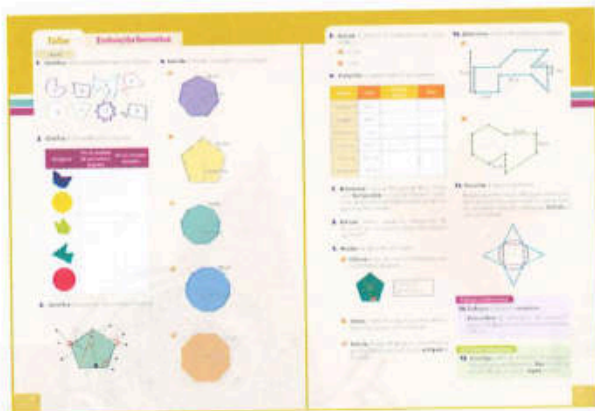
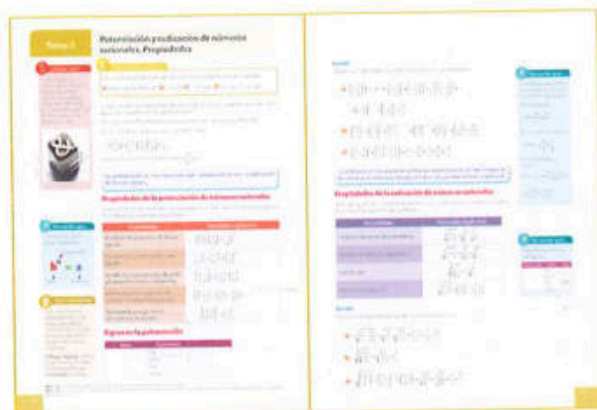
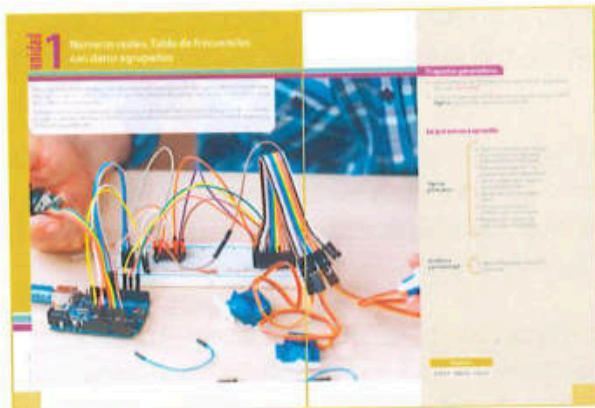
Con gratitud y esperanza, les invitamos a recorrer juntos este camino hacia el conocimiento. Porque solo a través de la educación lograremos construir un Ecuador donde cada sueño tenga la oportunidad de hacerse realidad.

¡El conocimiento
LES PERTENECE,
EL FUTURO **TAMBIÉN!**

Con afecto y admiración.
Ministerio de Educación del Ecuador
2025



Conoce tu libro



El texto de Matemática para 9.º año de EGB comienza con una **Evaluación diagnóstica** que permite conocer las habilidades competencias y destrezas que los estudiantes han adquirido en 8.º año de EGB.

En la apertura de **unidad** hallarás una fotografía, un texto introductorio con lo que podrás "leer las imágenes" e interpretar matemáticamente la realidad.

También encontrarás preguntas generadoras que invitan a familiarizarse con los objetivos por alcanzar en cada unidad.

Los contenidos inician con la sección de **Saberes previos** o **Desequilibrio cognitivo**, que permiten relacionar tus experiencias y tu vida con el nuevo conocimiento. El material se apoya en fotografías, tablas, esquemas, gráficas e ilustraciones que harán más divertido el aprendizaje.

También encontrarás, de manera aleatoria, secciones interdisciplinarias como **DFA** (diversidad funcional en el aula), **¿Sabías que?**, **Recuerda que**, **Interdisciplinariedad**, **interculturalidad**, las cuales te permitirán vincular la matemática con otras ciencias y **Competencia digital** que te apoyará con enlaces de Internet para que refuerces tus aprendizajes mediante juegos, información y retos.

Evaluaciones formativas o talleres han sido diseñados para evaluar las destrezas, mediante actividades interesantes y dinámicas que se resuelven empleando el razonamiento lógico. Muchas de ellas fomentan la resolución de problemas y otras estimulan la aplicación de lo aprendido. Se las puede trabajar en los diversos ambientes de aprendizaje: el aula, la casa y la virtualidad.

Además, te proponemos la sección **Trabajo colaborativo** a fin de reforzar el trabajo en equipo y **Actividades indagatorias** que invitan a investigar y aplicar el contenido estudiado.

Problema-decisión. Presenta también actividades orientadas a fortalecer la capacidad de tomar decisiones, a partir del planteamiento de un problema.

En los talleres o **Evaluación formativa**, se detallan los indicadores de evaluación, que se denominan con su código por bloque curricular.

Competencia matemática favorece la aplicación de conceptos y procedimientos para solucionar problemas y situaciones matemáticas; en esta sección pondrás en juego tu inteligencia, creatividad y estrategias para resolver problemas.

La sección consta de dos partes: en la primera encontrarás el planteamiento y la resolución paso a paso de dos problemas, identificando la estrategia a emplear, hasta llegar a la solución; y en la segunda parte encontrarás una serie de problemas propuestos para que los resuelvas.

Competencia matemática asociada al desarrollo del pensamiento te ayudará a desarrollar tu aptitud verbal, razonamiento numérico y razonamiento abstracto.

Cálculo mental, por su parte, propone estrategias para realizar cálculos rápidos.

Proyecto interdisciplinar es una sección encaminada a la aplicación de la matemática en tu vida económica, social, cultural y ambiental, a través de un proyecto aplicado a diferentes contextos.

Olimpiadas matemáticas es una sección que invita a desarrollar habilidades matemáticas a través de preguntas tipo reto o concurso.

Es un instrumento que sirve para identificar tus debilidades y fortalezas, a través de preguntas de opción múltiple y que, poco a poco, te preparan para potenciar tus habilidades matemáticas.

Competencia socioemocional se encuentra distribuida a lo largo de la unidad. Te invita a desarrollar las áreas afectivas en relación con otras personas y tu desenvolvimiento en la sociedad de forma responsable y coherente con tu vida y tu futuro.

Competencia comunicacional permite desarrollar una buena comunicación para expresar y comprender ideas, pensamientos, sentimientos, conocimientos y actividades en torno de tu desenvolvimiento académico y personal.

Consta de una lectura, motivadora y de interés general, seguida de la ficha de comprensión lectora y la ficha de escritura académica.

Evaluación sumativa corresponde a la evaluación de la unidad, con opciones de respuestas y de desarrollo; son dos páginas con actividades variadas para evaluar tus destrezas. La sección incluye **heteroevaluación**, **coevaluación** y **autoevaluación**; además, de **expreso mis emociones**, donde encontrarás una pregunta que te invita a expresar lo que sientes en relación con el contexto de la unidad.

Competencia digital corresponde a tecnologías de la información y la comunicación (TIC) que se utilizan como herramientas de investigación o refuerzo del tema desarrollado.



Índice

Evaluación diagnóstica.....	8
-----------------------------	---

Unidad 1 Números reales. Tabla de frecuencias con datos agrupados 10

Números racionales. Operaciones.....	12	Competencia matemática.....	36
Potenciación y radicación de números racionales.		Proyecto interdisciplinario	
Propiedades.....	16	Medidas de prevención de accidentes.....	39
Números irracionales. Números reales y redondeo.....	20	Aplico en la vida cotidiana	
Adición y sustracción de números reales. Propiedades.....	24	Tema: La estadística en el deporte.....	40
Multiplicación y división de números reales.....	28	Tema: Una alimentación saludable.....	41
Tabla de frecuencias con datos agrupados.....	32	Olimpiadas matemáticas.....	42
		Refuerza tus aprendizajes.....	43
		Competencia comunicacional.....	46
		Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	48

Unidad 2 Números reales, racionalización. Expresiones algebraicas. Áreas 50

Potenciación de números reales.....	52	Competencia matemática.....	80
Radicación de números reales.....	56	Proyecto interdisciplinario	
Racionalización de números reales.....	60	La geometría en las vías.....	83
Expresiones algebraicas. Polinomios.....	64	Aplico en la vida cotidiana	
Representación de polinomios con material concreto.....	68	Tema: Áreas en la carpintería.....	84
Polígonos. Área de polígonos.....	72	Tema: Cómo calculo en el mercado.....	85
Área de prismas y pirámides, cilindros y conos.....	76	Olimpiadas matemáticas.....	86
		Refuerza tus aprendizajes.....	87
		Competencia comunicacional.....	90
		Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	92

Unidad 3 Polinomios operaciones. Productos notables. Volúmenes 94

Adición y sustracción de polinomios, con signos de agrupación.....	96	Competencia matemática.....	120
Multiplicación de monomios y polinomios.....	100	Proyecto interdisciplinario	
Productos notables I.....	104	Aproximando medidas importantes.....	123
Productos notables II.....	108	Aplico en la vida cotidiana	
Triángulo de Pascal y teorema del binomio.....	112	Tema: Un negocio nuevo.....	124
Volumen de prismas, pirámides y cuerpos redondos.....	116	Tema: Estructuras metálicas.....	125
		Olimpiadas matemáticas.....	126
		Refuerza tus aprendizajes.....	127
		Competencia comunicacional.....	130
		Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	132

Unidad 4 División. Factorización. Medidas de tendencia central 134

BC 1	División de monomios y polinomios.....	136
	División sintética. Cocientes notables.....	140
	Descomposición factorial: factor común.....	144
	Factorización de binomios.....	148
	Trinomios cuadrados perfectos.....	152
BC 3	Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$	156
	Medidas de tendencia central para datos agrupados.....	160

Competencia matemática.....	164
Proyecto interdisciplinario	
¡A cuidarse de los rayos solares!.....	167
Aplico en la vida cotidiana	
Tema: Conozco las dimensiones de mi aula.....	168
Tema: Medidas de tendencia central con datos agrupados.....	169
Olimpiadas matemáticas.....	170
Refuerza tus aprendizajes.....	171
Competencia comunicacional.....	174
Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	176

Unidad 5 Ecuaciones de primer grado. Medidas de dispersión 178

BC 1	Ecuaciones lineales o de primer grado.....	180
	Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.....	184
	Fracciones algebraicas. Simplificación. Operaciones.....	188
	Intervalos e inecuaciones.....	192
	Medidas de dispersión con datos agrupados.....	196

Competencia matemática.....	200
Proyecto interdisciplinario	
Nuestra riqueza musical.....	203
Aplico en la vida cotidiana	
Tema: Inventario de papelería.....	204
Tema: Límites de velocidad.....	205
Olimpiadas matemáticas.....	206
Refuerza tus aprendizajes.....	207
Competencia comunicacional.....	210
Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	212

Unidad 6 Funciones lineales. Técnicas de conteo 214

BC 1	Producto cartesiano. Relaciones.....	216
	Funciones.....	220
	Funciones crecientes, decrecientes y constantes.....	224
	Función lineal y afín.....	228
	Técnicas de conteo: diagrama de árbol.....	232
BC 3	Variaciones, combinaciones y permutaciones.....	236

Competencia matemática.....	240
Proyecto interdisciplinario	
El ahorro de la energía es nuestra responsabilidad.....	243
Aplico en la vida cotidiana.....	244
Tema: Tiempo de congelación.....	244
Tema: El mejor menú.....	245
Olimpiadas matemáticas.....	246
Refuerza tus aprendizajes.....	247
Competencia comunicacional.....	250
Compruebo mis aprendizajes. Evaluación sumativa.....	252

Competencia digital	
Medidas de tendencia central con datos agrupados con Excel.....	254
Bibliografía / Webgrafía.....	256

1. Lee y encuentra los resultados.

- a) ¿Qué número se debe sumar a -18 para obtener 50 ?
- b) ¿Qué número debe restarse a -25 para obtener -15 ?
- c) ¿Qué número debe multiplicarse a -3 para obtener -18 ?
- d) ¿Para qué número se debe dividir -80 para obtener 10 ?

2. Relaciona cada operación con su resultado.

A. $\frac{4^4 \times 4^{-5}}{4^{-4}}$ 1. 32

B. $\frac{2^6 \times (2^3)^{-2}}{2^2}$ 2. 62

C. $4 + 5^2 - (-3)^3 + 6$ 3. 64

D. $\frac{2^2 \times 2^{-4}}{2^{-7}}$ 4. $\frac{1}{4}$

- a) A con 4 ; B con 2 ; C con 1 ; D con 3
- b) A con 3 ; B con 4 ; C con 2 ; D con 1
- c) A con 2 ; B con 1 ; C con 3 ; D con 4
- d) A con 1 ; B con 2 ; C con 4 ; D con 3

3. Relaciona cada operación con su resultado.

A. $\sqrt{\sqrt{25 \times 4} + \sqrt{36}}$ 1. 21

B. $\sqrt[3]{\sqrt{64} + \sqrt{100} + \sqrt[3]{3^6}}$ 2. 4

C. $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{6^4} \times 5 - \sqrt{400}$ 3. 7

D. $\sqrt{\frac{2^6}{2^4}}$ 4. 2

- a) A con 4 ; B con 2 ; C con 1 ; D con 3
- b) A con 3 ; B con 4 ; C con 2 ; D con 1
- c) A con 2 ; B con 1 ; C con 3 ; D con 4
- d) A con 1 ; B con 2 ; C con 4 ; D con 3

4. El área de un rectángulo es 147 cm^2 . Si un lado mide el triple que el otro, ¿cuáles son las medidas de los lados?

- a) 8 cm y 24 cm
- b) 4 cm y 12 cm
- c) 7 cm y 21 cm
- d) 3 cm y 49 cm

5. ¿Cuántos cuartos tiene una hora? ¿Cuántos minutos tiene un sexto de hora?

- a) 3 cuartos y 6 minutos
- b) 4 cuartos y 12 minutos
- c) 8 cuartos y 20 minutos
- d) 4 cuartos y 10 minutos

6. Carmen viaja de una ciudad a otra y la distancia es de 450 km . Para llegar a una ciudad intermedia, recorrió $\frac{5}{9}$ del recorrido total. Si está en la ciudad intermedia, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer para llegar a su destino?

- a) 250 km
- b) 150 km
- c) 200 km
- d) 50 km

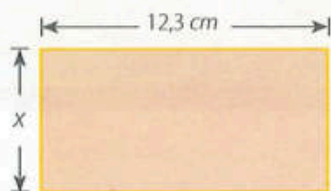
7. ¿Qué par de fracciones no suman 1 ?

- a) $\frac{1}{4}$ y $\frac{6}{8}$
- b) $\frac{14}{16}$ y $\frac{1}{8}$
- c) $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$
- d) $\frac{22}{24}$ y $\frac{1}{12}$

8. ¿Cuál es la fracción generatriz de $7,54$?

- a) $\frac{754}{90}$
- b) $\frac{754}{99}$
- c) $\frac{744}{99}$
- d) $\frac{747}{99}$

9. El perímetro del rectángulo es 41,6 cm. ¿Cuánto mide el lado que falta?



- a) 17 cm
b) 8,5 cm
c) 29,3 cm
d) 3,38 cm
10. ¿Cuál es la ecuación que corresponde a la siguiente expresión?

La mitad de la suma de 4,5 y otro número es igual 13,5.

- a) $\frac{4,5 + 13,5}{3} = x$
b) $\frac{4,5 + 13,5}{2} = x$
c) $\frac{4,5 + x}{2} = 13,5$
d) $\frac{4,5 + 4,8}{2} = 13,5$

11. Resuelve los siguientes ejercicios.

- a) $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{5} + \frac{11}{20} =$
b) $\frac{3}{25} \times \frac{5}{18} \div \left(\frac{12}{36} \times \frac{4}{3}\right) =$
c) $\frac{54}{6} \times \frac{21}{63} \times \frac{72}{12} \div \frac{30}{1} =$
d) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(2 - \frac{\frac{1}{4} - 1}{2 + \frac{1}{5}}\right) =$

12. Resuelve las operaciones respetando la jerarquía de solución.

a) $\frac{\sqrt{\frac{5}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{27}}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \left(\frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} - \sqrt{\frac{4}{9} \times \frac{8}{18}}$

13. Completa con una palabra las siguientes afirmaciones.

- a) Los ángulos interiores de los acutángulos son _____ que 90°.
b) Los triángulos rectángulos _____ pueden ser isósceles, pero _____ pueden ser equiláteros.
c) Todo triángulo rectángulo tiene un ángulo de _____.
d) Los triángulos _____ son siempre acutángulos.
e) En un triángulo _____ uno de los ángulos exteriores es agudo.
f) En los triángulos _____ la suma de sus ángulos que no son rectos es siempre 90°.
g) Si el triángulo es escaleno y la suma de dos de sus ángulos es _____, el ángulo restante mide 60°.

14. Relaciona el punto de intersección y sus líneas notables.

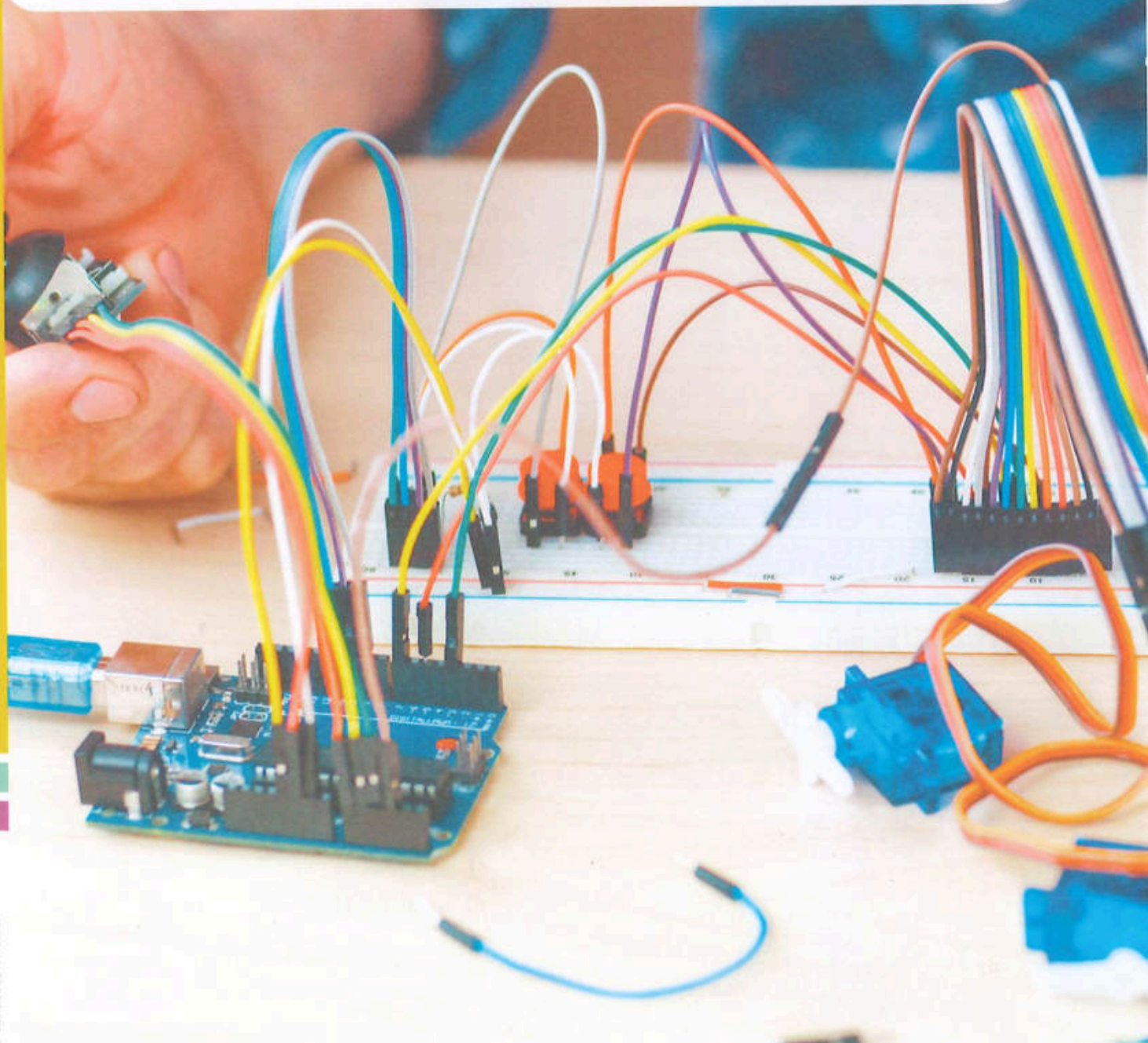
- | | |
|-------------------|-----------------|
| A) alturas | 1. baricentro |
| B) medianas | 2. incentro |
| C) bisectrices | 3. ortocentro |
| D) mediatrices | 4. circuncentro |
| a) a1; b2; c3; d4 | |
| b) a2; b3; c4; d1 | |
| c) a3; b1; c2; d4 | |
| d) a4; b1; c2; d3 | |

unidad 1

Números reales. Tabla de frecuencias con datos agrupados

Al recorrer la historia de la humanidad, observamos que muchos inventos han contribuido a nuestro bienestar. Algunos prevalecen hasta la actualidad, otros han desaparecido porque han dejado de ser útiles, y otros, porque han sido reemplazados.

Entre los inventos y descubrimientos significativos, podemos distinguir a la rueda, el fuego, el reloj, la imprenta, el papel, la bombilla eléctrica, el teléfono, la refrigeradora, el automóvil, la televisión, el Internet, la penicilina, la computadora, entre otros.





Preguntas generadoras

- ¿Qué invento de los nombrados crees que es el más significativo?
¿Por qué?
- ¿Cuál es el valor exacto de la diagonal de una hoja de papel *bond*?
Explica el proceso que seguiste para obtenerlo.

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Números racionales. Operaciones con números racionales: suma, resta, multiplicación y división
- Potenciación y radicación de números racionales. Propiedades
- Números irracionales. Conjunto de los números reales
- Aproximación de los números reales
- Adición y sustracción de números reales. Propiedades
- Multiplicación y división de números reales. Propiedades

Estadística y probabilidad

- Tablas de frecuencias para datos agrupados

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.2. / O.M.4.7.

Tema 1

Números racionales. Operaciones



Interculturalidad

Nuestros ancestros construyeron relojes sobre piedras. Las horas quedaban señaladas por la incidencia de los rayos solares.



Dial de bronce colocado en un patio de piedra.



Recuerda que...

Un número racional es todo número que puede ser representado como una fracción.

$$\frac{a}{b} \text{ donde } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

De acuerdo con lo expuesto, todo número entero es un número racional $\mathbb{Q}$.

$$17 = \frac{17}{1}$$



Competencia socioemocional

El trabajo en grupo es muy importante para lograr objetivos y tu aporte es fundamental. Expresar tu opinión y criterios de una forma apropiada conlleva cumplir las metas planteadas.



Saberes previos

Escribe los números que corresponden a las representaciones.



La imagen muestra las horas en que Augusta observó el reloj en la mañana antes de salir al colegio. ¿Qué parte fraccionaria de la hora ocupó para cada actividad y qué parte fraccionaria de la hora utilizó para alistarse para ir al colegio?

Observamos cuántos minutos le tomó hacer cada actividad y recordamos que la hora tiene 60 minutos. El número de minutos tomado para cada actividad será el numerador de cada fracción y los 60 minutos serán el denominador.

Bañarse y vestirse: $\frac{20}{60}$

Desayunar: $\frac{15}{60}$

Cepillar sus dientes: $\frac{10}{60}$



Despertó



Terminó de bañarse y vestirse



Terminó el desayuno



Se cepilló los dientes y salió

Con el fin de determinar la fracción de hora que utilizó para alistarse totalmente, sumamos las tres fracciones:

$$\frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{10}{60} = \frac{45}{60} \text{ . Simplificando tenemos: } \frac{3}{4}$$

Para sumar o restar fracciones homogéneas, conservamos el denominador y sumamos los numeradores. Si las fracciones son heterogéneas, buscamos el m.c.m. de los denominadores, el cual será dividido para cada denominador. Ese resultado se multiplica por cada numerador. Los productos se sumarán o restarán de acuerdo con la disposición de los signos.

Ejemplo 1

Realizar la operación $\frac{5}{9} - \frac{11}{9} + \frac{4}{9}$

Solución

$$\frac{5}{9} - \frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5-11+4}{9} = -\frac{2}{9}$$

Sumamos algebraicamente los numeradores y conservamos el denominador.

M.4.1.16. Operar en $\mathbb{Q}$ (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos.

M.4.1.17. Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos. (destreza desagregada)

Ejemplo 2

Realizar la operación: $\frac{2}{5} + \frac{15}{6} - \frac{1}{3} - \frac{7}{15} =$

Solución

Calculamos el m.c.m. de 5, 6, 3 y 15. Lo colocamos como denominador común y realizamos las divisiones y multiplicaciones respectivas.

$$\frac{2}{5} + \frac{15}{6} - \frac{1}{3} - \frac{7}{15} = \frac{12 + 75 - 10 - 14}{30} = \frac{63}{30} = \frac{21}{10}$$

$$\times \left(\frac{2}{5} + \frac{15}{6} - \frac{1}{3} - \frac{7}{15} \right) = \frac{12 + 75 - 10 - 14}{30} = \frac{63}{30} = \frac{21}{10}$$

Multiplicación y división de números racionales

Para multiplicar números racionales, debemos multiplicar los numeradores con los numeradores y los denominadores con los denominadores. Luego, aplicamos la ley de signos. Antes de multiplicar, se recomienda simplificar.

Ejemplo

Multiplicar $\frac{4}{5} \left(-\frac{15}{2} \right) \times \frac{8}{4} \left(-\frac{7}{11} \right) \left(\frac{22}{6} \right) =$

Solución

Simplificamos, multiplicamos los numeradores y denominadores que resultaron y aplicamos la ley de signos.

$$\frac{4}{5} \left(-\frac{15}{2} \right) \times \frac{8}{4} \left(-\frac{7}{11} \right) \left(\frac{22}{6} \right) = \frac{28}{1} = 28$$

Para dividir números racionales, invertimos al número racional divisor y multiplicamos siguiendo el proceso de la multiplicación.

Ejemplo

$$-\frac{45}{7} \div \frac{9}{14} = -\frac{45}{7} \times \frac{14}{9} = -10$$

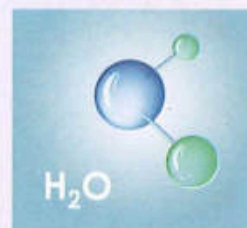


Interdisciplinariedad

Matemática y Química

Las moléculas de muchos elementos de la naturaleza están formadas por átomos. Así, por ejemplo, el agua está formada por 2 átomos de hidrógeno y 1 de oxígeno.

Escribe mediante fracción la cantidad que corresponde a cada elemento en la molécula de agua.



Molécula de agua H₂O.

Shutterstock, 634149501



Competencia digital

Para que puedas comprobar lo aprendido, ingresa y practica en el siguiente enlace web: lynk.ec/9m01



I.M.4.1.3.

1. **Expresa** en fracciones de horas cada uno de los siguientes datos.

- a) 15 min
- b) 42 min
- c) 50 min

2. **Efectúa** las siguientes operaciones.

- a) $\left(-\frac{15}{23}\right) + \left(-\frac{19}{23}\right) =$
- b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{3}\right) + \left(7 + \frac{1}{5}\right) =$
- c) $\left(-\frac{2}{5} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) =$
- d) $\left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) =$
- e) $\frac{3}{4} + \frac{6}{5} - \frac{1}{3} =$
- f) $\frac{1}{12} - \frac{4}{3} + \frac{7}{6} =$
- g) $\frac{9}{11} - \left(\frac{5}{22} - 6\right) =$
- h) $\frac{3}{7} - \left(\frac{4}{21} - 2 + \frac{1}{14}\right) =$
- i) $\frac{6}{13} - \frac{1}{5} - \left(8 - \frac{1}{26}\right) =$
- j) $-\frac{1}{2} - \left(\frac{7}{20} - \frac{9}{10}\right) + \frac{11}{5} =$
- k) $\frac{12}{3} - \frac{5}{9} - \left(\frac{7}{18} - 3\right) + \frac{7}{27} =$
- l) $-16 + 3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{16} - 1\right) =$

3. **Completa** en tu cuaderno con un número para que se cumpla la igualdad.

- a) $-\frac{1}{5} + \quad = \frac{2}{5}$
- b) $-\frac{2}{7} = \frac{2}{3}$
- c) $\frac{3}{5} - \quad = \frac{5}{7}$
- d) $-0,5 + \quad = \frac{1}{4}$

4. **Identifica** el minuendo y el sustraendo. Luego, **realiza** la operación.

- a) De $\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right]$ restar $\left[\frac{8}{5} - 0,3\right] =$
- b) Restar $\left(-0,3 + \frac{2}{5}\right)$ de $\left(1 - \frac{3}{7} + \frac{1}{4}\right) =$

5. **Analiza** la solución del siguiente problema. Luego, **resuelve** lo propuesto.

Francisco gana \$ 600, y va a destinar $\frac{1}{5}$ de lo que tiene para el pago del arriendo de su casa.

El número racional puede ser usado como operador:

$$\frac{1}{5} \times \cancel{600} = 120$$

- a) $\frac{2}{7}$ de 1400 =
- b) $\frac{3}{9}$ de 2070 =
- c) $\frac{11}{17}$ de 102 =

6. **Determina** los siguientes productos efectuando previamente todas las simplificaciones posibles.

- a) $\left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{9}{25}\right)\left(-\frac{35}{12}\right) =$
- b) $\left(-3\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{81}\right)(2,3)(-0,5) =$
- c) $(3,5) \frac{10}{14} (1,1) \frac{9}{18} (1,23) =$
- d) $\left(-\frac{1}{2}\right)(1,23)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{10}{14}\right) =$

7. Encuentra el valor de b .

- a) $100b = 25$
- b) $0,09b = 0,81$
- c) $(0,2)(0,2)(0,2)b = 1$

8. Responde las siguientes preguntas en tu cuaderno.

- a) El inverso multiplicativo de -21 es
- b) El inverso multiplicativo de $\frac{13}{25}$ es
- c) ¿Cuántas veces está $\frac{1}{2}$ en 1 ?
- d) ¿Cuántas veces está $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$?

9. Realiza las siguientes divisiones.

- a) $-\left(\frac{-7}{-3}\right) \div \left(\frac{-5}{6}\right) =$
- b) $\left(\frac{64}{-27}\right) \div \left(\frac{-12}{7}\right) =$
- c) $\frac{2}{5} \div 1,3 =$

10. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

- a) $0,2 - \left(\frac{2}{5} \times \frac{15}{4} + 1\right) \div \frac{1}{2} =$
- b) $\frac{2}{3} + 0,3 \times \frac{9}{5} - 4(2,1 - 0,1) \div \frac{4}{3} =$
- c) $0,5 - \left(-\frac{3}{4}\right) - \left[6(0,1) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right)\right] =$
- d) $4 + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{25} - 0,1 =$
- e) $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{5} + \frac{3}{4}\right) \div (-1 + 0,4 + 1,5) =$
- f) $0,75 - 0,5 + 2 + \frac{15}{8} \times (-0,8) - 1 + (-0,6) =$
- g) $1 + \frac{4}{5} \times 3 \times (-2,5) + 2 \div 1,5 - 2\left(0,3 - \frac{3}{4}\right) =$
- h) $-2 \times \frac{4}{9} - 1 \div 1,5 - \left(-0,6 + \frac{5}{18}\right) \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \div (-1) =$

11. Resuelve los siguiente problemas.

- a) Se quieren envasar 80 kilos de café en paquetes de $\frac{2}{5}$ de kilo cada uno. ¿Cuántos paquetes se obtendrán?
- b) Tres amigos deben pagar una cuenta de \$ 120 en un restaurante. El primero debe cancelar los $\frac{5}{12}$ del total, el segundo $\frac{5}{15}$ y el tercero el resto. ¿Cuál es la cantidad de dinero que cada amigo aporta para cancelar la cuenta?
- c) Si el producto de la mitad de un número por los $\frac{2}{3}$ del mismo número es 12, ¿cuál es ese número?
- d) Camilo está interesado en comprar a crédito una guitarra cuyo costo es de \$ 1 200. Como cuota inicial pagará $\frac{1}{3}$ del valor; luego de un mes cancelará la cuarta parte del saldo y el resto lo pagará en 6 cuotas mensuales iguales. ¿Cuál es el valor de cada cuota mensual?
- e) Una orquesta sinfónica está compuesta por 120 instrumentos. $\frac{2}{5}$ son de cuerda, $\frac{1}{5}$ son de viento madera y estos representan los $\frac{2}{3}$ de los de viento metal. El resto son instrumentos de percusión. ¿Cuántos instrumentos de cada tipo hay?

- 12. Problema-decisión.** Manolo y su hermana compran una pizza y la dividen en 16 partes iguales. Manolo se come las $\frac{3}{8}$ partes y su hermana se come la mitad de lo que quedó. ¿Cuántos pedazos de pizza sobran?

Si conoces que la hermana de Manolo es una persona obesa y tuvieras que ayudarla a decidir a seleccionar entre la pizza u otro alimento, ¿qué le sugerirías? **Justifica.**

Trabajo colaborativo

13. Trabaja en parejas y resuelvan.

Formulen un polinomio aritmético con números racionales. **Resuélvanlo** y **expónganlo** en clase.

Actividad indagatoria

- 14. Investiga** sobre las propiedades de la suma y la multiplicación de números racionales. **Expón** en clase ejemplos de aplicación.

Tema 2



¿Sabías que?

La tipografía es el sistema de la imprenta tradicional de tipos móviles inventado por Johannes Gutenberg. Esta forma de impresión fue superada por la impresión *offset*.



Troquel de acero



Desequilibrio cognitivo

Los resultados de los ejercicios son erróneos; escribe la solución correcta.

a) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 6^4$ b) $5^2 = 10$ c) $(-2)^3 = 8$ d) $(-3)^6 + (-3)^5 = (-3)^{11}$

¿Cuál es el volumen del troquel de acero que se usó para elaborar uno que servirá para hacer impresiones de tipo tipográfico?

Por ser el troquel de forma cúbica, su volumen se calcula con la fórmula:

$V = a^3$, donde V = volumen y a = arista del cubo.

$$V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}$$

Por lo tanto, el volumen del troquel es $\frac{27}{64} \text{ cm}^3$.

La potenciación es una operación que corresponde a una multiplicación de factores iguales.

Propiedades de la potenciación de números racionales

Sean a/b y c/d dos números racionales y m, n dos números enteros positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Expresión algebraica
Producto de potencias de bases iguales	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
Cociente de potencias de bases iguales	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
Distributiva con respecto a la multiplicación de números racionales	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$
Distributiva con respecto a la división de números racionales	$\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{c}{d}\right)^n$
Potencia de una potencia de números racionales	$\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n\right\}^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$

Signos en la potenciación

Base	Exponente	
+	Par	+
	Impar	
-	Par	+
	Impar	-



Recuerda que...

Los términos de la potenciación son:

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ \downarrow \\ \mathbf{b}^{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Base} \quad \text{Potencia} \end{array}$$



Interculturalidad

Los conocimientos etnomatemáticos se expresan mediante símbolos, que incluyen el uso de expresiones en la propia lengua originaria.

Indaga y escribe con tus palabras el significado de etnomatemática. Preséntalo a la clase.

M.4.1.18. Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros (destreza desagregada).

M.4.1.19. Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos (con operaciones combinadas) y algebraicos, atendiendo la jerarquía de la operación.

Ejemplo

Aplicar las propiedades de la potenciación y calcular la potencia.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^4 (-0,66\dots)^{-5} \left(-\frac{2}{3}\right)^3 &= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{4-5+3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{6}{7}\right)^{-11} + \left(\frac{6}{7}\right)^{-8} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-11-(-8)} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-11+8} = \left(\frac{6}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{6}\right)^3 = \frac{343}{216}$$

$$\text{c)} \quad \left(\frac{3}{2} \div \frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{4} \div \frac{81}{64} = \frac{9}{4} \times \frac{64}{81} = \frac{16}{9}$$

La radicación es una operación contraria a la potenciación. En ella se trata de encontrar un número que, elevado al índice, nos permita obtener el radicando.

Propiedades de la radicación de números racionales

Sean a/b y c/d dos números racionales y m, n dos números enteros positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

Propiedades	Expresión algebraica
Producto de raíces de igual índice	$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
División de raíces de igual índice	$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \div \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
Raíz de raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a}{b}}$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo

Aplicar las propiedades de la radicación y calcular la raíz.

$$\text{a)} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot \frac{64}{216}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{216}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{64}{729}}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt[6]{\left(\frac{36}{81}\right)^3} = \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{3}{6}} = \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



Recuerda que...

Los números decimales se pueden transformar en números racionales.

Si son exactos:

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Si son periódicos puros:

$$0,666\dots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Si son periódicos mixtos:

$$4,237272\dots = \frac{42372 - 423}{9900} =$$

$$= \frac{41949}{9900} = \frac{4661}{1100}$$



Recuerda que...

Regla de signos en la radicación.

Radicando	Índice	Raíz
+	Par	+
+	Impar	+
-	Par	$\notin \mathbb{R}$
-	Impar	-

I.M.4.1.3.

1. **Expresa** en forma de potencia los siguientes productos.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

b) $(-0,01)(-0,01) =$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) =$

2. **Determina** el término que falta **escribe** en tu cuaderno.

a) $\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{216}{125}$

b) $\left(\frac{\quad}{2}\right)^5 = \frac{1024}{\quad}$

c) $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^{-4} = \frac{16}{81}$

3. **Calcula** las siguientes potencias.

a) $(11)^{-2} =$

b) $(2)^{-4} =$

c) $(5)^{-3} =$

d) $(-3)^{-4} =$

e) $(-4)^{-3} =$

f) $\left(-\frac{1}{11}\right)^2 =$

g) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 =$

h) $\left(-\frac{4}{3}\right)^4 =$

i) $\left(-\frac{1}{13}\right)^{-2} =$

j) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} =$

k) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3} =$

l) $\left(\frac{17}{10}\right)^{-2} =$

4. **Aplica** las propiedades y **calcula** la potencia.

a) $\left(\frac{10}{3}\right)^3 \cdot 0,3^{-1} =$

b) $0,25^4 \div \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$

c) $0,6 \times \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 =$

d) $\left\{\left[\left(-\frac{7}{3}\right)^0\right]^2\right\}^{-8} =$

5. **Resuelve** y **comprueba** cada ejercicio. Luego **escribe** verdadero (V) o falso (F).

a) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2$

b) $\left\{\left[\left(\frac{7}{11}\right)^4\right]^5\right\}^{-11} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 + (0,83)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

6. **Escribe** el signo de la potencia resultante.

a) $\frac{-8}{(-3)^5} =$

b) $-\left(-\frac{3}{5}\right)^4 =$

c) $(1,234)^{-2} =$

7. **Resuelve** el siguiente problema.

Un número racional es la quinta parte de la sexta parte de $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{12}\right)^2$. ¿Cuál es el número?

8. **Problema-decisión.** La herencia de José es la centésima parte del cuadrado de la herencia de Andrea. Si la herencia de Andrea es de \$ 2 000, ¿cuánto tiene José?

Si tuvieras que asignar la herencia que debe recibir cada hermano, ¿qué decisión tomarías? **Justifica.**

9. Calcula la raíz en cada caso.

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} =$

b) $\sqrt{0,0625} =$

c) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} =$

d) $\sqrt{0,0009} =$

10. Determina el término que falta.

a) $\sqrt[3]{-\frac{\quad}{1000}} = -\frac{7}{10}$

c) $\sqrt{\frac{6561}{625}} = \frac{9}{5}$

b) $\sqrt[6]{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{-0,512} = -0,8$

11. Escribe la propiedad que ha sido aplicada.

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1,25}} = \sqrt[9]{1,25}$

c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27} \div \frac{125}{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \div \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

d) $\sqrt[8]{(0,25)^4} = \sqrt{0,25}$

e) $\sqrt[3]{\frac{8}{512} \times \frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{8}{512}} \times \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$

12. Observa y explica el error cometido.

a) $\sqrt{-0,0025} = -0,05$

b) $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{32}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3234}} = \sqrt[3]{3234}$

13. Observa el ejemplo y extrae la raíz.

¿Cómo se extrae la raíz de una fracción mediante la descomposición en factores primos?

$$\sqrt[3]{\frac{216}{64}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^3}{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{2 \cdot 3}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

a) $\sqrt{\frac{169}{625}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{20736}{1296}}$

14. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}} \cdot \sqrt{\frac{16}{25}} =$

b) $\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{49}{36}} =$

c) $\sqrt[5]{\frac{192}{11}} \div \sqrt{\frac{36}{121}} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{9}{54}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} =$

e) $\sqrt{\frac{1}{20}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} =$

f) $\left[\sqrt{\frac{3}{5}} \times \frac{1}{6} \right]^2 \div \left(\frac{-5}{4} \right) =$

g) $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^6} - \sqrt{\sqrt{\frac{81}{16}}} =$

Trabajo colaborativo

15. Trabajen en parejas y resuelvan.

Elaboren ejercicios con términos faltantes en la potenciación y en la radicación, para que otra pareja los resuelva.

Actividad indagatoria

16. Investiga y ejemplifica, frente a tus compañeros y compañeras, por qué la propiedad distributiva en la potenciación y en la radicación no se cumple.

Tema 3

Números irracionales. Números reales y redondeo

Competencia comunicacional

El televisor es un aparato electrónico que sirve para recibir y reproducir las señales del sistema llamado televisión. A lo largo de la historia, ha ido evolucionando.

A los televisores se los identifica de acuerdo con la medida de la diagonal de su pantalla. Si un televisor tiene 15,2 pulgadas de largo y 11,4 pulgadas de ancho, ¿cuál es la medida de la diagonal de la pantalla?



La diagonal determina las pulgadas de un TV.

Interdisciplinariedad

Matemática y Geometría

Los números irracionales son muy importantes cuando se realizan cálculos geométricos.

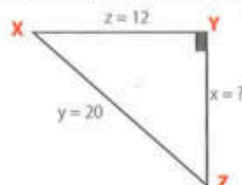
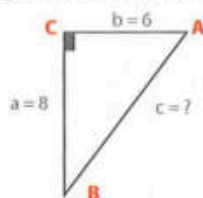
Por ejemplo el número pi π se utiliza para calcular áreas y volumen de formas circulares o esféricas.

Responde: ¿cuál es el valor de π ? ¿es un número racional o irracional?



Saberes previos

Aplica el teorema de Pitágoras para determinar los datos desconocidos.



A una pantalla de 19 pulgadas se le va a colocar un protector de 16 pulgadas de ancho y 13 pulgadas de altura. ¿Cuál es la medida exacta de su diagonal?

El protector de pantalla tiene una forma rectangular. Entre los lados que representan el largo, la altura y la diagonal se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la diagonal que buscamos. Por lo tanto, debemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$D = \sqrt{16^2 + 13^2}$$

$$D = \sqrt{256 + 169}$$

$$D = \sqrt{425}$$

El número 425 no es un cuadrado perfecto; por lo tanto, usamos una calculadora para obtener el valor exacto. En ella observamos que el resultado es:

$$D = 5\sqrt{17} = 20,615\ 528\ 13\dots$$

El número obtenido muestra un número decimal que no sigue un patrón; por lo tanto, no se puede convertir en fracción.

Un número irracional ($\mathbb{Q}'$) es aquel que no puede expresarse como el cociente exacto de dos números enteros.

Los números irracionales tienen cifras decimales que no se repiten periódicamente.

Ejemplo 1

Clasificar los números en: números enteros, racionales o irracionales.

- | | |
|-------------------|----------------------|
| a) 1,333... | b) $\sqrt[3]{17}$ |
| c) 2,236067977499 | d) $\sqrt[5]{32}$ e) |
| e) $2,4\hat{1}$ | f) $\sqrt{26}$ |

Solución

Enteros	$\sqrt[3]{32} = 2$
Racionales: se pueden convertir en fracción.	1,333... y $2,4\hat{1}$
Irracionales: no se puede obtener una fracción.	$\sqrt[3]{17}$ 2,236 067 977 499 $\sqrt{26}$

M.4.1.26. Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos.

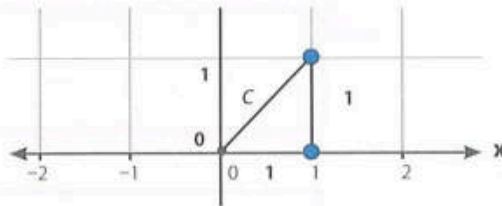
Representación de números irracionales en la recta numérica

Ejemplo 2

Representar $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ en la recta numérica.

Solución

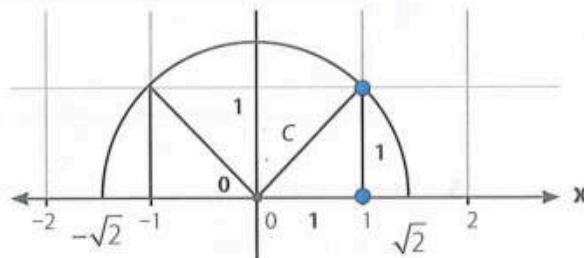
En la recta numérica ubicamos la unidad. Sobre el final de ella, levantamos una perpendicular de medida igual a la unidad y unimos los dos segmentos formando un triángulo rectángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras para obtener la medida de la hipotenusa.

$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} \quad c = \sqrt{2}$$

Tomamos un compás para trasladar la medida de la hipotenusa sobre la recta numérica. Lo obtenido a la derecha de 0 es $\sqrt{2}$, y lo marcado a la izquierda es $-\sqrt{2}$.



Conjunto de números reales

El conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales es el conjunto de los números reales.

Redondeo de números reales

Los números reales se redondean según la cifra propuesta. Si el número que precede a esa cifra es 5 o mayor a 5, se le suma 1. Caso contrario, se la mantiene.

Ejemplo 3

Redondear $\sqrt{3}$ a las centésimas.

Solución

Calculamos su valor en la calculadora: $\sqrt{3} = 1,732050808$. Como a 3 le sigue 2, y 2 no es igual ni mayor a 5, el redondeo es: $\sqrt{3} \approx 1,73$.



¿Sabías que?

Existen números irracionales famosos como pi:

$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 23\dots$

Número de Euler:

$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 2\dots$

La razón de oro:

$\varphi = 1,618\ 033\ 988\ 749\ 8\dots$

Algunas raíces cuadradas de números naturales son números irracionales.



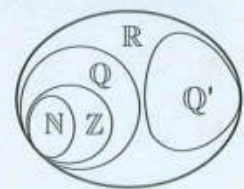
Competencia digital

Ingresa a: lynk.ec/9m02 y aprende a ubicar $\sqrt{11}$ en la recta numérica.



Recuerda que...

$$R = Q \cup Q'$$



LM.4.1.3.

1. Coloca $\mathbb{Q}$ si es un número racional y una $\mathbb{I}$ si es irracional.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) 1,33... | h) $\sqrt{3\,969}$ |
| b) 2,2360679... | i) $\sqrt{7}$ |
| c) $\frac{1}{119}$ | j) 0,455 55... |
| d) $\sqrt{101}$ | k) $\frac{1}{21}$ |
| e) 3,4231842318... | l) 1,234 523 45... |
| f) $\sqrt{225}$ | m) π |
| g) $-\sqrt{17}$ | n) $\sqrt{19}$ |

2. Escribe dos números irracionales comprendidos entre los pares de números indicados.

- 0 y 1
- $\sqrt{4}$ y $\frac{7}{3}$
- 1 y 1
- 8 y -8,1
- $\frac{2}{7}$ y $\frac{2}{5}$
- 1 010 y -1 010,56

3. Escribe los números enteros entre los que se encuentran las siguientes raíces.

- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{18}$
- $\sqrt{42}$
- $\sqrt{77}$
- $\sqrt[3]{30}$
- $\sqrt{70}$

4. Calcula la diagonal de las siguientes figuras; señala si el valor obtenido es un número racional o irracional.

- 

8 m
- 

3/2 cm

9 cm
- 

12,6 pulgadas

16,8 pulgadas
- 

9 mm

12 mm

5. Representa lo siguiente en la recta numérica. Trabaja en tu cuaderno.

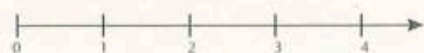
a) $\sqrt{5}$



b) $-\sqrt{13}$



c) $\sqrt{8}$



6. **Determina** el valor de números irracionales en la calculadora. **Escríbelos** con 6 cifras decimales. Luego **redondéalos** a las décimas.

a) $\sqrt{7} =$

b) $\sqrt{13} =$

c) $1 + \sqrt{11} =$

d) $\sqrt{21} - 4 =$

e) $\frac{5 - \sqrt{71}}{2} =$

f) $\sqrt{2} + \sqrt{3} =$

g) $\frac{\sqrt{5} - 7}{3} =$

h) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{3} =$

i) $\frac{\sqrt[3]{6} - 1}{2} =$

7. **Redondea** los números irracionales famosos a las centésimas, y **calcula** el valor de cada número irracional.

a) $2\pi = 2 \times \quad =$

b) $\frac{\pi}{4} = 0,25 \times \quad =$

c) $5,2e = 5,2 \times \quad =$

d) $8\varphi = 8 \times \quad =$

8. **Redondea** los números irracionales a las milésimas. Luego **coloca** los signos $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

a) $\frac{24}{7}$ $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{5}$ $\frac{7}{3}$

c) 3π $2\sqrt{9}$

d) $2,718$ $2e$

e) $1,12$ $\frac{3}{5}\varphi$

f) $\sqrt{7}$ $\frac{23}{11}$

g) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$

h) $-\sqrt{23}$ $-\sqrt[3]{96}$

i) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ $-\frac{\sqrt{17}}{4}$

9. **Ordena** en la forma indicada. **Toma** en cuenta un redondeo a las centésimas.

a) **Ascendente**

$$-1, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}\pi, -\frac{2}{3}, 5, 16, \sqrt{11}$$

b) **Descendente**

$$-\sqrt{15}; -\sqrt{27}; 3,001; \frac{\sqrt{51}}{2}; 1,002; -\frac{1}{4}\varphi$$

10. **Resuelve** el problema.

Las medidas de las pantallas de los televisores siempre están dadas en números naturales. ¿Es posible la existencia de un televisor cuyo largo sea 45,72 cm y su altura sea 25,4 cm? **Toma** en cuenta que una pulgada es igual a 2,54 cm. **Justifica** tu respuesta.

11. **Extrae** las raíces que sean posibles.

a) $\sqrt{48x^3}$

b) $\sqrt{128x^5y^2}$

c) $\sqrt[3]{40a^3b^4}$

d) $\sqrt[3]{972m^{11}n^5}$

Trabajo colaborativo

12. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Sobre la obtención de $\sqrt{2}$ en un triángulo rectángulo, **calculen** en forma consecutiva $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$.

Actividad indagatoria

13. **Investiga** en qué consiste la razón áurea. **Expón** en clase utilizando gráficos ilustrativos.

Puedes investigar en la siguiente página web:

lynk.ec/9m03

Adición y sustracción de números reales. Propiedades



Desequilibrio cognitivo

¿Es verdad que al restar 56,89 de $-\frac{455}{8}$, se obtiene 113,765?



Competencia de coches de madera. Se realiza durante las fiestas de Quito.

Durante las festividades de Quito se lleva a cabo la tradicional carrera de coches. Uno de los participantes requiere caucho para cubrir las cuatro llantas de su coche, que se muestran en la imagen. ¿Cuál es la longitud de caucho que necesita?

Para determinar la longitud total, debemos primero calcular el contorno de cada tipo de llanta, y luego sumar las cuatro medidas obtenidas.

Como las llantas son circulares, debemos calcular el perímetro de dos tipos de circunferencias, pues son iguales en diámetro de dos en dos.

La fórmula para calcular el perímetro es:

$$P = 2\pi r, \text{ donde}$$

r es el radio, el cual es la mitad del diámetro, y π se redondea a 3,14.

Por lo tanto:

Llanta pequeña

$$P = 2\pi(10 \text{ cm})$$

$$P = 2 \times 3,14 \times 10 \text{ cm}$$

$$P = 62,8 \text{ cm}$$

Llanta grande

$$P = 2\pi(12 \text{ cm})$$

$$P = 2 \times 3,14 \times 12 \text{ cm}$$

$$P = 75,36 \text{ cm}$$

$$L_{\text{total}} = 62,8 \text{ cm} + 62,8 \text{ cm} + 75,36 \text{ cm} + 75,36 \text{ cm}$$

$$L_{\text{total}} = 276,32 \text{ cm}$$

$$L_{\text{total}} = 2,7632 \text{ m}$$

Este resultado obtenido nos permite afirmar que el participante requiere aproximadamente 3 m de caucho.

Para sumar o restar números reales, se puede proceder de dos formas: una consiste en redondear los números decimales y sumar; y otra, en expresar la respuesta con los números irracionales.



Interculturalidad

Durante las fiestas de Quito, se realiza la carrera de coches de madera, una disciplina deportiva extrema que mezcla la tradición con la adrenalina. Esta carrera siempre se ha realizado en las calles del tradicional barrio San Juan, y en ella participan carros con ruedas de madera cubiertas con caucho.



Competencia socioemocional

Inicia y mantén conversaciones con tus compañeros; expresa tus pensamientos y sentimientos con claridad en tu comunicación verbal y no verbal.

Ejemplo 1

$$\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Solución

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{6}{3} = 2$$

M.4.1.27. Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales.

M.4.1.31. Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades.

Ejemplo 2

Expresar en forma exacta la cantidad de caucho que necesita el participante para las llantas de su coche.

Solución

Debemos calcular los perímetros en forma exacta. Esto es:

Rueda pequeña

$$P = 2\pi \times 10 \text{ cm}$$

$$P = 20\pi \text{ cm}$$

Rueda grande

$$P = 2\pi \times 12 \text{ cm}$$

$$P = 24\pi \text{ cm}$$

Luego sumamos el perímetro de las cuatro ruedas:

$$L_{\text{total}} = 20\pi(\text{cm}) + 20\pi(\text{cm}) + 24\pi(\text{cm}) + 24\pi(\text{cm})$$

$$L_{\text{total}} = 88\pi \text{ cm}$$

Sin embargo, esta respuesta para los fines indicados no resulta práctica. Por ello, se debe redondear el número irracional y obtener un valor que sea comprensible comercialmente.

Cuando los números irracionales que se suman o restan están expresados en radicales, es necesario observar si son semejantes.

Un radical es semejante a otro cuando el índice de la raíz y su radicando son iguales. A fin de conseguir radicales semejantes, se descomponen los radicandos en sus factores primos para extraer factores de la raíz, de acuerdo con las propiedades de la radicación. Para sumar o restar radicales semejantes, se suman o restan los coeficientes.

Ejemplo 3

$$\text{Efectuar: } -\sqrt{32} + \frac{1}{2} + \sqrt{50} - 0,75 + \sqrt{72} =$$

Solución

$$-\sqrt{2^4 \times 2} + 0,5 + \sqrt{5^2 \times 2} - 0,75 + \sqrt{6^2 \times 2} =$$

$$-2^2\sqrt{2} + 0,5 + 5\sqrt{2} - 0,75 + 6\sqrt{2} =$$

$$(-4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) + (0,5 - 0,75) =$$

$$7\sqrt{2} - 0,25 \text{ (valor exacto)}$$

$$= 9,65 \text{ (valor redondeado a las centésimas)}$$



Recuerda que...

Propiedades de la adición de números reales

Clausurativa

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b + c \in \mathbb{R}$$

Conmutativa

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$$

Asociativa

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

Modulativa

$$a, 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$$

Cancelativa

$$a, -a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (-a) = 0$$



¿Sabías que?

La suma de dos números irracionales no siempre es un número irracional; por ejemplo:

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0.$$

La suma de un número racional y un irracional siempre es un número irracional.

I.M.4.2.2.

Nota: para resolver estos ejercicios se sugiere emplear calculadora.

1. Redondea a las décimas y **efectúa** las operaciones.

a) $\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{5} =$

b) $\frac{5}{3} - \pi + 0,97 - \sqrt{7} =$

c) $2e + 2\frac{3}{4} - \sqrt{19} =$

d) $\sqrt{8} - \sqrt[3]{2} + 5,678 - \frac{16}{7} =$

e) $\sqrt{5} + 0,3 - \frac{2}{3}$

f) $\frac{2}{5} - 0,4 + 0,1$

g) $\frac{3}{5} - \sqrt{3} + \frac{3}{4}$

h) $3\frac{1}{3} + 0,48 + 1,26$

2. Completa en tu cuaderno la tabla y **escribe** los resultados.

+	$4\sqrt{5}$	0,5	3	-3π
0,3...				
$-\sqrt{17}$				
π				
0,71				
-2				

-	-1,94	$-\sqrt{53}$	18	$\frac{4}{3}$
0,7				
$-\frac{5}{4}$				
$\sqrt{3}$				
23				

3. Escribe la propiedad aplicada en cada ejercicio dado.

a) $\sqrt{5} + 0 = \sqrt{5}$

b) $0,1 \cdot \frac{1}{4} = 0,025$

c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

d) $3(\sqrt{2} + 1) = 3\sqrt{2} + 3$

e) $\sqrt{12} + 3 = 3 + \sqrt{12}$

f) $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)$

4. Expresa la respuesta como número irracional.

a) $-14 + \frac{2}{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

b) $0,172 - \frac{3}{2} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{15} =$

c) $-\sqrt{5} + 20,8 + e - \frac{188}{9} =$

d) $-1,25 + \frac{7}{2} - 4\pi + 5 - \sqrt{2} =$

e) $\sqrt[3]{32} + \sqrt{243} - \sqrt{2} + 4\sqrt[3]{3} =$

5. Realiza las siguientes restas. Redondea el resultado a las milésimas.

a) De 500,17 restar 13π

b) Restar $-3\sqrt{2}$ de $-\frac{3}{5}$

c) De $-\frac{26}{3}$ restar $\sqrt{43}$

d) Restar 3 de $\sqrt{5}$

e) Restar $9\sqrt{3}$ de $\sqrt{6}$

f) De $\frac{\sqrt{7}}{3}$ restar $2\sqrt{8}$

g) De $\frac{\sqrt{2}+1}{7}$ restar $-5\sqrt{7}$

6. Transforma a radicales semejantes. Luego, efectúa las operaciones.

a) $\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{128}$

b) $-\sqrt{27} + 2\sqrt{243} - \sqrt{2187}$

c) $2\sqrt{20} - 7\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

d) $-3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{486}$

e) $7\sqrt{288} - 2\sqrt{648} + 3\sqrt{50} - \sqrt{98}$

f) $\sqrt{5} - \sqrt{45} + 3\sqrt{80} + 7\sqrt{20}$

g) $3\sqrt{6} - 5\sqrt{24} + 5\sqrt{96} - 2\sqrt{150}$

h) $-4\sqrt{28} - 5\sqrt{28} + 15\sqrt{63} - 3\sqrt{175}$

i) $5\sqrt{75} - 2\sqrt{8} + 16\sqrt{50} - 13\sqrt{27}$

7. Resuelve los polinomios aritméticos; expresa la respuesta en forma exacta.

a) $- \left(1,6 \sqrt{7} - \left\{ 10e \times \frac{2}{5} + 4\sqrt{28} \right\} \div \frac{1}{4} \right)$

b) $-2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \left[1,8 \div \frac{5}{3} - 1 \right] \right) - \pi \right\}$

c) $3\sqrt{8} - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - (\sqrt{27} + \sqrt{32}) - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{50} \right\}$

d) $\sqrt[3]{24} - \left[\frac{\sqrt[3]{16}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3}}{3} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} \right]$

Trabajo colaborativo

8. Trabajen en parejas y resuelvan.

Ejemplifiquen las propiedades de la suma de números irracionales.



Actividad indagatoria

9. Acude a la biblioteca e investiga por qué en la resta no se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa. Justifica con ejemplos la explicación que presentes en la clase.

Usa el siguiente enlace web:

lynk.ec/9m04



Saberes previos

Realiza las operaciones.

a) $12,74(-10)$ b) $\frac{65}{2} \times 0,6$ c) $16 \div \left(-\frac{4}{3}\right)$ d) $-\frac{7}{10} \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{21}$

Si un *gigabyte* tiene 1 000 *megabytes*, ¿cuál es la capacidad de almacenamiento expresado en megabytes de las memorias flash de la imagen?

Para realizar el cálculo, debemos multiplicar.

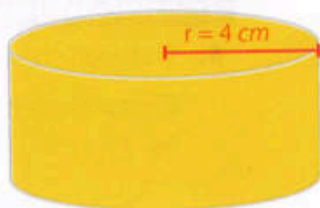
Memoria flash: I

$$3 \times 1\,000 = 3\,000 \text{ megabytes}$$

Memoria flash: II

$$32 \times 1\,000 = 32\,000 \text{ megabytes}$$

Los *flash memories* se deben guardar en una caja cilíndrica como se muestra en la figura. ¿Cuál es la superficie de la base de la caja?



Para conocer la superficie de la caja, es necesario obtener el área del círculo.

$$A_o = \pi \times r^2$$

$$A_o = 3,14 \times 4^2$$

$$A_o = 3,14 \times 16$$

$$A_o = 50,24 \text{ cm}^2$$

Cuando los números reales que se multiplicarán o dividirán son números irracionales, debemos redondearlos.

Si los factores son números irracionales en radicales del mismo índice, se aplica las propiedades de la multiplicación con radicales.

Ejemplo 1

Multiplicar $3,2 \times \pi$.

Solución

Redondeamos π a centésimos.

$$3,2 \times 3,14 = 10,048$$

Ejemplo 2

Multiplicar $\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10} \times \sqrt{2}$

Solución

$$= \sqrt{(6)(3)(10)(2)}$$

$$= \sqrt{360}$$

$$= 6\sqrt{10}$$

Competencia matemática

Las unidades de almacenamiento de información han evolucionado: primero estuvieron los discos flexibles de 5 ¼ pulgadas y 3 ½ pulgadas; luego aparecieron los CD y DVD, que fueron reemplazados por la memoria flash.

Indaga y responde:
¿por qué en la actualidad se puede prescindir de estos dispositivos?

M.4.1.31. Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades.
M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Ejemplo 3

$$\sqrt[3]{-4} (2\pi) (-\sqrt{5}) (0,2) (\sqrt[3]{2}) (\sqrt{5})$$

Solución

Multiplicamos radicales semejantes entre sí.

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{-4} (\sqrt[3]{2}) (-\sqrt{5}) (\sqrt{5}) (2\pi) (0,2) \\ &= (\sqrt[3]{-8}) (-\sqrt{25}) (0,4\pi) \\ &= -2 (-5) (0,4\pi) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$\sqrt{512} \div \sqrt{8}$$

Solución

Aplicamos la propiedad recolectiva.

$$\begin{aligned} &= \sqrt{512 \div 8} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$



Recuerda que...

- El orden de resolución en un polinomio aritmético es:
 1. Potencias y raíces;
 2. Multiplicaciones y divisiones;
 3. Sumas y restas.
- Todo número real multiplicado por cero es igual a cero.

Propiedades de la multiplicación de números reales

Propiedad	Expresión algebraica
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a \times b = c; \quad c \in \mathbb{R}$
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a \times b = b \times a$
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c$
Elemento neutro	Si $a, 1 \in \mathbb{R}$ $a \times 1 = 1 \times a = a$
Inverso multiplicativo	Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ $a \times \frac{1}{a} = 1$
Distributiva	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a + b) \times c = ac + bc$



DFA

Si hay una discapacidad o dificultades visuales, es necesario ayudarnos unos a otros, ya sea con una explicación de los sucesos visuales o con un resumen de lo que sucede alrededor.



Interculturalidad

A pesar de que, desde 1974, el Ecuador adoptó las medidas del Sistema Internacional, en la cultura popular aún se usan otras unidades de medida de longitud como la cuadra o la vara.

I.M.4.2.2.

1. Realiza la operación indicada.

a) $-\frac{4}{6} \times 0,4$

b) $\sqrt{27} \div \sqrt{3}$

c) $8\pi + 2$

d) $13e \times 12,5$

e) $2\phi \times 7\phi$

f) $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{216}$

g) $-16\pi + 8\pi$

h) $\sqrt{72} \div \sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

i) $(\sqrt{27})(\sqrt{-49})(\sqrt[3]{-32})(\sqrt[3]{7})(\sqrt{3})$

2. Determina el factor que hace posible la igualdad.

a) $\sqrt{100} \times \quad = 10$

b) $\quad \times 4 = -28\pi$

c) $25\pi \times \quad = 12,5$

d) $-6\sqrt{18} \times \quad = 12$

e) $\quad \times \left(\frac{15}{44}\right)^{-1} = -1,3$

f) $\sqrt{8} \times \quad \times \sqrt{20} = -20\sqrt{2}$

g) $\sqrt{10} \times \quad = 4\sqrt{10}$

h) $\quad \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} = -6$

3. Selecciona la respuesta correcta para cada operación.

a) $\sqrt{5ab}(\sqrt{5a} + \sqrt{20b})$

A) $5a^2b + 10ab^2$

B) $\sqrt{5a^2b} + 10ab^2$

C) $\sqrt{5a^2b} + 10ab^2$

b) $12xy^2\left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^3\right)\left(\frac{\sqrt{27}}{4}y\right)$

A) $9x^3y^2$

B) $3x^4y^3$

C) $3\sqrt{3}x^4y^3$

4. Redondea a las décimas los números irracionales y calcula el resultado; emplea una calculadora.

a) $\sqrt[3]{53} \div \pi$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0,4$

b) $\sqrt{71} \times \frac{5}{7}$

g) $\frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}$

c) $-\frac{13}{15} + \sqrt{13}$

h) $\frac{\sqrt{7}}{2} \times 0,2 \div \frac{4}{7}$

d) $-\frac{3}{2}\pi \times \sqrt{2}$

i) $\frac{\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{6}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

e) $\sqrt[3]{24} \times 0,3$

j) $\frac{\frac{\sqrt[3]{16}}{4} \times 0,12}{\frac{\sqrt[3]{32}}{8} \div \frac{4}{3}}$

5. Escribe la propiedad que se aplica en cada caso.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 1$

b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$c) \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{3} (\sqrt{5} \times \sqrt{6})$$

$$d) \sqrt{2} (\sqrt{5} + 3\sqrt{7}) = \sqrt{10} + 3\sqrt{14}$$

$$e) \sqrt{54} \times \sqrt{12} = 18\sqrt{2}$$

6. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

$$1. (\sqrt{\sqrt{2}})^{-4} - \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$2. 0,5 + 1,22... - \left(0,33... + \frac{2}{9}\right)^{-1} = -\frac{7}{9}$$

$$3. \left(\frac{3}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi\right) \times \left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1} \times \sqrt{\frac{25}{16\pi^4}}\right) = \frac{1}{4}$$

$$4. \sqrt{27} + 5\sqrt{128} - \sqrt{243} + 4\sqrt{200} = 80\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

a) 3 y 4

b) 1 y 3

c) 1 y 2

d) 2 y 4

7. Aplica la propiedad distributiva y encuentra el valor exacto de la operación.

$$a) (\sqrt{50} - \sqrt{72} + \sqrt{98}) \div \sqrt{2} =$$

$$b) (16\pi - 28e - 56\pi) \div 4 =$$

8. Resuelve los siguientes polinomios aritméticos.

$$a) -3 \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \div \sqrt{2} + \frac{4}{5} \times \sqrt{125}$$

$$b) \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-32} \div \sqrt{25} - 6^2 \times \frac{7}{12} - 1,3$$

$$c) \sqrt{7} \times \sqrt{14} - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi \times \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$d) -\sqrt{13} - \left\{1,2^2 + [8\sqrt{2} - 6\sqrt{8}] - (\sqrt{338} - \sqrt{162}) + \sqrt{2}\right\}$$

$$e) \frac{e}{\pi} \times \sqrt{2} - \left\{\left(\frac{\pi}{e}\right)^{-2} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{e} + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - \left(4 + \frac{1}{4}\right)^{-1} \times \frac{17}{2}\right\} + \frac{9}{2} =$$

9. Encuentra la solución de las operaciones combinadas.

$$a) \left(\frac{9}{8}\right)^{-1} \div 0,66... - \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 2,33... \times \left(-\frac{3}{4}\right) - 0,11... \right]$$

$$b) \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 0,25 \times (1,66...) \div (-3)^{-1} + (-1,75 - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$c) \sqrt{(\sqrt[3]{8})^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \sqrt[3]{2^{-1} + \sqrt{16}} + (\sqrt{\sqrt{3}})^{-4}$$

$$d) \sqrt{\sqrt{\sqrt{(-4)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}}}$$

$$e) \frac{1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(0,5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^3}{\frac{1}{4} + 1^{-1} - 0,25 - (1 - 0,25)^2}$$

10. Resuelve el siguiente problema.

Para sostener un poste de 7 metros de altura, se usará un cable tensor que se ubicará desde la parte alta del poste hasta un punto en el piso. De la base del poste al punto del piso hay 3 metros. Si el costo por metro de cable es de \$ 3,25, ¿qué valor aproximado se necesita para comprar el cable?

Trabajo colaborativo

11. Trabajen en parejas y resuelvan.

Formulen un polinomio aritmético con signos de agrupación. El polinomio debe contener las cuatro operaciones. Intercambien con otra pareja para que resuelva.

Actividad indagatoria

12. Investiga otras propiedades de la división y expón en clases con ejemplos.



Desequilibrio cognitivo

¿Cómo organizarías en tres grupos de igual número de elementos los siguientes datos? **Justifica** bajo qué criterio los agrupaste.

104 210 150 225 136 230 175 145 190



Es importante dejar de consumir energía eléctrica excesivamente. Ahorrar es un beneficio para ti y para el planeta.

El grupo de datos mostrados a continuación corresponde a los kilovatios hora de consumo eléctrico de los habitantes de un conjunto habitacional.

80 76 70 92 68 75 69 75 74 82
86 74 68 72 76 88 84 80 73 78

Competencia comunicacional

El francés Léon Foucault desarrolló la lámpara de arco en 1840. Con este tipo de artefactos se realizó el alumbrado exterior en las calles. Posteriormente, fue Thomas Edison quien encendió la primera lámpara con filamento de carbono en Nueva York, el 27 de octubre de 1879. Esta se mantuvo en funcionamiento continuo durante dos días.

Indaga sobre Thomas Edison y confecciona una ficha bibliográfica.

¿Cómo podemos organizar los datos?

Los datos pueden ser organizados en tablas de frecuencia de una manera desagrupada o agrupada.

En este caso, lo haremos en forma agrupada.

Rango R: es el valor que se obtiene al restar el menor valor de los datos del mayor valor.

Número de intervalos K: es el número de subgrupos que se conformarán dentro del grupo de datos. Se calcula con la fórmula de Sturges, ingresando los datos en la calculadora.

$$K = 1 + 3,322 \log(N),$$

donde N representa el número de datos.

Amplitud A: es el número de datos que contendrá cada intervalo de clase. Se calcula dividiendo el rango para el número de intervalos.

Marca de clase: es el valor medio de cada intervalo.

Ahora, calculamos los valores mencionados antes de armar la tabla.

$$R = 92 - 68; R = 24; K = 1 + 3,322 \log(20); K = 5,32; K \approx 5$$

Es recomendable redondear al menor valor entero, de preferencia impar.

$$A = \frac{R}{K}; A = \frac{24}{5}; A = 4,8; A \approx 5$$

M.4.3.2. Organizar datos no agrupados (máximo 20) y datos agrupados (máximo 50) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos.

Construimos la tabla que contendrá cinco intervalos de cinco datos cada uno.

En la tabla constará la marca de clase x , la frecuencia absoluta f_i , la frecuencia absoluta acumulada F_i , la frecuencia relativa f_r y la frecuencia relativa acumulada F_r .

Tabla de frecuencias del consumo eléctrico					
Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
[68 – 73)	70,5	5	5	0,25	0,25
[73 – 78)	75,5	7	12	0,35	0,60
[78 – 83)	80,5	4	16	0,2	0,80
[83 – 88)	85,5	2	18	0,1	0,90
[88 – 92]	90,5	2	20	0,1	1,00
93		20		1,00	

Para formar los intervalos, escribimos en el primer casillero el menor número de los datos, en este caso 68 y le sumamos 5. Para el siguiente intervalo, tomamos el último valor del primer intervalo, en este caso 73 y le sumamos 5. Repetimos el proceso hasta obtener el quinto intervalo el cual contiene el mayor valor de los datos, es decir, 92.

Luego, calculamos x . Para ello en cada intervalo sumamos el valor inferior con el valor superior y lo dividimos entre 2.

Ejemplo

Tabla de distribución de frecuencias agrupadas en diez intervalos para la distancia recorrida durante el test YoYo de recuperación intermitente nivel 1 en 35 jugadores de fútbol.

Tabla de frecuencias de distancia recorrida test YoYo				
Distancia recorrida	f_i	f_r	F_i	F_r
[1 240 – 1 440)	2	0,06	2	0,06
[1 440 – 1 640)	5	0,14	7	0,20
[1 640 – 1 840)	2	0,06	9	0,26
[1 840 – 2 040)	6	0,17	15	0,43
[2 040 – 2 240)	2	0,06	17	0,49
[2 240 – 2 440)	3	0,09	20	0,57
[2 440 – 2 640)	3	0,09	23	0,66
[2 640 – 2 840)	4	0,11	27	0,77
[2 840 – 3 040)	4	0,11	31	0,89
[3 040 – 3 240)	4	0,11	35	1,00

Tabla de distribución de frecuencias agrupadas en diez intervalos para la distancia recorrida durante el test YoYo de recuperación intermitente nivel 1 en 35 jugadores de fútbol.



Recuerda que...

- Para definir los intervalos se usan corchetes y paréntesis. El corchete indica que el valor es incluido, y el paréntesis indica que el dato es excluido.
- A la columna de f_i la formamos con el conteo de los datos. La columna de F_i se forma al sumar cada F_i con la f_i siguiente.
- A la columna de f_r la obtenemos al dividir cada f_i para N . Y la columna de F_r se obtiene al sumar cada F_i con la f_i siguiente.

LM.4.7.1.

1. Relaciona cada concepto con su cálculo.

1	Marca de clase	a	$x = \frac{V_i + V_{i+1}}{2}$
2	Amplitud	b	$K = 1 + 3,322 \log N$
3	Número de intervalos	c	$R = V_{mayor} - V_{menor}$
4	Rango	d	$A = \frac{R}{K}$

2. Utiliza la calculadora para determinar el número de intervalos en cada caso, usando la fórmula de Sturges.

- a) $N = 25$
- b) $N = 16$
- c) $N = 50$
- d) $N = 100$
- e) $N = 30$
- f) $N = 75$
- g) $N = 40$
- h) $N = 45$

3. Analiza la tabla y completa.

- a) Edades de los jóvenes del grupo Alfa

Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
[12 - 14)	13	8	8	0,3	0,3
[14 - 16)	15	5	13	0,2	0,5
[16 - 18)	17	12	25	0,4	0,9
[18 - 20)	19	2	27	0,1	1

Número de datos:

Número de intervalos:

Amplitud del intervalo:

- b) Estaturas de un grupo de mujeres

Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
[155 - 160)	157,5	20	20	0,57	0,57
[160 - 165)	162,5	10	30	0,29	0,86
[165 - 170]	162,5	5	35	0,14	1

Número de datos:

Número de intervalos:

Amplitud del intervalo:

4. Completa en tu cuaderno las tablas de frecuencia y responde a las preguntas.

- a) Número de años que vive en la capital un grupo de migrantes

Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
[1 - 5)		20			
[5 - 9)		15			
[9 - 13)		12			
[13 - 17)		25			
[17 - 20]		30			
Total					

- A) ¿Cuántos migrantes viven en la capital entre 1 y nueve años?
- B) ¿Qué porcentaje de migrantes viven entre 13 y 17 años?
- C) ¿Qué porcentaje de migrantes viven entre 1 y 17 años?
- D) ¿Cuántos migrantes han permanecido menos de 13 años en la ciudad?

- b) Inventario de calzado deportivo del almacén Súper Deporte

Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
[20 - 23)		40			
[23 - 26)		38			
[26 - 29)		50			
[29 - 32)		20			
[32 - 35)		30			
[35 - 38)		32			
[38 - 41]		10			
Total					

- c) Número de vacunas existentes en un grupo de unidades médicas

[20 - 32)	7
[32 - 44)	2
[44 - 56)	8
[56 - 68)	5
[68 - 80]	6
Total	28

- B)** ¿Cuántas unidades médicas tienen menos de 44 vacunas?

- ¿Una frecuencia absoluta puede ser mayor que uno?
- ¿Una frecuencia relativa puede ser mayor que uno?

a) Los datos corresponden al número de vacunas que se han reportado en existencia en un grupo de unidades médicas.

50 65 52 80 20 36 75
30 45 60 54 25 48 80
62 30 50 28 70 62 55
45 35 80 25 75 20 65

Estrategias: hacer un gráfico

Problema resuelto

La parte central de un parque tiene la forma de un hexágono regular, cuyo lado mide 10 metros. A este espacio se le colocará cerámica.

¿Cuántos metros de cerámica se requiere?

1. Comprender el problema

¿Qué forma tiene el terreno?

Forma hexagonal

¿Cuánto mide el lado del terreno?

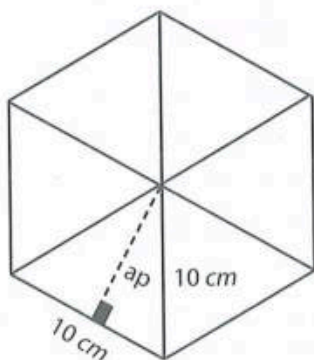
10 metros

¿Qué necesitamos conocer para calcular el área indicada?

2. Fijar una estrategia

Realizar un gráfico ilustrativo y recordar que en un hexágono regular la medida de un lado es igual a la medida del radio del círculo que lo circunscribe.

3. Aplicar la estrategia



$$ap = \sqrt{(10 \text{ m})^2 - (5 \text{ m})^2}$$

$$ap = \sqrt{100 \text{ m}^2 - 25 \text{ m}^2}$$

$$ap = \sqrt{75 \text{ m}^2}$$

$$ap = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$A = \frac{P \times ap}{2}; A = \frac{60 \text{ m} \times 5\sqrt{3}}{2}; A = 150\sqrt{3} \text{ m}^2$$

4. Expresar la respuesta

Exactamente se requieren $150\sqrt{3} \text{ m}^2$ de cerámica.

Problema resuelto

Franklin ha diseñado un panel de abejas de madera para que los niños coloquen sus lápices de colores.

¿Cuál es el área exacta que dispondrá cada niño si el lado de cada celda mide 6 cm?

1. Comprender el problema

¿Qué forma tienen las celdas del panel de abejas?

Forma hexagonal

¿Cuánto mide el lado de cada celda?

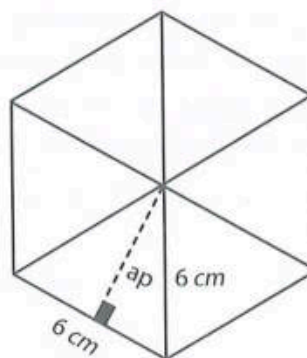
6 cm

¿Qué necesitamos conocer para calcular el área de cada celda?

2. Fijar una estrategia

Realizar un gráfico de una de las celdas, donde colocaremos los datos conocidos.

3. Aplicar la estrategia



$$ap = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2}$$

$$ap = \sqrt{36 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2}$$

$$ap = \sqrt{27 \text{ cm}^2}$$

$$ap = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \times ap}{2}; A = \frac{36 \text{ cm} \times 3\sqrt{3}}{2}; A = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

4. Expresar la respuesta

El área exacta de la que dispone cada niño es de $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Problemas propuestos

1. Luis quiere dividir un terreno cuadrangular en dos partes iguales atravesando una cuerda para formar una diagonal. Si el terreno tiene una superficie de 144 m^2 , ¿cuánto tiene que medir la cuerda?

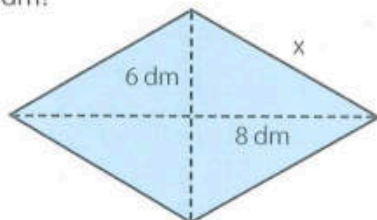
- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

2. Durante las horas de arte, Martina y Valentina hacen un mural en forma de trapecio y desean colocar una cinta decorativa en el borde. Si el trapecio tiene las siguientes medidas, ¿cuántos metros de cinta necesitan?



- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

3. David dispone de varias mesas de forma romboidal con las medidas de la figura. ¿Cuántas mesas necesitará para que juntas tengan un perímetro de 80 dm ?



- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

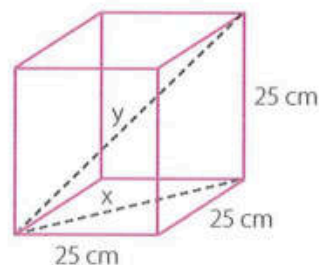
4. Gabriela elaborará 12 cometas de forma hexagonal, cuyos lados miden 28 cm . ¿Qué cantidad de papel necesita para elaborarlas?

- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

5. En un colegio quieren hacer una mesa de picnic con base hexagonal. ¿Cuál es el área que ocupará esta mesa si cada lado mide 60 cm ?

- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

6. Abigail tiene una regla de 40 cm y desea guardarla en una caja de 25 cm de lado. Calcula la diagonal de la caja y determina si cabe o no la regla en ella.



- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

Desafíos matemáticos

1. Una familia de seis personas va al cine y se sientan todos juntos en una fila. A la salida, hacen amistad con la administradora y esta les dice que les dejará entrar gratis el día que hayan completado todas las posiciones posibles entre ellos, es decir, cuando se hayan sentado en las mismas seis butacas, ocupando cada vez una posición distinta cada persona.

La familia va una vez por semana. ¿Cuántas semanas tendrán que transcurrir para que puedan entrar gratis al cine?

2. Un hipotético caminante se dispone a dar la vuelta al mundo (naturalmente, a pie), siguiendo la línea ecuatorial. Se supone que esta persona puede caminar tranquilamente sobre las aguas, sobrevolar valles y perforar montañas, con el objeto de que su trayectoria sea horizontal.

La longitud total de la línea Ecuador es 40 000 kilómetros. La estatura del caminante es 1,75 metros. ¿Qué distancia recorrerá la cabeza en relación con los pies?

Para encontrar un valor exacto, debes tomar papel y lápiz y hacer el cálculo. Pero en este caso darás una respuesta intuitiva, por lo que dispones de un minuto para seleccionar entre las siguientes respuestas:

a) 410 km

b) 175 m

c) 1 750 km

d) 11 m

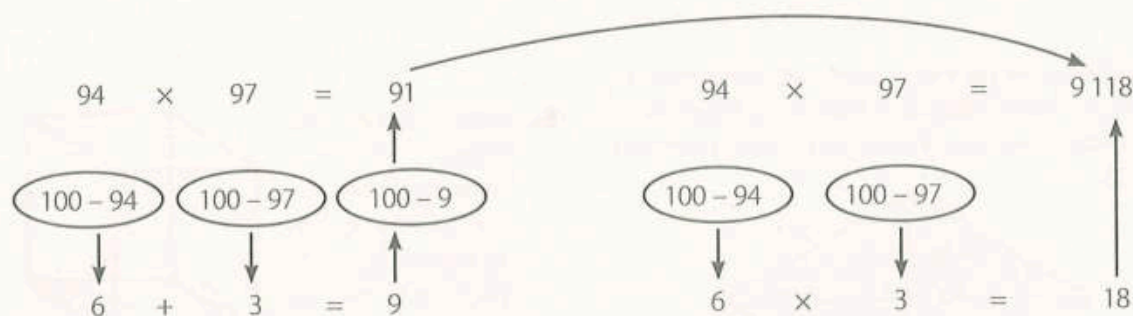
e) 17 cm

f) 17 km



Cálculo mental

Multiplicar números de dos cifras con el 9 en las decenas



Ahora, hazlo tú.

1. $93 \times 97 =$

2. $91 \times 94 =$

3. $96 \times 92 =$

4. $95 \times 99 =$

5. $98 \times 92 =$

6. $97 \times 98 =$

7. $96 \times 98 =$

8. $94 \times 93 =$

9. $93 \times 96 =$

10. $95 \times 97 =$

11. $96 \times 95 =$

12. $99 \times 97 =$

Medidas de prevención de accidentes

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Ciudadanía

Justificación / problemática

La ciencia ha contribuido para que los medios de transporte alcancen niveles que faciliten nuestra necesidad de trasladarnos de un lugar a otro. Las velocidades con las que nos movilizan autos, buses, aviones y barcos nos permiten ahorrar tiempo y esfuerzo.

Mientras esto sucede, es necesario que nos modernicemos también en medidas de seguridad que eviten la ocurrencia de accidentes.

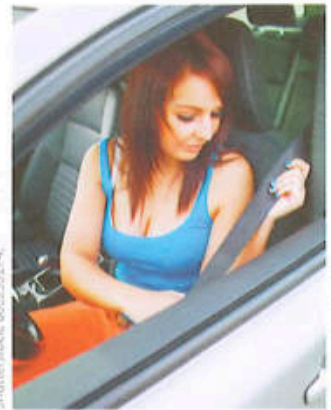
Nuestra posición como peatones debe ser de prudencia y de respeto al cruzar calles y avenidas. Si vamos dentro de un medio de transporte, también debemos cumplir con las medidas de seguridad reglamentarias.



El transporte aéreo es uno de los más recientes modos de transporte. A diferencia de otros, no necesita una superficie para efectuar su trayecto; solo para despegar y aterrizar.



Vista del cruce de las avenidas 10 de Agosto, Francisco de Orellana y Eloy Alfaro en la zona norte de la ciudad de Quito.



El uso del cinturón de seguridad es obligatorio para todos los pasajeros, no solo para quien conduce.

Objetivo

Organizar información relevante de la sociedad para informar y prevenir accidentes.

Recursos

- Cartulinas
- Marcadores
- Imágenes

Actividades

- **Elaboren** carteles con las medidas preventivas que se debe tomar en el transporte escolar.
- **Investiguen** el número de accidentes que se han producido en su localidad, cada mes durante el último año.



Evaluación

1. **Organicen** la información en tablas de frecuencia con datos agrupados.
2. **Exhiban** la tabla de frecuencias en lugares estratégicos de la institución, para que la comunidad educativa se informe. A la par, **coloquen** sus carteles con las medidas preventivas. **Consideren** como lugares estratégicos la zona del transporte escolar y los mismos buses.

Tema: La estadística en el deporte

Medidas de tendencia central

Situación cotidiana

El deporte es una práctica saludable en nuestras vidas. Los entrenadores de las diferentes disciplinas deben tener claro el avance de cada uno de sus estudiantes para definir las representaciones escolares.



Wilson es el entrenador de natación del colegio y debe seleccionar a sus dos mejores deportistas, para representar a la institución educativa en las olimpiadas nacionales, categoría damas. Para ello, registra los tiempos que establece cada una de las cuatro deportistas que tiene a su cargo, en 6 pruebas de 50 metros libres.

Se obtienen los siguientes resultados:

Estudiante	T1	T2	T3	T4	T5	T6
Martina	44	31	46	35	37	43
Rafaela	33	32	33	31	32	32
Camila	32	37	32	35	32	32
Mía	32	33	32	32	32	33

¿Cuáles serían las dos estudiantes seleccionadas?

Reflexiona

- A simple vista, ¿cuál es la primera seleccionada?
- Comprueba la respuesta.
- ¿Qué medida nos ayuda a determinar las dos estudiantes?
- ¿Hubieras podido sacar la segunda mejor deportista a simple vista? ¿Crees que la mediana es la mejor medida para determinar?

Resuelve la situación

- Las estaturas (en centímetros) de los seis integrantes del equipo de básquet de un grado de secundaria de una institución educativa, son las siguientes: 143, 144, 146, 148, 149, 128. ¿Cuál es la estatura representativa del equipo de básquet?



Tema: Una alimentación saludable

Operaciones con números racionales

Situación cotidiana

La alimentación saludable es necesaria para mantener una buena salud; es preciso que nuestros alimentos aporten con energía y nutrientes de manera equilibrada. Para esto, es importante conocer las cantidades exactas al momento de preparar una receta.



María prepara un plato exquisito para su familia.

Estofado de pollo

Ingredientes (Para 4 personas)

1 $\frac{3}{4}$ de tazas de arroz

$\frac{1}{2}$ taza de zanahoria picada

1 cebolla

$\frac{1}{2}$ taza de agua

1 rama de apio

$\frac{1}{4}$ de taza de aceite vegetal, sal, pimienta, hongos, laurel al gusto.

$\frac{1}{2}$ kg de pollo

$\frac{1}{2}$ taza de arvejas

$\frac{1}{2}$ taza de papa picada

1 tomate

Si María tiene que preparar esta receta para 3 y para 7 personas, ¿qué cantidad de ingredientes necesita poner para cada grupo?

Reflexiona

- ¿Qué ocurre con la cantidad de ingredientes?
- Comprueba la respuesta.

Ingredientes	3 personas	7 personas
1 $\frac{3}{4}$ de tazas de arroz		
$\frac{1}{2}$ kg de pollo		
$\frac{1}{2}$ taza de zanahoria picada		
1 tomate		
1 cebolla		

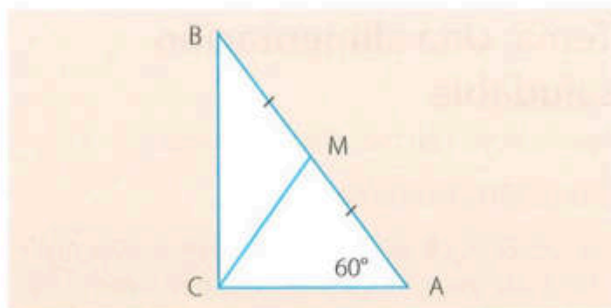
Ingredientes	3 personas	7 personas
$\frac{1}{2}$ taza de arvejas		
1 taza de papa picada		
$\frac{1}{2}$ taza de agua		
$\frac{1}{4}$ de taza de aceite vegetal		
1 rama de apio		

- ¿Qué ocurre con la cantidad de ingredientes si fuera para una persona?

Resuelve la situación

- Los ingredientes para un pastel son: 1 taza de mantequilla, 3 huevos, 1 $\frac{1}{2}$ tazas de azúcar y 2 tazas de harina. Si solo tenemos 2 huevos, ¿cómo debemos modificar los ingredientes restantes de la receta para poder preparar el postre?

1. ABC es un triángulo rectángulo; M es el punto medio de la hipotenusa AB y $\angle BAC = 60^\circ$. Entonces, $\angle BMC$ es igual a:

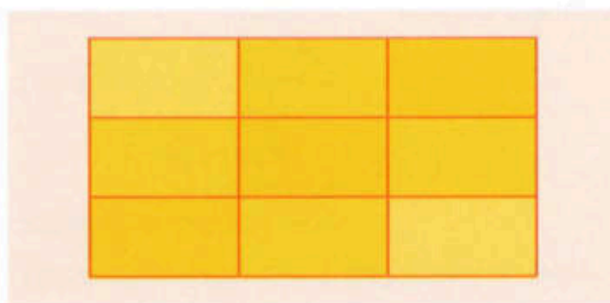


Argumenta la solución.

2. El peso promedio de un grupo de 4 personas es 80 kg. Si se agrega una persona más al grupo, el peso promedio es 80,2 kg. ¿Cuánto pesa la persona que se agregó al grupo?

Argumenta la solución.

3. Observa el diseño y responde: ¿cuál es la mayor cantidad de rectángulos que puedes contar?



Argumenta la solución.

4. Danilo quiere comprar caramelos. Si comprara 5 caramelos le sobrarían 10 centavos, mientras que para comprar 7 caramelos tendría que pedir prestados 22 centavos. Si sabemos que todos los caramelos cuestan lo mismo, ¿cuánto cuesta cada caramelo?

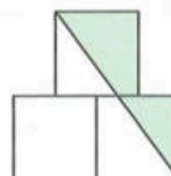
Argumenta la solución.

5. En un edificio se numeraron todas las puertas de las oficinas utilizando placas que contenían un dígito cada una (por ejemplo, al numerar la 10.^a puerta se usaron dos placas, una con el número 1 y otra con el 0). Si en total se utilizaron 35 placas, ¿cuántas puertas hay?



6. Un pedazo de papel tiene forma de octágono regular. ¿Cuál es el número máximo de veces que puede doblarse este papel de tal manera que en cada doblez las piezas dobladas empalmen perfectamente una sobre la otra?

7. En el diagrama, el centro del cuadrado superior está directamente sobre el vértice común de los dos cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de longitud 1 cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

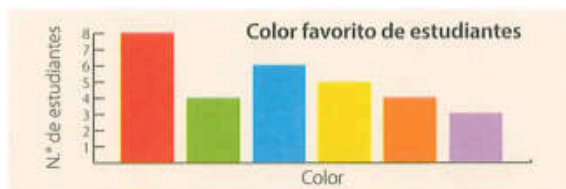


Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Observa el gráfico y responde:

¿Cuál es el porcentaje de los estudiantes que prefieren el color azul?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 10 % c) 20 %
b) 16 % d) 30 %

2. Lee y analiza.

Verónica demoró $\frac{3}{4}$ de hora en resolver un problema de matemática, mientras que Rosa demoró $\frac{1}{2}$ del tiempo que demoró Verónica. ¿Qué fracción de hora demoró Rosa en resolver el examen?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{8}$

3. Lee y analiza.

La mitad de la cuarta parte de 100 es:

Escoge la respuesta correcta.

- a) 50 c) 12,5
b) 25 d) 75

4. Lee y analiza.

Ana gana mensualmente \$ 2 400. Sus gastos y los de su familia son: en alimentación, \$ 600; vestimenta, \$ 300; servicios básicos, \$ 120; educación, \$ 900; recreación de la familia, \$ 120, y el resto lo ahorra.

¿Qué parte destina para alimentación?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{3}{12}$ c) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{6}{12}$ d) $\frac{1}{4}$

5. Lee y analiza.

¿Qué fracción de su sueldo ahorra Ana?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{3}{24}$

6. Lee y analiza.

La alfombra que se muestra en la figura ha sido confeccionada con cuadrados pequeños de $\frac{3}{5}$ m de longitud. ¿Cuál es el área que cubre esta alfombra?



Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{108}{25}$
b) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{9}{25}$

7. Lee y analiza.

Se desea colocar una plancha de vidrio sobre una mesa hexagonal regular. Si uno de los lados de la mesa tiene 4 dm de longitud, determina la superficie del vidrio.

Escoge la respuesta correcta.

- a) $24\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$
b) 6 d) 24

8. Lee y analiza.

Si a la mitad de tres se le resta tres, qué número se obtiene.

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$ d) 0

9. Lee y analiza.

¿Cuál es el resultado de $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\sqrt{108}$ c) $\sqrt[6]{108}$
b) $3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{6}$

10. Lee y analiza.

Cinco personas rinden un examen. Si se sabe que:

B obtuvo un punto más que D.
D obtuvo un punto más que C.
E obtuvo dos puntos menos que D.
B obtuvo dos puntos menos que A.

Ordénalos en forma decreciente.

Escoge la respuesta correcta.

- a) ABCDE c) EDBAC
b) BCDEA d) ABDCE

11. Lee y analiza.

Alejandro tiene 26 dólares; Julia tiene 14 dólares y Cecilia 22 dólares. ¿Cuánto más dinero tiene Alejandro que Cecilia?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 48 dólares c) 2 dólares
b) 30 dólares d) 4 dólares

12. Lee y analiza.

¿Qué número continúa la serie?

89, 80, 73, 68, 65, ?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 60 c) 64
b) 61 d) 56

13. Lee y analiza.

¿Qué número continúa la serie?

2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; ____

Escoge la respuesta correcta.

- a) $6\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$
b) 8 d) 10

14. Lee y analiza.

¿Qué números van en los espacios en blanco?

12	14	16
24	28	32
48	?	?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 50 y 52 c) 21 y 24
b) 42 y 48 d) 56 y 64

15. Lee y analiza.

Un múltiplo de 5 disminuido en 2 siempre es:

Escoge la respuesta correcta.

- a) Número par
b) Número impar
c) Número puede ser par o impar
d) Número que termina en 3

16. Lee y analiza.

¿Cuál es el resultado exacto que se obtiene al realizar la operación?

De $\frac{9}{6}$ restar $-(-3\sqrt{12})$.

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$
b) $\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}$
c) $\frac{3}{2} + 6\sqrt{3}$
d) $\frac{3}{2} + 3\sqrt{4}$

17. Lee y analiza.

El resultado de la operación es:

$$5x + \left(\frac{1}{2}y - 0,55...x\right) - \frac{1}{3}[-(2y + 0,75) + 0,3x]$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $4,4x + 1,166...y + 0,25$
- b) $2,44...x - 0,2y + 1,4$
- c) $4,4x - 1,166...y - 0,25$
- d) $2,44...x + 0,2y - 1,4$

18. Lee y analiza.

Halla el resultado de:

$$4\sqrt{25} + \sqrt{100} - 3\sqrt{36} - 4\sqrt{121} =$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) 20
- b) -32
- c) 32
- d) -20

19. Lee y analiza.

Halla el resultado de:

$$2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $7\sqrt{5}$
- b) $\sqrt{5}$
- c) 5
- d) 35

20. Lee y analiza.

Cuando a un barril le falta el 30 % para llenarse contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30 %. ¿Cuántos litros caben en el barril?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 60
- b) 40
- c) 10
- d) 75

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |



La matemática de la alimentación

"La alimentación tiene una clara vocación matemática. De hecho, la pirámide de la alimentación establece unas pautas saludables para la ingesta de cereales, fruta, carnes, pescados, dulces, etc. Son las matemáticas de la alimentación, que tienen un exponente informativo si se mira de cerca la evolución que ha tenido el programa Comedores Saludables desde que nació en 2007.

Fue entonces cuando, en Andalucía, se creó una herramienta de consultoría para comedores escolares, a la que los responsables de organizar los menús de los más pequeños podían acudir, no solo para comprobar que sus propuestas eran saludables, sino también para que expertos en la materia valorasen la idoneidad de cada menú y ofrecieran mejoras y consejos.

Más de 160 000 visitas a la web se han contabilizado desde 2007 y el equipo de nutricionistas ha realizado más de 2 300 asesoramientos sobre menús.

En 2012, el apartado de comedores saludables de personas mayores ha registrado 18 000 visitas, lo que supone una media de 50 al día. Mientras que los comedores saludables en menores han sumado 11 396 visitas (31 al día), donde los menús escolares, la seguridad e higiene y los consejos sobre menús de 3 a 12 años han sido los contenidos más visitados.

En el caso de los comedores saludables para personas con discapacidad, son las recomendaciones nutricionales, los menús y las dietas hiperprotéicas y la alimentación en disfagia, los contenidos más consultados. En 2012, sumó un total de 32 191 visitas, lo que supone un promedio diario de 88.

Esta herramienta tiene un aliado en el programa de evaluación de la oferta alimentaria en centros escolares de Andalucía, una estrategia de intervención que nació en 2010 y que tiene por objeto aportar *in situ* una visión sanitaria efectiva en la revisión, comprobación y asesoría sobre los menús que se ofrece.

Para ello, expertos en la materia se desplazan a los centros escolares con comedores, a fin de evaluar las ofertas alimentarias. Estas evaluaciones tienen como resultado un informe, que se remite a los centros escolares, en el que los expertos realizan, además, propuestas para corregir los aspectos mejorables identificados, así como un seguimiento para comprobar las mejoras aplicadas.

Según los datos correspondientes al curso 2011-2012, que resultan de haber evaluado los comedores escolares de 464 centros en los que sirven menús a más de 48 000 personas, el 55,2 % de los comedores evaluados presentaba una evaluación nutricional favorable".



La pirámide de la alimentación establece un conjunto de pautas saludables.

Shutterstock, 36738096

Fuente: <http://www.juntadeandalucia.es/presidencia/portavoz/077705/comedores/saludables/salud/sanidad>



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Qué establece la pirámide de la alimentación?
2. ¿Cuál es la intención del autor con este texto?
3. ¿En qué región española se inició el programa de Comedores saludables?
4. Según el artículo, ¿qué apartado de comedores tuvo más visitas en 2012, y cuál fue su promedio?
5. Si el año de publicación del artículo es 2013, ¿cuántas visitas por año promedia este sitio web?
6. ¿Cuál es tu criterio acerca del programa Comedores Saludables?



Shutterstock, 332701260



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. ¿Crees que hace falta que en nuestro país haya un servicio como este?
¿Por qué?
2. **Ingresa** al sitio web lynk.ec/9m05 **Prepara** un resumen de los servicios que brinda el programa Comedores Saludables.
3. **Escoge** uno de los grupos de población beneficiaria del programa y **realiza** un *collage* con imágenes tomadas de Internet.
4. **Investiga** acerca de la pirámide alimenticia. **Escribe** un ensayo con introducción, desarrollo y conclusión.



Shutterstock, 1116751745

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior. **Presenten** su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen** en cuenta las siguientes recomendaciones:
 - Debe haber un organizador gráfico.
 - Hay que incluir imágenes.
 - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
 - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 645681766

Compruebo mis aprendizajes

Evaluación sumativa

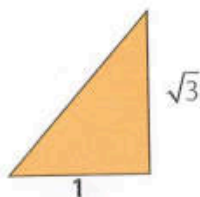
I.M.4.1.3./I.M.4.2.2./I.M.4.7.1.

1. **Selecciona** el literal que contiene las afirmaciones verdaderas.

1. $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$
2. $-8 \text{ y } \pi \in \mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
4. Todo $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{I}$

- a) 1 y 2
- b) 2 y 3
- c) 1 y 3
- d) 2 y 4

2. La medida de la hipotenusa del triángulo es:



- a) $\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) 1
- d) 2

3. Al aproximar el número irracional 2π a las décimas, se obtiene:

- a) 6,2
- b) 3,1
- c) 6,3
- d) 6,8

4. Cuál es el resultado exacto que se obtiene al realizar la operación: de $\frac{8}{5}$ restar $-3\sqrt{8}$.

- a) $-\frac{8}{5} - 3\sqrt{8}$
- b) $-\frac{8}{5} + 6\sqrt{2}$
- c) $\frac{8}{5} + 6\sqrt{2}$
- d) $-\frac{8}{5} + 3\sqrt{2}$

5. **Analiza** el proceso con la propiedad aplicada. Luego, **relaciona** la respuesta correcta.

1. $-0,17 + 0,17 = 0$ a) Conmutativa
2. $-8\sqrt[5]{3} + 2e = 2e - 8\sqrt[5]{3}$ b) Clausurativa
3. $\frac{3}{4} + \sqrt{2} - \pi = \frac{3}{4} + (\sqrt{2} - \pi)$ c) Cancelativa
4. $-7\sqrt{89} + 6\sqrt{89} = -\sqrt{89}$ d) Asociativa

- A) 1c, 2a, 3d, 4b
- B) 1c, 2d, 3a, 4b
- C) 1b, 2d, 3c, 4a
- D) 1b, 2a, 3c, 4d

6. Al aproximar los números irracionales a las décimas y realizar la operación, se obtiene:

$$-e\pi + \sqrt{16}$$

- a) -9,8
- b) -1,8
- c) 9,8
- d) -4,5

7. Al convertir los radicales en semejantes y realizar la operación, se obtiene:

$$-3\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{1}{4}\sqrt{200}$$

- a) $6\sqrt{2}$
- b) $-6\sqrt{2}$
- c) $-6\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
- d) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

8. ¿Cuál es la propiedad que se ha aplicado para resolver la operación?

$$\begin{aligned} & (7\sqrt{72} + 4\sqrt{128} - \sqrt{98}) \div \sqrt{2} \\ &= 42 + 32 - 7 \\ &= 67 \end{aligned}$$

- a) Conmutativa
- b) Clausurativa
- c) Asociativa
- d) Distributiva

9. **Relaciona** el espacio en blanco con el término faltante que hace verdadera a la igualdad:

1. $-3\sqrt{2} \times [\quad] = 1$ a) $3\sqrt{2}$

2. $-3\sqrt{2} + [\quad] = 0$ b) $\sqrt{2}$

3. $3([\quad]) = -3\sqrt{2}$ c) $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$

4. $-\frac{1}{3} + [\quad] = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ d) $-\sqrt{2}$

A) 1a, 2c, 3d, 4b

B) 1c, 2a, 3b, 4b

C) 1c, 2a, 3b, 4d

D) 1a, 2c, 3b, 4d

10. ¿Cuál es el resultado del siguiente polinomio?

$-\sqrt{2}(\sqrt{8} - 7\sqrt{2} - 6\sqrt{18} - 1 + 0,6)$ es:

a) $46 + \frac{3}{5}\sqrt{2}$ c) $46 + \sqrt{2}$

b) $46 + \frac{2}{5}\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2} + \frac{5}{3}$

Coevaluación

11. **Organicen** los datos en una tabla de frecuencias con $k = 3$. Luego, **seleccionen** las respuestas correctas.

120 100 130 145 110
100 125 148 130 120

Intervalo de clase	x	f_i	F_i	f_r	F_r
Total					

- El rango es:
a) 148 b) 248 c) 48 d) 120
- La amplitud de cada intervalo es:
a) 16 b) 4 c) 8 d) 1
- La marca de clase del segundo intervalo es:
a) 132 b) 140 c) 124 d) 108
- La frecuencia absoluta del tercer intervalo es:
a) 3 b) 5 c) 1 d) 2
- La frecuencia relativa del primer intervalo es:
a) 0,3 b) 0,2 c) 0,5 d) 1

12. **Expreso mis emociones. Reflexiona** sobre la solidaridad. **Indica** alguna actividad en la que hayas sido solidario con un compañero de clase.

Autoevaluación

13. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

Estoy en proceso

Contenidos	Identifico números irracionales.	
	Redondeo números reales.	
	Realizo operaciones con números reales.	
	Organizo datos en tablas de frecuencias con datos agrupados.	

Metacognición

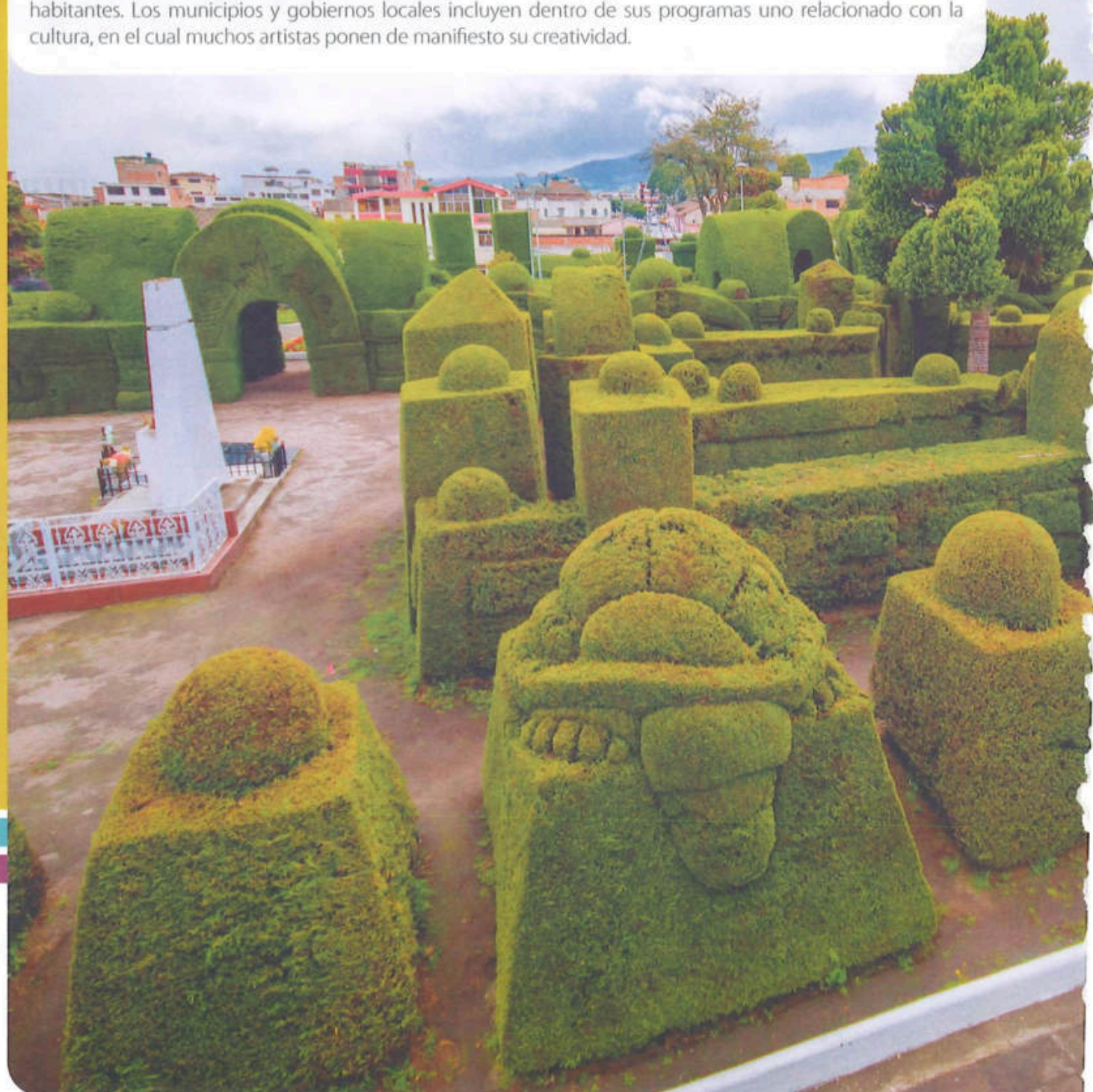
- ¿Aclaraste tus dudas con tu profesor o profesora?
- ¿Qué conocimiento aprendido has usado antes en tu quehacer diario?
- ¿Qué conocimiento podrías usar de aquí en adelante y dónde?

unidad 2

Números reales, racionalización. Expresiones algebraicas. Áreas

Sin duda alguna, las construcciones y la arquitectura son el producto de los cálculos matemáticos que hicieron posible su elaboración y permanencia con el pasar de los años.

Las ciudades, pueblos o localidades, a través de su arquitectura y quehacer diario, reflejan la cultura de sus habitantes. Los municipios y gobiernos locales incluyen dentro de sus programas uno relacionado con la cultura, en el cual muchos artistas ponen de manifiesto su creatividad.



Preguntas generadoras

- ¿Qué figuras geométricas observas en la fotografía? **Menciona** al menos cuatro.
- ¿Qué cuerpos geométricos miras en la fotografía? **Menciona** al menos tres.

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Potenciación de números reales. Notación científica
- Radicación de números reales
- Racionalización
- Expresiones algebraicas y polinomios
- Representación de polinomios con material concreto

Geometría y medida

- Polígonos. Área de polígonos
- Área de prismas y pirámides, cilindros y conos

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.4. / O.M.4.6.





Técnica de trabajo con cerámica

Competencia comunicacional

La laboriosa pero interesante técnica del *trencadís*, que significa roto o quebrado, es una técnica de cerámica rota que se utiliza para el revestimiento de superficies, especialmente en las fachadas, parques, jardines, puentes y diseños interiores. Esta técnica aporta una gran belleza a las obras, a la vez que resiste mejor el paso del tiempo.



Dragón salamandra del mosaico de Gaudí en el Park Güell de Barcelona

Indaga y escribe sobre otros lugares donde también se utilizó esta técnica. Ilustra con imágenes.



Saberes previos

Identifica el término faltante para que la igualdad se cumpla.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \left(\quad\right)^5 = -\frac{729}{1024} \quad 0,015^2 =$$

Recordemos que la potenciación, como operación matemática, se considera una multiplicación abreviada. En ella se diferencian dos partes: la base, que es el número que se multiplicará, y el exponente, que nos indica la cantidad de veces que se multiplicará la base por sí misma.

Analicemos el siguiente ejemplo:

En una ciudad se le ha encargado a un artista elaborar tres murales con cerámica rota. Estos murales tienen forma cuadrangular y sus lados, respectivamente, miden $4,5\text{ m}$, $5,2\text{ m}$; y $\sqrt{32}\text{ m}$. ¿Qué cantidad de cerámica se requiere exactamente elaborar los tres murales?

Para determinar la cantidad de cerámica, es necesario sumar el área de cada uno de los murales.

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$

Por tener forma cuadrangular, su área se calcula elevando sus lados al cuadrado.

$$A_T = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \rightarrow A_T = (4,5)^2 + (5,2)^2 + (\sqrt{32})^2$$

$$A_T = 20,25 + 27,04 + 32 \rightarrow A_T = 79,29\text{ m}^2$$

La potenciación de los números reales $\mathbb{R}$, cumple con las siguientes propiedades:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

e) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

b) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

f) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m$; con $y \neq 0$ y $x \neq 0$

c) $x^m \div x^n = x^{m-n}$

g) $x^0 = 1$; $x \neq 0$

d) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

h) $x^1 = x$

Ejemplo 1

Aplicar las propiedades de la potenciación hasta reducir la expresión $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^2\right]^3$:

Solución

Multiplicamos los exponentes: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^6$

Distribuimos el exponente: $\frac{\sqrt{2}^6}{\pi^6}$

Simplificamos el índice y el exponente: $\frac{2^3}{\pi^6} = \frac{8}{\pi^6}$

Aplicaciones de la potenciación de números reales

Una de las aplicaciones de la potenciación de números reales se encuentra en la solución de ecuaciones exponenciales, las cuales se verán con más detalle en cursos superiores, así como también en notación científica.

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita se encuentra en el exponente. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de x en el siguiente ejercicio: $(e^2)^x + e^2 = e^4$

Solución

Para resolver la ecuación, es necesario que en los dos miembros tengamos la misma base, de tal manera que se puedan igualar exponentes y resolver aplicando las propiedades de la potenciación.

$$(e^2)^x + e^2 = e^4$$

El dividendo debe tener exponente 6 para que, al restar 2 obtengamos 4, de acuerdo a la propiedad de cociente de bases iguales. Para obtener 6, x debe tener un valor de 3, pues al aplicar la propiedad potencia de potencia $2 \times 3 = 6$.

Notación científica

Esta herramienta matemática sirve para expresar de una manera corta cantidades bastante grandes o muy pequeñas, haciendo uso de un dígito y la potenciación con base 10.

Ejemplo 3

Expresar en notación científica el número 3 200 000 000.

Solución

Recorremos la coma decimal hacia la izquierda hasta que quede un solo dígito en la parte entera.

3,200 000 000 (9 posiciones)

A este número se le retiran los ceros y se lo multiplica por la base 10, a la cual se le coloca como exponente el número de posiciones que se recorrió la coma decimal.

$3,2 \times 10^9$

Ejemplo 4

Expresar en notación científica el número 0,000 000 897.

Solución

Recorremos la coma decimal hacia la derecha hasta conseguir un dígito en la parte entera del número que resultará después de retirar los ceros.

000 000 08,97 (7 posiciones)

Multiplicamos por 10 y el exponente por colocar será igual al número de posiciones que se movió la coma decimal con signo negativo.

$8,97 \times 10^{-7}$



Interdisciplinariedad

Matemática y Astronomía

Las masas de los planetas del sistema solar requieren de notación científica para ser expresadas de mejor manera.

Planetas	Masa (kg)
Mercurio	$3,3 \times 10^{23}$
Venus	$4,87 \times 10^{24}$
Tierra	$5,98 \times 10^{24}$
Marte	$6,42 \times 10^{23}$
Júpiter	$1,9 \times 10^{27}$
Saturno	$5,69 \times 10^{26}$
Urano	$8,69 \times 10^{25}$
Neptuno	$1,02 \times 10^{26}$

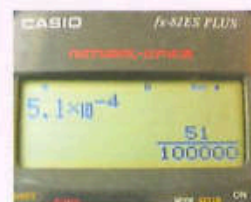
Responde: ¿por qué se utiliza la notación científica para expresar las masas de los planetas?



Competencia digital

Notación científica en la calculadora

Para ingresar números en notación científica en la calculadora, se usa la tecla EXP o $\times 10^x$. Así, por ejemplo, para ingresar $5,1 \times 10^{-4}$, escribimos el número 5,1. Luego, oprimimos la tecla EXP y finalmente, colocamos el número -4. Al presionar =, observamos en la pantalla lo siguiente:



I.M.4.2.2 / I.M.4.2.3.

1. Aplica las propiedades y resuelve.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^{-5} =$

b) $e^7 + e^{-7} =$

c) $(-0,8)^{-6} (-0,8)^3 (0,8)^5 =$

d) $[(2\pi)^2]^2 =$

e) $\left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}\right)^2 =$

f) $\left(\frac{6}{7} + \frac{4}{5}\right)^3 =$

g) $(-0,24)^{-1} =$

h) $(\sqrt{2})^{-2} =$

i) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{-10} =$

j) $[(\sqrt[3]{3})^{-2}]^6 =$

k) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} (-0,3)^{-10} (-0,3)^{-3} =$

l) $(2\sqrt{5})^3 (2\sqrt{5})^{-4} =$

m) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

n) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 =$

o) $(0,1)^3 \cdot (0,1) \cdot (0,1)^{-4}$

p) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

q) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\right\}^2$

r) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$

s) $(1,2 \cdot 0,5)^2$

2. Encuentra el valor de x para que se cumpla la igualdad.

a) $[(2^x)^4]^2 = 2^{-24}$

b) $\varphi^6 \times \varphi^7 \times \varphi^x = \varphi^{10}$

c) $(\sqrt[3]{5})^x = 25$

d) $\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}\right)^x = \frac{169}{25}$

e) $\left(\frac{\sqrt{43}}{x}\right)^2 = \frac{43}{49}$

f) $-6^x = -\frac{1}{36}$

g) $\left(-4 \times \frac{1}{3}\right)^x = -\frac{64}{27}$

h) $\left(\frac{4\pi}{x}\right)^{-5} = \frac{3\,125}{1\,024} \pi^5$

3. Problema-decisión. Decide cuáles de las afirmaciones son verdaderas.

- a) La potencia de una base negativa elevada a una exponente par es positiva.
- b) Al aplicar la propiedad potencia de potencia, se suman los exponentes.
- c) La potencia de una base positiva elevada a un exponente par es positiva.
- d) La propiedad distributiva de la potencia se aplica solo a la suma y a la resta.

4. **Completa** en tu cuaderno la tabla, **compara** los eliminar un espacio y **emite** una conclusión.

x	y	x + y	(x + y) ²	x ²	y ²	x ² + y ²
-2	$\frac{1}{4}$					
$\sqrt{2}$	2					
-5	$\frac{1}{5}$					
7	13					

5. **Reemplaza** el valor de a , b y c , y **resuelve**.

$$a = -1, b = 3 \text{ y } c = 2$$

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} - \left[\left(-\frac{c}{b}\right)^2\right]^2 =$

b) $\left(\frac{b}{c}\right)^2 \div \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} - \left[\left(-\frac{a}{c}\right)^3\right]^{-1} =$

6. **Expresa** en notación científica.

a) 4 000 000 =

b) 141 000 000 000 =

c) 0,00008 =

d) 0,000000246 =

e) 29 000 000 =

f) 0,0000000579 =

g) 0,00021137 =

h) 730 000 000 000 =

i) 567 000 000 000 =

j) 0,000 000 125

k) 322 000 000

l) 4 200 000

m) 0,000 346

n) 734 100

o) 0,0128

7. **Corrige** en tu cuaderno los errores cometidos.

a) $0,000278 = 2,78 \times 10^6$

b) $310\,000\,000 = 31 \times 10^7$

c) $0,0000009 = 1,9 \times 10^7$

d) $0,0067 = 6,7 \times 10^2$

8. **Escribe** en notación usual los siguientes números.

a) $5,1 \times 10^{-5}$

b) $9,9 \times 10^3$

c) $1,7 \times 10^5$

d) $1,3 \times 10^{-1}$

e) $9,3 \times 10^{-4}$

f) $6,4 \times 10^6$

g) $8,2 \times 10^{-6}$

h) $0,2 \times 10^6$

Trabajo colaborativo

9. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Haciendo uso de números irracionales en radicales, **ejemplifiquen** las propiedades de la potenciación de los números reales.

Actividad indagatoria

10. **Investiga** los prefijos que se usan para reemplazar a la base 10, elevada a los siguientes exponentes:

$$10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$$



Desequilibrio cognitivo

¿Por qué la raíz cúbica de -512 es -8 ?



Interculturalidad

A través de los espectáculos artísticos, los miembros de una sociedad se entretienen y enriquecen los elementos en su cultura.

En algunas ciudades se fijan fechas especiales para ofrecer espectáculos que resaltan las artes y la cultura. En Quito, sucede en el mes de agosto.

Las personas dedicadas a los espectáculos deben cuidar de la escenografía, el vestuario, la iluminación, la decoración y el sonido, entre otros aspectos.



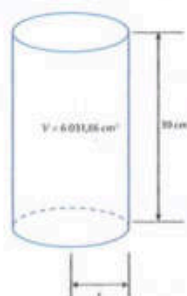
Baile sobre zancos por el día de los inocentes en Cuenca

Como hemos visto en temas anteriores, la radicación es la operación inversa a la potenciación, que consiste en que dados dos números, llamados radicando e índice, se pretende hallar un tercer número, llamado raíz, tal que, elevado al índice, sea igual al radicando.

Analicemos el siguiente problema:

Fabricio instalará focos reflectores en un panel para un espectáculo artístico. Los focos están por llegar, pero él debe adelantar el trabajo. Conoce que los reflectores son cilíndricos, que su volumen es $6\,031,86\text{ cm}^3$ y que su altura es 30 cm . ¿Qué medida debe tener el radio de los orificios que Fabricio hará en el panel?

Es necesario conocer la forma de los reflectores.



Esquematicemos el foco reflector de acuerdo con el dato de la forma. Ubiquemos en el gráfico los datos numéricos y la incógnita del problema, que es el radio.

Recordamos que la fórmula del volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, y reemplazamos en ella los datos.

$$6\,031,86\text{ cm}^3 = \pi \cdot r^2 \cdot 30\text{ cm}$$

La incógnita r debe ser despejada. Para ello aplicamos la propiedad llamada de uniformidad, que permite dividir los dos miembros de la igualdad por un mismo número, esto es:

$$\frac{6\,031,86\text{ cm}^3}{\pi \cdot 30\text{ cm}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30\text{ cm}}{\pi \cdot 30\text{ cm}} ; \text{ simplificando, tenemos:}$$

$$\frac{6\,031,86\text{ cm}^2}{\pi \cdot 30} = r^2$$

La misma propiedad de uniformidad nos permite extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de la igualdad.

$$\sqrt{\frac{6\,031,86\text{ cm}^2}{\pi \cdot 30}} = \sqrt{r^2}$$

Con la calculadora determinamos el valor de la raíz del primer miembro de la igualdad y en el segundo miembro aplicamos la propiedad raíz de una potencia.

Tenemos: $8\text{ cm} = r$ que es lo mismo que: $r = 8\text{ cm}$.

En la radicación de números reales se cumple:

a) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}; \quad x \wedge y \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad m \in \mathbb{N}$

b) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}; \quad x \wedge y \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad m \in \mathbb{N}$

c) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad m \wedge n \in \mathbb{N}; \quad \text{Si } m = n \quad \sqrt[n]{x^n} = x$

d) Si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{1}{n}}$

e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}; \quad x \in \mathbb{R}; \quad m \wedge n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 1

Aplicar las propiedades de la radicación.

a) $\sqrt{4\pi^2 \cdot \sqrt{5}} =$

b) $\sqrt[5]{\frac{64e^{42}}{243}} =$

Solución

a) $\sqrt{4\pi^2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{\pi^2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}} \quad \text{Aplicamos la propiedad distributiva.}$
 $= 2\pi\sqrt[4]{5} \quad \text{Aplicamos las propiedades raíz de una potencia y raíz de raíz.}$

b) $\sqrt[5]{\frac{64e^{15}}{243}} = \sqrt[5]{\frac{2^5 \cdot 2 \cdot e^{15}}{3^5}} \quad \text{Descomponemos en factores primos.}$
 $= \frac{\sqrt[5]{2^5} \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{e^{15}}}{\sqrt[5]{3^5}} \quad \text{Aplicamos la propiedad distributiva.}$
 $= \frac{2e^3\sqrt[5]{2}}{3} \quad \text{Aplicamos la propiedad raíz de una potencia.}$

Ejemplo 2

Expresa en forma de potencia $\sqrt[3]{2\varphi^3} =$

Solución

$\sqrt[3]{2\varphi^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\varphi^3} \quad \text{Aplicamos primero la propiedad distributiva.}$
 $= 2^{\frac{1}{3}} \cdot \varphi^{\frac{3}{3}} \quad \text{Aplicamos la propiedad raíz de una potencia.}$



Recuerda que...

• $\sqrt[4]{3^2}$ y $\sqrt[8]{3^4}$

son **radicales semejantes**; al simplificarlos se obtiene el mismo índice y la misma cantidad subradical.

• $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[5]{13}$ y $\sqrt[5]{3}$

son **radicales homogéneos** porque tienen el mismo índice, pero las cantidades subradicales diferentes.

I.M.4.2.2 / I.M.4.2.3

1. Halla las siguientes raíces y **justifica** en tu cuaderno tu respuesta con la potenciación; **sigue** el ejemplo.

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{343}} = -\frac{2}{7} \text{ porque:}$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{8}{343}$$

a) $\sqrt[5]{-\frac{32}{3125}} =$

porque:

b) $\sqrt[2]{\frac{121}{\pi^8}} =$

porque:

c) $\sqrt[3]{0,000\ 216} =$

porque:

d) $\sqrt[4]{\frac{e^{16}}{81}} =$

porque:

2. Encuentra los valores de x para que se cumplan las igualdades.

a) $\sqrt{3} = \sqrt[6]{x^3}$

b) $\sqrt{6} = \sqrt[8]{6^x}$

c) $\sqrt[9]{7} = \sqrt[7]{7^5}$

d) $5^2 = \sqrt[27]{5^x}$

e) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{x^2}$

f) $\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^x}$

g) $\sqrt{a} = \sqrt[5]{a^6}$

h) $\sqrt[5]{6} = \sqrt[3]{6^3}$

i) $7^3 = \sqrt[4]{7^{12}}$

j) $1 = \left(\sqrt[3]{m^2}\right)^x$

3. Aplica propiedades y resuelve.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64\pi^6}} =$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{8e^{24}}} =$

c) $\sqrt{8e^2 \times 72\pi^4 \times 225} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{-0,125}{-729}} =$

e) $\sqrt[5]{\frac{32\pi^{10}}{1\ 024^{-1}}} =$

f) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} =$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{64m^6}} =$

h) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

i) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

j) $\left(\sqrt[6]{0,49x^2}\right)^3$

k) $\sqrt[5]{2} \div \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$

l) $\sqrt{0,25 \cdot 0,36}$

4. **Escribe** en tu cuaderno aquellas expresiones cuyos resultados no pertenecen a $\mathbb{R}$.

a) $-\sqrt{16\pi^2}$

d) $\sqrt[4]{-64e^4}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8^3}{\pi^6}}$

e) $-\frac{\varphi^6}{1000}$

c) $\sqrt[8]{-\frac{256}{\pi^{16}}}$

f) $\sqrt[5]{-\frac{\sqrt{64}}{256}}$

5. **Expresa** en forma de potencia.

a) $\sqrt[5]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} =$

c) $\sqrt[6]{\frac{400}{e^4}} =$

d) $\sqrt{5} =$

e) $\sqrt{7} =$

f) $\sqrt[3]{3} =$

g) $\sqrt[4]{2} =$

h) $\sqrt[3]{\pi} =$

i) $\sqrt[4]{2^3} =$

6. **Expresa** en radicales.

a) $(-6)^{\frac{1}{3}} =$

b) $(1,7\bar{3})^{\frac{4}{7}} =$

c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{128}} =$

d) $2^{\frac{3}{2}} =$

e) $8^{\frac{3}{5}} =$

f) $7^{\frac{3}{2}} =$

g) $4^{\frac{4}{3}} =$

7. **Clasifica** a los radicales en semejantes u homogéneos.

a) $\sqrt{23}; -\sqrt{23}; -8\sqrt{23}$

b) $\sqrt{23}; \sqrt[3]{23^4}; \sqrt[4]{23^2}$

c) $\sqrt{23}; \sqrt{13}; \sqrt{69}$

8. **Problema-decisión.** Aplica las propiedades de los radicales. **Decide** y **selecciona** la respuesta correcta.

a) $\left(\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{0,01}}\right)^{-1}$

A) $\frac{1}{10}$

C) 100

B) 10

D) 1

b) $\sqrt[3]{a^3 \sqrt{a} \sqrt{a}}$

A) a

C) $\sqrt[3]{a}$

B) $\sqrt{a}$

D) $\sqrt{a^2}$

9. **Corrige** el error cometido en esta expresión.

$$\sqrt{\sqrt{10\,000} - \sqrt[3]{64}} = 8$$

10. **Resuelve** en tu cuaderno.

a) $-\left[\left(\frac{1}{7}\right)^2 - \sqrt{\sqrt{\frac{1}{81}}}\right] - \left\{\sqrt{\sqrt[3]{e^{24}}} + 1\right\} =$

b) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{-\frac{1}{6}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} - \sqrt{0,3^4}\right) =$

Trabajo colaborativo

11. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Escriban cinco radicales. **Intercámbienlos** con otra pareja para que encuentren dos radicales equivalentes para cada uno.

Actividad indagatoria

12. **Consulta** la fórmula para calcular el volumen de una esfera y **calcula** su radio si el volumen es $128\pi\text{ cm}^3$.



Saberes previos

Realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones:

$$3\sqrt{5} + \sqrt{5} - \frac{7}{2}\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{32} - 4\sqrt{128} - \frac{2}{5}\sqrt{50}$$

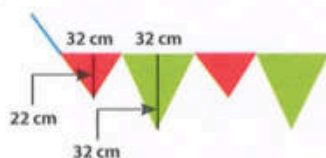
$$-\frac{3}{7}\sqrt[3]{96} - \sqrt[3]{729}$$



Competencia socioemocional

Respeto y entiende el criterio y los puntos de vista de tus compañeros cuando trabajas en grupo.

Reflexiona y comenta en la clase.



Interculturalidad

Como muestra de identidad, las ciudades se embanderan a propósito de las fechas cívicas. Los municipios, a través de ordenanzas, obligan a los propietarios de las viviendas a cumplir con esta actividad que suma colorido a los desfiles y coreografías que se presentan.



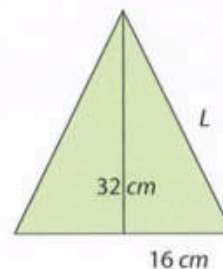
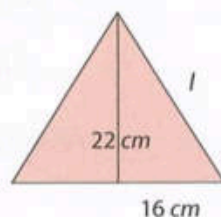
Grupo de niños bailando en las calles de Baños de Agua Santa - Ecuador

La racionalización de números reales es el proceso que se aplica sobre una expresión fraccionaria que contiene raíces de índice n , mediante el cual se eliminan dichas raíces del denominador y en ocasiones del numerador, obteniendo una expresión equivalente a la original.

Veamos el siguiente ejemplo:

Wilma elabora banderines para adornar las calles de su barrio, a propósito de la fundación de la ciudad donde habita. Estos banderines están conformados por algunos triángulos de medidas diferentes, como se muestra en la figura. ¿Cuántas veces más grande es el lado del triángulo grande con respecto al lado del triángulo pequeño? Expresar el valor exacto.

Como primer paso, calculamos el valor de los lados de cada triángulo. Estos lados corresponden a la hipotenusa de los triángulos rectángulos que se forman entre la altura y la mitad de la base de los triángulos.



$$l = \sqrt{(22 \text{ cm})^2 + (16 \text{ cm})^2}$$

$$l = \sqrt{740 \text{ cm}^2}$$

$$l = \sqrt{2^2 \cdot 185 \text{ cm}^2}$$

$$l = \sqrt{4 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{185}$$

$$l = 2\sqrt{185 \text{ cm}}$$

$$L = \sqrt{(32 \text{ cm})^2 + (16 \text{ cm})^2}$$

$$L = \sqrt{1280 \text{ cm}^2}$$

$$L = \sqrt{2^8 \cdot 5 \text{ cm}^2}$$

$$L = \sqrt{2^8 \text{ cm}^2} \cdot \sqrt{5}$$

$$L = 16\sqrt{5 \text{ cm}}$$

Para conocer cuántas veces más grande es un lado con respecto al otro, debemos dividir el lado mayor para el lado menor.

Reemplazamos los valores y aplicamos propiedades hasta expresar la respuesta más simplificada.

$$\frac{L}{l} = \frac{16\sqrt{5 \text{ cm}}}{2\sqrt{185 \text{ cm}}} = 8\sqrt{\frac{5}{185}} = 8\sqrt{\frac{1}{37}} = 8\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{37}} = 8\frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{8}{\sqrt{37}}$$

El lado del triángulo más grande es $\frac{8}{\sqrt{37}}$ cm más grande que el lado del triángulo pequeño.

Cuando las expresiones numéricas tienen en el denominador una o más raíces, estas pueden ser eliminadas a través de un proceso llamado racionalización. De acuerdo con la forma del denominador, analizaremos tres casos de racionalización.

Caso 1

El denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso, basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.

Ejemplo 1

Racionalizar la expresión obtenida como resultado en la situación inicial.

Solución

$\frac{8}{\sqrt{37}} \cdot \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{37}} = \frac{8\sqrt{37}}{\sqrt{37^2}} = \frac{8\sqrt{37}}{37}$ Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{37}$ y aplicamos propiedades.

Caso 2

Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de una suma es la resta y viceversa. El producto que resulta, $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$, es igual a $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2$.

Ejemplo 2

Racionalizar $\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

Solución

Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

$$\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{6(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = 3(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$$

Caso 3

Si el denominador solo tiene un término con una raíz de índice cualquiera, n , se multiplica numerador y denominador por otra raíz de índice n que complete una potencia de exponente n .

Ejemplo 3

Racionalizar $\frac{8}{\sqrt[5]{6^3}}$

Solución

El factor racionalizante es $\sqrt[5]{6^2}$ porque completa el exponente 5.

$$\frac{8}{\sqrt[5]{6^3}} = \frac{8}{\sqrt[5]{6^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{6^2}}{\sqrt[5]{6^2}} = \frac{8\sqrt[5]{6^2}}{6}$$



Recuerda que...

El conjugado de $a\sqrt{x} - b$ es $a\sqrt{x} + b$ y su producto es $a^2x - b^2$.

El conjugado de $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$ es $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ y su producto es: $a^2x - b^2y$.



Competencia digital

Amplía tu conocimiento sobre racionalización ingresando al siguiente enlace: lynk.ec/9m06



Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace web y realiza ejercicios interactivos de racionalización.

lynk.ec/9m07

I.M.4.2.2.

1. Escribe el factor racionalizante de cada expresión.

a) $\sqrt{5e}$

b) $6\sqrt{27}$

c) $\sqrt[3]{4}$

d) $\sqrt[3]{3^4}$

e) $\sqrt{5\pi}$

f) $\sqrt[8]{9\phi^5}$

g) $\sqrt{3} + \sqrt{11}$

h) $\sqrt{5} - 1$

i) $2 - \sqrt{7}$

j) $2\sqrt{13} + \sqrt{41}$

2. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $-\frac{8\pi}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{28}}$

d) $\frac{1}{11\sqrt{5}}$

e) $\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{13}}$

3. Escribe el factor racionalizante de cada expresión.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{2a}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\frac{5x}{\sqrt[5]{9x^3y}}$

d) $\frac{a-1}{\sqrt[3]{(a-1)^2}}$

e) $\frac{6m}{\sqrt[3]{100mn^2}}$

f) $\frac{x+2}{\sqrt{2+3}}$

4. Racionaliza las siguientes expresiones y selecciona la respuesta correcta.

a) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

A) $2\sqrt{5}$

C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{10\sqrt{5}}{5}$

D) $\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{2\sqrt[3]{xy^2}}$

A) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2xy}$

C) $\frac{3\sqrt[3]{x^2y}}{2xy}$

B) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2xy}$

D) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{xy}$

d) $\frac{6 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$

A) $3\sqrt[3]{4} - 1$

C) $3\sqrt[3]{2} - 1$

B) $3\sqrt[3]{4} + 1$

D) $2\sqrt[3]{4} + 1$

5. Determina la conjugada y la racionalizada.

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

c) $\frac{11}{\sqrt{2}-3}$

d) $\frac{-2}{5+\sqrt{13}}$

e) $\frac{1}{4\sqrt{3}-1}$

f) $\frac{3}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$

6. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

e) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+3}$

f) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

g) $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}$

h) $\frac{\sqrt{a+1}}{1-\sqrt{a+1}}$

Trabajo colaborativo

7. Trabajen en parejas y resuelvan.

Formulen un ejercicio similar al número 5. En parejas, **resuelvan** los dos ejercicios formulados. **Intercambien** los ejercicios con otra pareja para su resolución.

8. Determina el factor racionalizante y racionaliza.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[6]{3^5}}$

c) $\frac{-5}{3\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{12}{\sqrt[8]{26^5}}$

e) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{6\pi}}$

9. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{2+\pi}+\sqrt{3+\pi}} =$

b) $\frac{3}{\sqrt{2e-7}-\sqrt{5e-7}} =$

10. Convierte los radicales a equivalentes; simplifica y expresa la respuesta racionalizada.

a) $\frac{\sqrt[3]{e^2} \cdot \sqrt{e^3}}{\sqrt[6]{e\pi^5}} =$

b) $\frac{\sqrt{5^2 e\pi} \cdot \sqrt[3]{e^2 \pi^4}}{\sqrt[4]{5e}} =$

c) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{6}} =$

Actividad indagatoria

11. Investiga por qué $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ es igual a $x-y$. Expón en clase.

12. Asiste a la biblioteca e indaga cómo racionalizarías si tienen una expresión en el denominador que es un trinomio con radicales.



Desequilibrio cognitivo

Identifica las fórmulas para calcular el perímetro y el área de un rombo y de un pentágono regular.

Rombo:

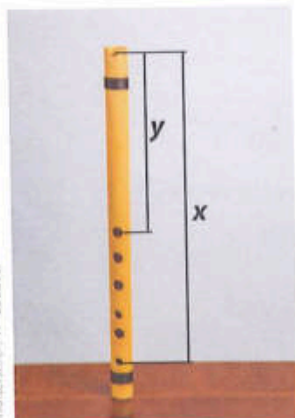
Pentágono:

Diego, quien desconoce las medidas de las quenas, ha realizado una ilustración de este instrumento musical. En ella ha identificado con las letras **x** y **y** dos distancias de ubicación de dos de los seis orificios que tiene este instrumento. ¿Con qué expresión representaríamos la distancia entre el primero y el último de los orificios?

De acuerdo con la ilustración, la distancia requerida se obtiene al restar la distancia menor **y** de la distancia mayor **x**. Si llamamos **d** a la distancia buscada, tenemos:

$$d = x - y$$

Llamamos expresión algebraica a toda expresión que contiene letras y números enlazados por signos de suma, resta, multiplicación y división. Las letras representan cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas.



Flauta sudamericana llamada "quena".

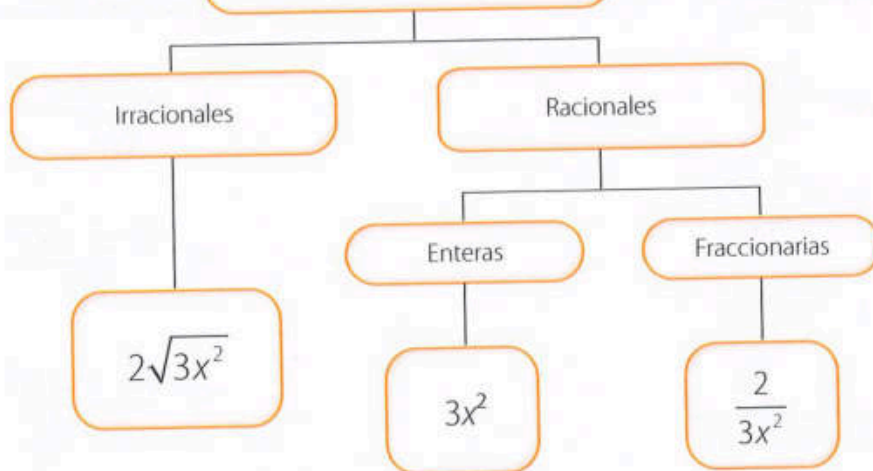


Interculturalidad

La quena es un instrumento de viento de origen preincásico. Se fabrica con caña de bambú. Su uso se remonta a las festividades tradicionales de las comunidades originarias de los Andes. En la actualidad es uno de los instrumentos que identifica a los grupos folclóricos que enriquecen la cultura andina con su música.

Indaga y elabora un párrafo en el cuaderno acerca de este instrumento musical.

Expresiones algebraicas



Se llama término a toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos de sumas o restas.

Ejemplo 1

Escribir tres términos algebraicos.

Solución

$$4xy^4; -6\sqrt{ab^5c}; \frac{2st^3}{7u^2v}$$

Las expresiones algebraicas, de acuerdo con el número de términos, pueden ser monomios (un término) o polinomios (más de un término).

Si un polinomio tiene dos términos, se llama binomio y si tiene tres términos, trinomio.

Ejemplo 2

Identificar las expresiones algebraicas de acuerdo con el número de términos.

a) $6x^5y + 9xy^5$

c) $6x^5y + 9xy^5 - 7xyz + 6$

b) $6x^5y + 9xy^5 - 1$

d) $6x^5y$

Solución

- a) Es un binomio porque tiene dos términos.
- b) Es un trinomio porque tiene tres términos.
- c) Es un polinomio porque tiene más de dos términos.
- d) Es un monomio porque tiene solo un término.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir los valores asignados a las letras que contiene dicha expresión.

Ejemplo 3

Calcular el valor numérico de $-3x^3y^2 + 5xy^5 - 2$ para $x = 1$ y $y = -2$.

Solución

$-3(1)^3(-2)^2 + 5(1)(-2)^5 - 2$ Sustituimos los valores de x y y .

$-3(4) + 5(-32) - 2$ Desarrollamos las potencias.

$-12 - 160 - 2 = -174$

Se denominan términos semejantes a aquellos cuya parte literal es similar en letras y exponentes. Si los términos de una expresión algebraica son semejantes, pueden ser reducidos, es decir, sumados algebraicamente.

Ejemplo 4

Reducir términos semejantes en el polinomio

$4a^2b + 7ab^2 - 4 + 2ab^2 - 8a^2b + 5$

Solución

$4a^2b + 7ab^2 - 4 + 2ab^2 - 8a^2b + 5$ Identificamos términos semejantes.

$-4a^2b + 9ab^2 + 1$ Sumamos algebraicamente.



Recuerda que...

Grado de un monomio

Absoluto: se obtiene al sumar los exponentes de la parte literal.

$$-\frac{5}{3}xy^5z^2$$

$$1 + 5 + 2 = 8$$

El monomio es de grado absoluto 8.

De grado relativo 1 con respecto a x , grado relativo 5 con respecto a y , y grado relativo 2 respecto a z .

En un polinomio el grado absoluto es igual al mayor grado absoluto de los monomios que lo conforman.

En el polinomio

$$3a^2b + 2bc - b^5c^2$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 7 \end{matrix}$$

el grado absoluto es 7.

Si todos los términos de un polinomio tienen el mismo grado, el polinomio se llama homogéneo.

IM4.2.1.

1. Encuentra una expresión algebraica para cada enunciado.

- El triple de un número
- El doble de un número más cinco
- La razón entre el cuadrado de un número y el doble de otro
- La raíz cuadrada de 7 veces un número más el cuadrado de dicho número
- La diferencia del cuádruplo de un número y el producto de ese número con el doble de otro
- El cuadrado de la suma del triple de un número con el cuádruplo de otro
- El cuadrado de un número menos el cubo del mismo número
- El doble de la suma de dos cantidades
- El cubo de la diferencia de dos cantidades
- El cuadrado de un número menos el cubo de otro
- La quinta parte de un número menos la mitad de otro
- La mitad de la suma de los cuadrados de dos números

2. Expresa en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas.

- $2x$
- $4x$
- $\frac{x}{6}$
- $2x + 3y$
- $\frac{x}{2} - \frac{y}{5}$
- $2x^3$
- $3x^2 - 4y^3$
- $\frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}y$
- $\frac{2x - 4y}{3}$
- $\frac{1}{5}(x^2 - \sqrt{x})$
- $2x + 10$

3. Copia la tabla en tu cuaderno y marca con una X según corresponda.

	Monomio	Binomio	Trinomio	Polinomio
$\frac{3}{4}x^2y$				
$-2x + 3y - 1$				
$\sqrt{x} - 2y$				
$a + b + 2c - 6$				

4. Escribe en tu cuaderno dos monomios que cumplan las condiciones indicadas en cada caso.

- Coeficiente negativo y dos variables
- Irracional con una sola variable
- Coeficiente fraccionario con tres variables y grado absoluto 6
- Racional fraccionario con dos variables y grado absoluto -1

5. Halla el valor numérico de las expresiones considerando que:

$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = -2$$

- $-a + 2b - 3c$
- $\frac{1}{2}a^3bc + 4ab^2 - \frac{ab^2}{c}$
- $\frac{-b^3c^2}{8} + \frac{3}{4}a^4c^2 - 0,3ab^2$
- $\sqrt{ab^3c^3} + \frac{3}{2}abc^4 - 10$

6. Evalúa las siguientes expresiones algebraicas para los valores numéricos dados.

- $x^2 - y^2 + z^2$ para $x = -2, y = 2, z = -3$
- $5 - 2x + z^3$ para $x = -4, z = -1$
- $a^2 - b + 3c - 3$ para $a = -3, b = -2, c = 1$
- $5a^2 - 3b + 3c - d$ para $a = 1, b = -3, c = -1, d = 0$
- $4r^3 - 2s^2 + 2t - 1$ para $r = -2, s = -1, t = -4$

7. **Copia** la tabla en tu cuaderno e **identifica** los elementos de cada término.

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal
$-\frac{3}{8}x^6y^5z$			
$\sqrt{2}v^6w^{-3}$			
$-4a^6b^2c$			
$-0,6\frac{c^2d}{a}$			

8. **Determina** el grado absoluto de cada monomio.

- a) $-4x^6y^5z$ d) $31a^{18}b^{-12}$
 b) $\sqrt{5}a^5b^{-7}c$ e) $-0,5x^{-3}y^{-4}$
 c) $12\frac{u^4z}{w^5}$ f) $\frac{1}{11}x^5y^8$

9. **Indica** el grado relativo con respecto a x.

- a) $14axy^5$ d) $0,72x^8z^{-4}$
 b) $-\sqrt{2}abx^6$ e) $20x^{-2}y^7$
 c) $-6\frac{y^2z^2}{x^3}$ f) $\frac{1}{3}ar^5$

10. **Determina** el grado absoluto de los polinomios.

- a) $ax^2y - 2b^3x^5z + 3a^7xy - 2x^{-3}$
 b) $3z^5 - 0,5x^{-3}z^3 + 0,2x^3y^2z$
 c) $2a^{-3}b^{-1} + 3a^4b^{-3} - 2a^5b^{-5} + 4$
 d) $4x^{-7}y^5 - 2\frac{x}{y} + 7x^8y^{-7}$
 e) $-\frac{3}{7}x^4y^{-2}z^{-2} + 3\frac{x^{-3}y^{-1}}{z^{-3}} + \frac{4xy}{5z^3}$

11. **Selecciona** los polinomios homogéneos.

- a) $-5x^4y^3 + x^2y^4 - 3xy^7 + 2xy^5$
 b) $14mn^3 - 10m^2n^2 + 3m^3n - 2m^4$
 c) $0,5ab^{-1} + 0,2a^7c^{-8}d + 4a^{-8}b^{-8}$
 d) $2x^3 + 4y^3 + z^3 - 1$

12. **Ordena** los polinomios en forma ascendente, de acuerdo con el valor relativo con respecto a x.

- a) $-2x^4 - 3x - 6x^6 - 5x^3 + 1 - 4x^2$
 b) $ax^{-2} - 3bx^2 + xy - 2 + 6x^4 - x^{-1}$

13. **Ordena** en forma descendente los siguientes polinomios y **escribe** su grado.

- a) $2 - a^3 + 3a^4 - 10a^2$
 b) $n^5 - m^3n^2 + 7m^5 + m^2n^3$
 c) $-xy^2 + 2x^2y + y^3 + 3x^3$

14. **Reduce** términos semejantes.

- a) $-8xy + 5x^3y^2 + 25x^2y + 5x^2y - 3xy$
 b) $ab^2 - 3a^2b + 5ab^2 - 12a^2b + 12$
 c) $\frac{1}{2}rs^2 + 3rs - \frac{1}{5}r + 2rs^2 - 3rs + \frac{1}{7}r$
 d) $0,7x^2 - \frac{1}{3}xy^2 + x^2 - 3x^2 + \frac{1}{6}xy^2$
 e) $3xy - 5x + 2y - 7xy + 3x$
 f) $2a + 5b - 8a + 7b - 6a$
 g) $12m + 3n - 11n + m - n - 11m$
 h) $2(x - y) - [3x + 4(x + y)]$

Trabajo colaborativo

15. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Formulen cuatro polinomios y **ordénenlos** en forma descendente.

Actividad indagatoria

16. **Investiga** qué es un polinomio completo. **Explica** en clase.

Revisa el siguiente enlace web: lynk.ec/9m08

Tema 5

Representación de polinomios con material concreto



Saberes previos

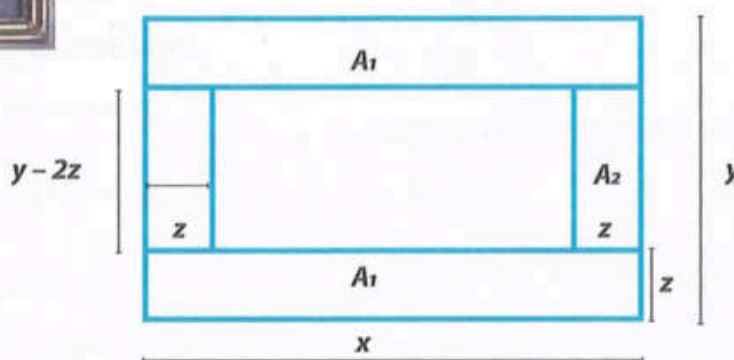
¿Cómo descompondrías el número 5 678 para que aparezca como un polinomio?



Las medidas del ancho y largo del cuadro de arte, a la izquierda de la página, son desconocidas, así como el ancho del marco. Por ello se les ha asignado con las letras x , y , z , respectivamente. Encontrar la expresión que representa el área del marco.

Para dar solución, esquematizaremos el marco como una estructura formada por cuatro rectángulos cuyas medidas son las indicadas.

¿Cuál es el área total del cuadro?



La fórmula para calcular el área de un rectángulo es $A = b \times h$, por lo tanto:

$$A_1 = x \cdot z$$

$$A_2 = z \cdot (y - 2z)$$

Como son dos rectángulos de cada tipo, el área solicitada es:

$$A_T = 2A_1 + 2A_2$$

$$A_T = 2xz + 2(y - 2z)z$$

$$A_T = 2xz + 2yz - 4z^2$$

Los polinomios pueden ser representados gráficamente mediante figuras geométricas. La elaboración de fichas algebraicas de colores facilitan la representación de los polinomios y los procesos de suma y resta entre ellos.

o	mo	no	o^2
n	mn	n^2	no
m	m^2	mn	mo
	m	n	o

Otra forma de representar un polinomio:

$$(m+n+o)^2 = m^2 + n^2 + o^2 + 2(mn+mo+no)$$



Interculturalidad

Los indígenas de Tigua, ubicada en Cotopaxi, aprendieron a plasmar sus vivencias, leyendas y sueños en el cuero de las ovejas, primero con anilina, y actualmente con pintura acrílica.

El cóndor, el curiquingue y el danzante de Pujilí son personajes que aparecen en medio de bellos y coloridos paisajes andinos.



Bailarines en trajes tradicionales de colores brillantes en el desfile de Corpus Christi: Pujilí - Ecuador

Ejemplo 1

Construir fichas algebraicas para representar $\pm x^2$, $\pm x$, ± 1 .

Solución

Usaremos dos colores: el color verde para los términos positivos, y el color rojo para los términos con signo negativo.

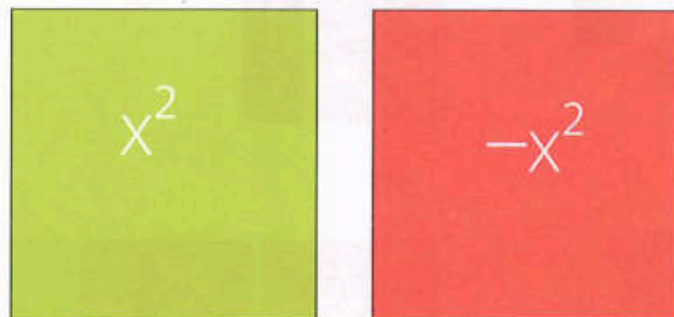
Para representar la unidad, utilizaremos un cuadrado cuya medida será un centímetro.



Para representar $\pm x$, usaremos una ficha rectangular cuya altura será un centímetro, es decir, igual al lado del cuadrado que representa la unidad.



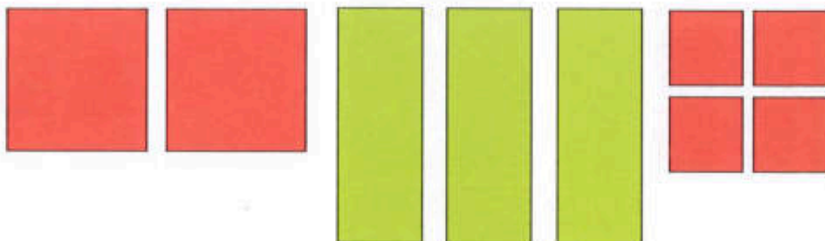
Para representar $\pm x^2$, utilizaremos una ficha cuadrangular de lado igual a la base de la ficha que representa a x.



Ejemplo 2

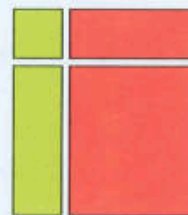
Representar el polinomio $-2x^2 + 3x - 4$.

Solución



Recuerda que...

Esta es la relación de las medidas entre las fichas algebraicas:



Al construir las fichas, puedes hacerlas rojas de un lado y verdes en su reverso.



Competencia socioemocional

Si has tenido experiencias positivas en tu actuar académico o personal, procura transmitir las a tus compañeros sin menospreciar sus capacidades.

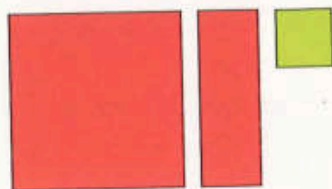
Comenta tu criterio en la clase.

I.M.4.2.1.

1. **Relaciona** cada polinomio con las fichas correspondientes.

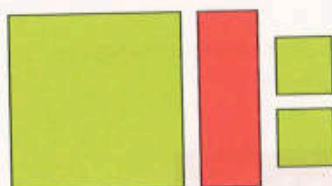
a) $x+3$

1.



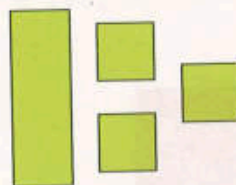
b) $2x-4$

2.



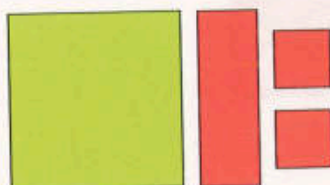
c) x^2-2x+2

3.



d) $-x^2-x+1$

4.



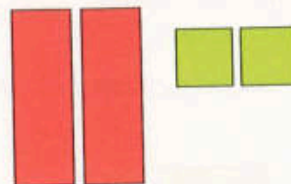
e) x^2-x-2

5.

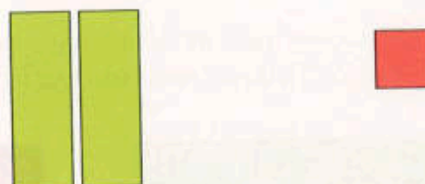


2. En tu cuaderno **dibuja** las fichas para completar los polinomios de manera que correspondan a las expresiones.

a) $-2x+3$



b) $5x-3$



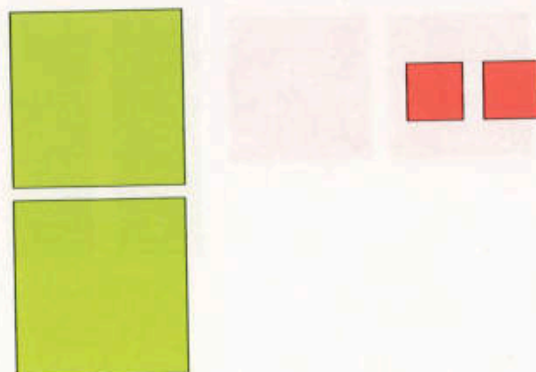
c) x^2-3x+1



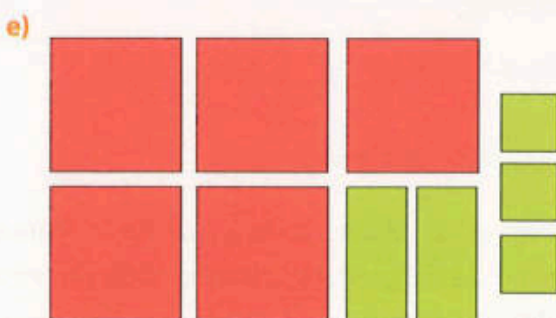
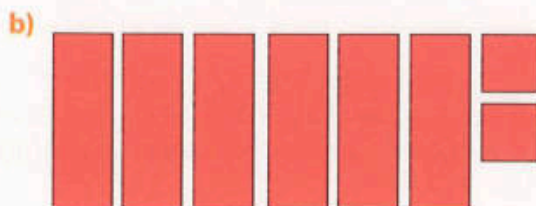
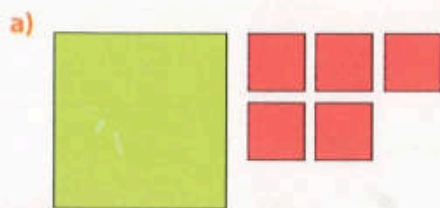
d) $-2x^2+3x$



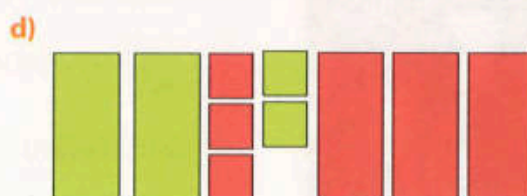
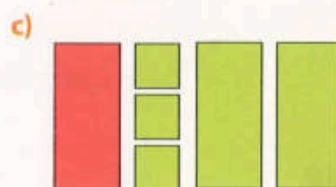
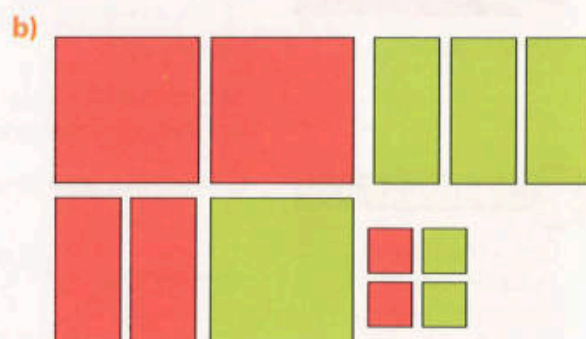
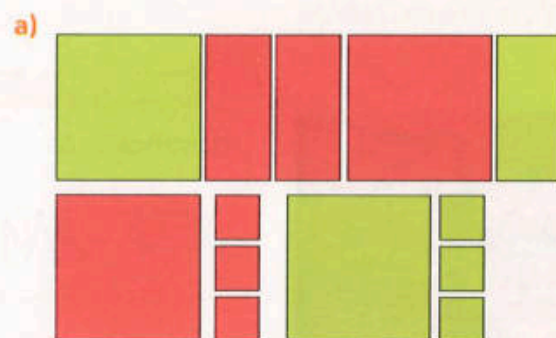
e) $4x^2-6$



3. **Escribe** los polinomios que corresponden a las representaciones.



4. **Reduce** términos semejantes y **escribe** la expresión algebraica resultante.



Trabajo colaborativo

5. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Escriban cuatro polinomios en x de segundo grado. **Intercambien** con otra pareja para que los **representen** con fichas algebraicas. **Hagan** sus fichas con anticipación, siguiendo la guía de su maestra o maestro.

Actividad indagatoria

6. **Investiga** con qué podrías representar x^3 .

Explica su uso a través de la representación de un polinomio de tercer grado.



Desequilibrio cognitivo

Identifica las figuras geométricas que son polígonos.



Shutterstock, 561102985



Tejido otavaleño

Un tapiz tiene forma rectangular. Su largo mide $1,20\text{ m}$ y su ancho, $0,60\text{ m}$. El trapecio señalado tiene las siguientes medidas: base mayor 50 cm , base menor 15 cm , y la altura 12 cm . ¿Qué porcentaje del área total del tapiz ocupa esa figura trapezoidal?

Para responder a la pregunta planteada, debemos calcular el área del tapiz rectangular y del trapecio indicado.

Las fórmulas para calcular el área de estos dos polígonos irregulares son:

$$A_{\square} = b \times h \text{ y } A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Sustituyendo los datos, tenemos:

Área del tapiz

$$A = b \times h$$

$$A = 1,20\text{ m} \times 0,60\text{ m} = 0,72\text{ m}^2$$

Área del trapecio del tapiz

$$A = \frac{B+b}{2} \times h$$

$$A = \frac{0,50\text{ m} + 0,15\text{ m}}{2} \times 0,12\text{ m}$$

$$A = 0,039\text{ m}^2$$

Para determinar el porcentaje, dividimos el área del trapecio para el área del tapiz y multiplicamos por 100 este cociente.

$$\frac{A_{\square}}{A} = \frac{0,039}{0,72} = 0,0542 \times 100 = 5,42\%$$

La figura trapezoidal ocupa el $5,42\%$ del área total del tapiz.



Interculturalidad

La manufactura de los tapices otavaleños es ancestral. En ellos se pueden observar figuras costumbristas del paisaje andino, claras muestras de la riqueza de nuestra cultura que viaja por muchos lugares del mundo.

Shutterstock, 194272517



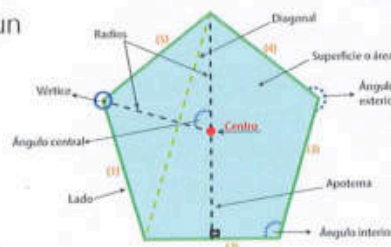
Mujer de Otavalo - Ecuador, vende sus tejidos en la plaza.



Recuerda que...

Los polígonos pueden ser regulares o irregulares. Los regulares tienen sus ángulos y lados iguales.

Los elementos de un polígono regular son:

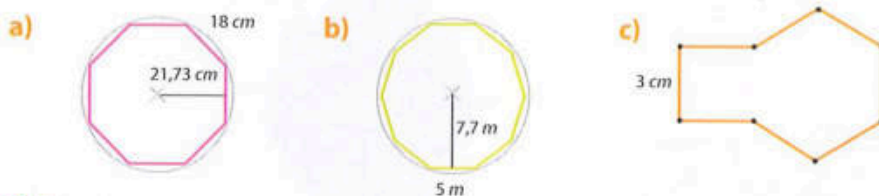


M.4.2.18. Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.

M.4.2.19. Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.

Ejemplo 1

Calcular el área de los polígonos de las figuras.



Solución

- a) De acuerdo con el número de lados, se trata de un octágono. Por lo tanto, su perímetro será igual a:

$$P = 8l; P = 8(18 \text{ cm}); P = 144 \text{ cm}$$

Reemplazamos este resultado en la fórmula del área de un decágono. Su perímetro es:

$$A = \frac{P \times ap}{2}; A = \frac{144 \text{ m} \times 21,73 \text{ m}}{2}; A = 1564,56 \text{ cm}^2$$

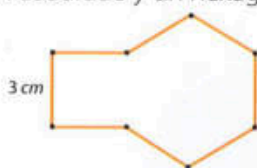
- b) La figura muestra que se trata de un decágono.

$$P = 10l; P = 10(5 \text{ m}); P = 50 \text{ m}$$

Reemplazando tenemos:

$$A = \frac{P \times ap}{2}; A = \frac{50 \text{ m} \times 7,7 \text{ m}}{2}; A = 192,5 \text{ m}^2$$

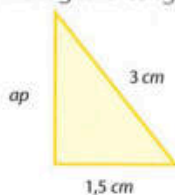
- c) Para calcular el área de este octógono irregular, es necesario descomponerlo en figuras conocidas. Si trazamos una línea vertical, obtenemos un cuadrado y un hexágono regular, cuyos lados miden 3 cm.



Calculamos el área del cuadrado.

$$A_q = l^2; A_q = (3 \text{ cm})^2; A_q = 9 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del hexágono, debemos calcular primero la apotema, tomando en cuenta que el radio de la circunferencia que inscribe a un hexágono es igual a su lado.



$$ap = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 - (1,5)^2}; ap = 2,6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \times ap}{2}; A = \frac{6 \times 3 \text{ cm} \times 2,6 \text{ m}}{2}; A = 23,4 \text{ cm}^2$$

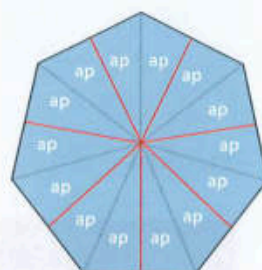
Finalmente, sumamos las dos áreas:

$$A_q + A = 9 \text{ cm}^2 + 23,4 \text{ cm}^2; A_t = 32,4 \text{ cm}^2$$



Recuerda que...

Un polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia y dividido en triángulos iguales.



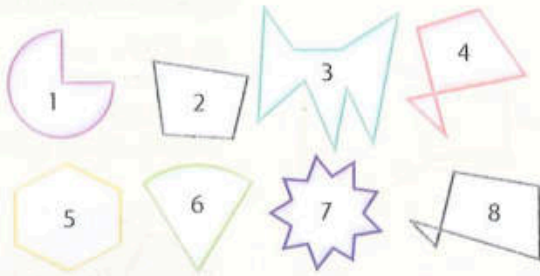
Apotema = altura de cada triángulo.

Los tipos de polígonos por el número de lados son:

Número de lados	Nombre del polígono	Ejemplo
3	Triángulo	
4	Cuadrilátero	
5	Pentágono	
6	Hexágono	
7	Heptágono	
8	Octágono	
9	Eneágono	
10	Decágono	
11	Endecágono	
12	Dodecágono	

I.M.4.6.3.

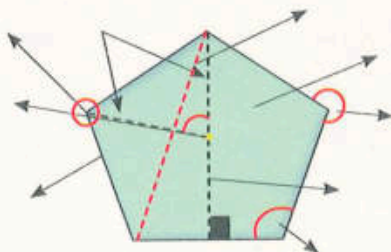
1. Identifica las figuras geométricas que son polígonos.



2. Clasifica en tu cuaderno los polígonos.

Polígono	Por la medida de sus lados y ángulos	Por el número de lados

3. Identifica los elementos de un polígono regular.

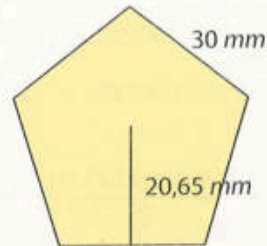


4. Calcula el área de los polígonos de las figuras.

a)



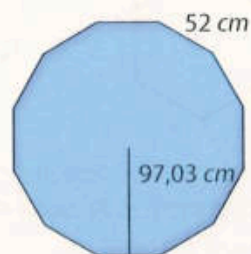
b)



c)



d)



e)



5. **Calcula** el área de los hexágonos cuyos lados miden:

- a) 40 cm
b) 3,6 m

6. **Completa** la siguiente tabla en tu cuaderno.

Figura	Lado	Angulo central	Área
Pentágono	10 cm		
Nonágono	6 m		
Heptágono	12 m		
Octógono	2,5 m		
Decágono	320 mm		
Hexágono	20 cm		

7. **Determina** el área de un cuadrado de 2,5 cm de lado. **Comprueba** el resultado mediante la fórmula del área de un polígono regular. ¿Cuál es la apotema del cuadrado?

8. **Calcula** cuántos adoquines hexagonales de 10 cm de lado se necesitan para cubrir un patio de 200 m².

9. **Realiza** las siguientes actividades:

- a) **Calcula** el área de uno de los triángulos que conforman el polígono.



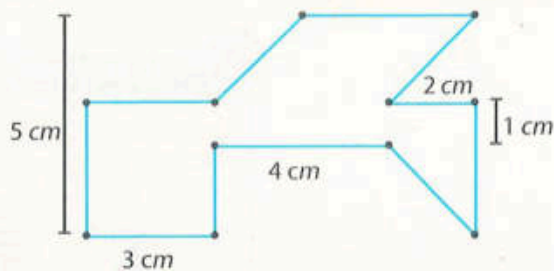
$$L = 12 \text{ cm}$$

$$ap = 8,26 \text{ cm}$$

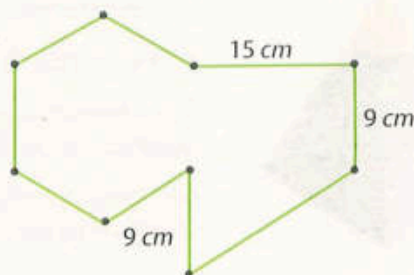
- b) **Obtén** el área del polígono a través del área de los triángulos que lo conforman.
- c) **Calcula** el área del polígono con la fórmula para polígonos regulares. Luego **compara** el resultado.

10. **Determina** el área de los polígonos irregulares.

a)

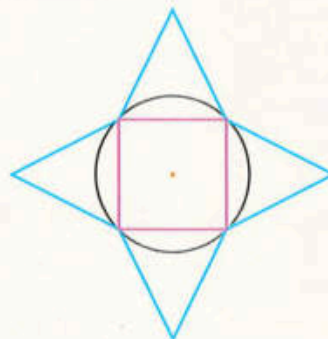


b)



11. **Resuelve** el siguiente problema.

En una circunferencia de radio igual a 8 cm se inscribe un cuadrado, y sobre cada uno de sus lados se construyen triángulos equiláteros. **Calcula** el área de la estrella.



Trabajo colaborativo

12. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Desarrollen las actividades del ejercicio 5 para un dodecágono de lado 4 cm y apotema 7,46 cm.

Actividad indagatoria

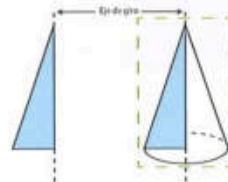
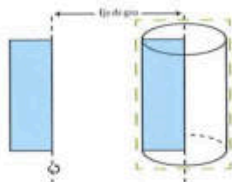
13. **Investiga** cómo se inscriben los polígonos regulares en la circunferencia. **Haz** el trazo de uno de ellos en un cartel y **expón** en clase.

Área de prismas y pirámides, cilindros y conos



Saberes previos

¿Qué cuerpos geométricos se forman al hacer girar las figuras geométricas indicadas en los ejes de giro propuestos? **Dibújalos** en tu cuaderno.

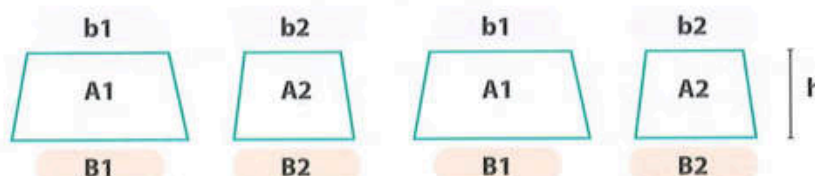


Pirámides truncadas

¿Cómo se calcula el área total de la parte inferior de la pirámide de la ilustración?

Para conocer el área total, es necesario dibujarla. Debemos observar las figuras geométricas que forman la pirámide, calcular el área de cada una de ellas y sumaras.

Las figuras geométricas que observamos son: cuatro trapezios de igual altura, con sus bases iguales de dos en dos:



dos bases rectangulares:



El área lateral total se calcula con la fórmula:

$$A_l = 2A_1 + 2A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_l = 2 \frac{B_1 + b_1}{2} \cdot h + 2 \frac{B_2 + b_2}{2} \cdot h + B_1 \cdot b_1 + B_2 \cdot b_2 \quad \text{Reemplazamos datos.}$$

$$A_l = (B_1 + b_1) \cdot h + (B_2 + b_2) \cdot h + B_1 \cdot b_1 + B_2 \cdot b_2 \quad \text{Simplificando.}$$

Si las medidas son las siguientes; $B_1 = 8 \text{ cm}$; $b_1 = 5 \text{ cm}$; $B_2 = 3,2 \text{ cm}$; $b_2 = 2 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$

Reemplazamos datos:

$$A_l = ((8+5) \times 3) + ((3,2+2) \times 3) + (8 \times 3,2) + (5 \times 2)$$

$$A_l = 90,2 \text{ cm}^2$$

El área total de prismas y pirámides se calcula sumando las áreas de las figuras geométricas que lo forman.



Interculturalidad

En Cochasquí, existe un complejo de pirámides y tumbas, un verdadero tesoro arquitectónico prehispánico. Este nos permite encontrarnos con nuestra historia e identidad.

La estructura no es visible porque la vegetación la ha cubierto; sin embargo, se recrea su arquitectura que da clara muestra de 15 pirámides truncadas y cerca de 20 montículos funerarios.



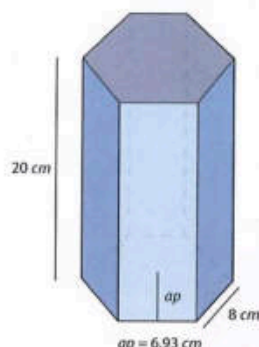
Pirámides planas de Cochasquí, sitio arqueológico



Competencia matemática

Ejemplo 1

Calcular el área total del prisma de la figura.



Solución

El prisma tiene 6 caras laterales rectangulares y dos bases hexagonales. Por lo tanto:

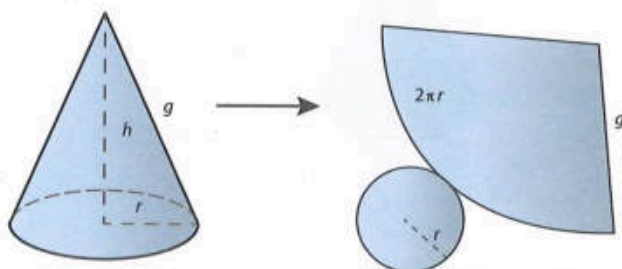
$$A_T = 6 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 6,93 \text{ cm}}{2}$$

$$A_T = 960 \text{ cm}^2 + 332,64 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 1\,292,64 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 2

Calcular el área lateral del cono de la figura.



Solución

El gráfico permite observar que el área lateral será igual a la suma del área de la base (que es un círculo) con la superficie lateral (que es un sector circular).

$$A_T = A_O + A_{\text{superficie lateral}}$$

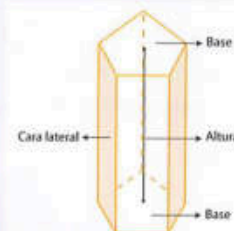
El sector circular se calcula con la fórmula $S = \frac{LR}{2}$, donde L es la longitud del arco, el cual es igual al perímetro de la circunferencia, es decir, $2\pi r$. Por su parte, R es la generatriz.

$$\text{Reemplazando tenemos: } A_T = \pi r^2 + \frac{2\pi r g}{2}$$

$$\text{Simplificando: } A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

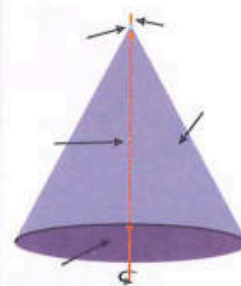
$$g, \text{ por el teorema de Pitágoras, se obtiene con: } g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Un prisma es un cuerpo geométrico formado por dos caras planas poligonales, paralelas e iguales, que se llaman bases, y tantas caras rectangulares como lados tiene cada base.



Tanto los prismas como las pirámides toman el nombre de acuerdo con el polígono que es su base.

Dibuja el siguiente cono en el cuaderno y **escribe** el nombre de sus elementos.



Interdisciplinariedad

Matemática y Arquitectura

Existen en nuestro alrededor varios monumentos, edificios o construcciones en forma de sólidos geométricos. Para obtener su superficie exacta es necesario conocer sus fórmulas de solución.

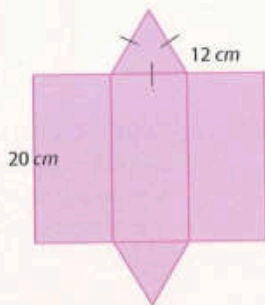
I.M.4.6.3.

1. Responde en tu cuaderno.

- a) ¿Por qué al cono y al cilindro se los llama cuerpos de revolución?
- b) ¿Cuál es la diferencia entre una pirámide y un prisma?

2. Escribe en tu cuaderno el nombre del cuerpo geométrico que corresponde a cada desarrollo, y calcula el área total exacta.

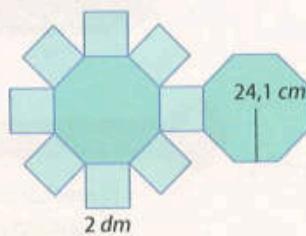
a)



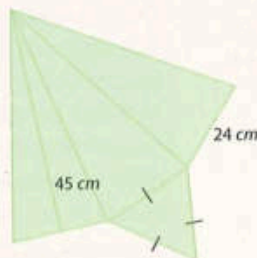
b)



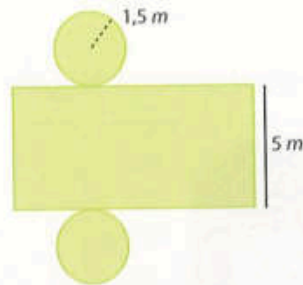
c)



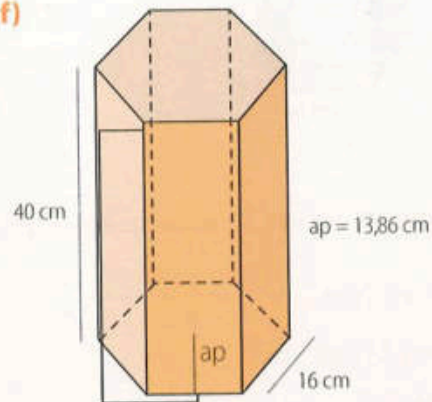
d)



e)



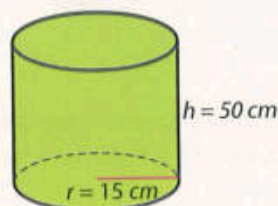
f)



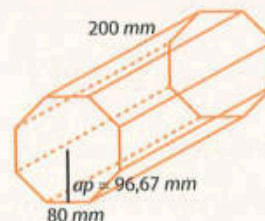
g)



h)



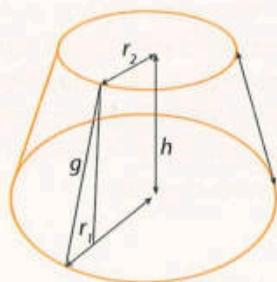
i)



3. Resuelve y redondea los resultados.

- Calcula el área de un cono de diámetro 4 cm y altura 17 cm.
- Calcula la altura de las caras laterales de una pirámide cuadrangular cuya área lateral es 100 cm^2 . El perímetro de la base es 40 cm.
- Determina el área de un cono cuya altura es igual al diámetro de la base y considerando que la longitud de la circunferencia de la base mide $10\pi \text{ m}$.
- Calcula la altura de un cilindro de 4 m de diámetro y área total $24\pi \text{ m}^2$.
- Obtén el área de la base de una pirámide hexagonal cuya área lateral es 648 cm^2 y altura 18 cm.

4. Calcula el área lateral del cono truncado de la figura si se sabe que dicha área se calcula con la fórmula $A_{\text{lateral}} = \pi(r_1 + r_2) \cdot g$ y que $r_1 = 30 \text{ cm}$; $r_2 = 20 \text{ cm}$ y $h = 40 \text{ cm}$



Trabajo colaborativo

5. Trabajen en parejas y resuelvan.

Traigan una caja de forma prismática; ábrala de manera que obtengan el desarrollo del prisma; retiren las pestañas que hacían posible que se cierre la caja; obtengan las medidas necesarias para que calculen su área.

- Determina el área total y el volumen de un cono cuya generatriz mide 10 cm y el radio de la base es de 5 cm.
- Dos recipientes cilíndricos A y B de distinta altura y diámetro tienen el mismo volumen. Si el diámetro de A es la mitad del diámetro de B. Determina la relación de sus alturas.

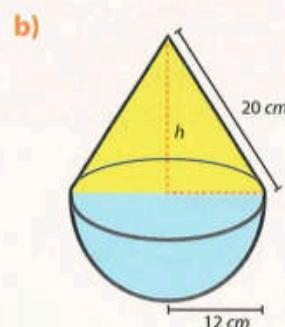
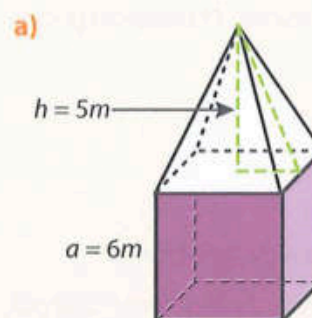
a) $h_A = \frac{1}{2} h_B$

b) $h_A = 4h_B$

c) $h_A = 2h_B$

d) $h_A = 8h_B$

8. Halla el volumen de las siguientes figuras.



Actividad indagatoria

9. Investiga en textos de geometría o en Internet, cómo construir pirámides, prismas, conos y cilindros. Elabora en cartulina el desarrollo una de estas figuras y explica en clase cómo lo hiciste.

Estrategia: resolver de atrás hacia adelante

Problema resuelto

Fabiana construye un prisma cuadrangular. Su docente le pide que construya otro de manera que el área lateral se aumente en un 20 %. Si las medidas de las caras laterales del nuevo prisma son base 10 cm y altura 24 cm y solo se modificó la altura, ¿cuál es la medida de la altura del primer prisma?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Aumento que se produjo en el área lateral? 20 %

¿Base y altura del segundo prisma? 10 cm y 24 cm

¿Qué medida se cambió en el segundo prisma?

La altura

¿Qué se desea conocer?

La altura del primer prisma

2. Fijar una estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Tomaremos los datos finales para calcular el área modificada. Sobre la base de ese valor que representará el 120 %, calcularemos el valor que representa el 100 %. Conocida el área del primer prisma, determinaremos la altura, tomando en cuenta que la base de las caras laterales no varió.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

$$A_{\text{lateral}} = 4 \times (10 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}); A_{\text{lateral}} = 960 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{ccc} 120 \% & & 960 \text{ cm}^2 \\ 100 \% & \text{---} & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \% \cdot 960 \text{ cm}^2}{120 \%} = 800 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square} = 800 \text{ cm}^2 + 4; A_{\square} = 200 \text{ cm}^2$$

$$A_{\square} = b \times h; 200 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm} \times h; h = \frac{200 \text{ cm}^2}{10 \text{ cm}}; h = 20 \text{ cm}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La altura del primer prisma es 20 cm.

Problema resuelto

Darío hace una modificación a una primera construcción de un prisma triangular, de manera que su área lateral se ve disminuida en un 40 %. Las medidas de las caras laterales del nuevo prisma son base 9 cm y altura 15 cm. Si solo modificó la base, ¿cuál es la medida de la base de su primera construcción?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Disminución en el área lateral? 40 %

¿Base y altura del segundo prisma?

9 cm y 15 cm

¿Qué medida se cambió en el segundo prisma?

La base

¿Qué se desea conocer?

La base del primer prisma

2. Fijar una estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Tomaremos los datos finales para calcular el área modificada. Sobre la base de este valor que representará el 60 %, calcularemos el valor que representa el 100 %. Conocida el área del primer prisma, determinaremos la base, tomando en cuenta que la altura de las caras laterales no varió.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

$$A_{\text{lateral}} = 3 \times (9 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}); A_{\text{lateral}} = 405 \text{ cm}^2$$

$$x = \frac{100 \% \cdot 405 \text{ cm}^2}{60 \%} = 675 \text{ cm}^2$$

$$A = 675 \text{ cm}^2 + 3; A = 225 \text{ cm}^2$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}; 225 \text{ cm}^2 = \frac{b \times 15 \text{ cm}}{2}; b = \frac{2 \times 225 \text{ cm}^2}{15 \text{ cm}}; b = 30 \text{ cm}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La base del primer prisma es 30 cm.

Problemas propuestos

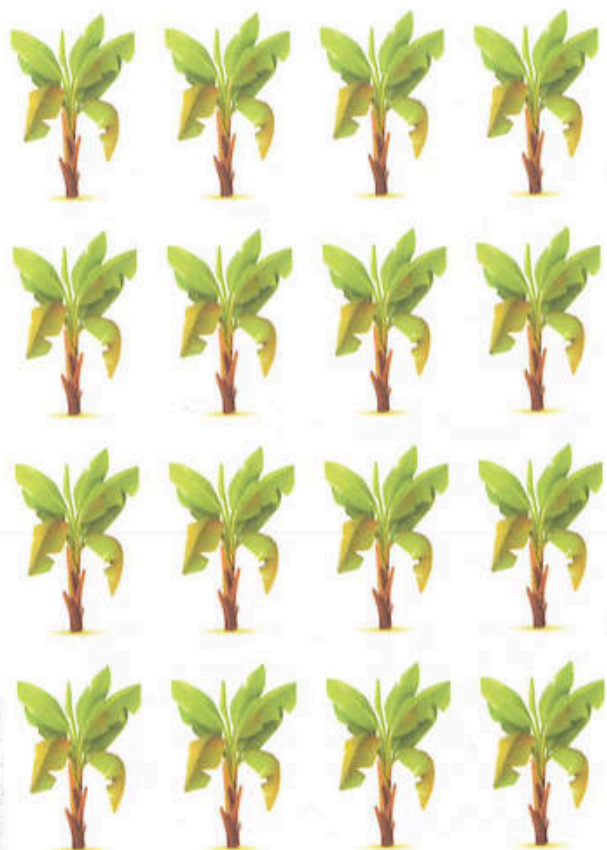
1. Flor construye un prisma cuadrangular, cuya área lateral es de 500 cm^2 y su área total mide $1\,100 \text{ cm}^2$. Si el área de cada base aumenta en 25 %, ¿cuál será la medida del lado de la base?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
2. Benjamín construye un prisma pentagonal que tiene de área total $5\,380 \text{ cm}^2$. Si el área de sus bases mide $1\,380 \text{ cm}^2$ y su altura mide 40 cm, ¿cuál será su nueva área, si se disminuye su altura en 10 %?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
3. Francisco dispone de un tanque en forma de prisma cuadrangular. Sin embargo, este no es suficiente para sus necesidades, por lo que decide mandar a construir otro tanque similar, pero de área lateral 25 % más grande y de medidas 50 cm de lado de la base y 2 m de altura. Si solo modifica la altura en el nuevo tanque, ¿cuál es la altura de su primer tanque?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
4. Andrés desea construir una maqueta de una caja en una escala reducida en un 75 %. Si las medidas de la caja grande son $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$, ¿cuál será el área de la caja construida a escala?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
5. Galo tiene una caja de forma de un prisma rectangular, cuya área total es de $4\,920 \text{ cm}^2$. Las medidas de la base son 45 cm y 20 cm. Y la altura mide 24 cm, pero tuvo un incremento del 20 % en su altura anterior. ¿Cuánto medía el área de la caja anterior?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
6. El terreno de Ximena mide 45 m de largo y 25 m de ancho. Si su hermana le cede parte del terreno y sus medidas aumentan en 15 % por lado, ¿en cuántos metros cuadrados se incrementa el área de su terreno?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
7. Ana construye una caja de forma hexagonal de 40 cm de altura con un área total de $5\,170,56 \text{ cm}^2$ y su área de las bases de $1\,330,56 \text{ cm}^2$. Si desea construir otra caja similar pero de altura 20 % menor, ¿cuál será el área total de la nueva caja?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
8. Álex elabora en cartulina un cilindro que mide de base 3 cm de radio y 10 cm de altura. Si además tiene que construir un prisma cuadrangular de igual altura y con la misma cantidad de cartulina que usó para el cilindro, ¿cuál debe ser el lado de la base del prisma?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.

Pensamiento lógico

Fotocopia esta página y practica.

Une los dieciséis platanales con un mismo trazo (sin levantar el lápiz ni repetir el mismo trazo), usando seis líneas rectas.

Dibuja dos cuadrados de manera que cada animal quede en una región individual.



Multiplicar por 99

Multiplica la cantidad por 100 y **resta** el multiplicando.

$$5 \times 99 = 5 \times 100 = 500 - 5 = 495$$

$$36 \times 99 = 36 \times 100 = 3600 - 36 = 3\,564$$

Ahora, hazlo tú.

$7 \times 99 =$

$4 \times 99 =$

$2 \times 99 =$

$6 \times 99 =$

$13 \times 99 =$

$25 \times 99 =$

$$14 \times 99 = 14 \times 100 = 1\,400 - 14 =$$

$$21 \times 99 = 21 \times 100 = 2\,100 - 21 =$$

$17 \times 99 =$

$34 \times 99 =$

$49 \times 99 =$

$76 \times 99 =$

$19 \times 99 =$

$42 \times 99 =$

La geometría en las vías

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Ciudadanía



Justificación / problemática

El tránsito vehicular es la acción que consiste en pasar de un lugar a otro usando vías o parajes públicos.

En las ciudades es muy común observar el tránsito vehicular y peatonal. Para su buen funcionamiento, las autoridades locales y mundiales fijan reglas que se ven apoyadas con normativas de señalización.

Uno de estos instrumentos de señalización son los conos. Resulta muy común observar los conos de tráfico vehicular que se utilizan para informar la suspensión temporal del tránsito en una determinada zona, para seguridad de quienes transitan por ahí, ya sea porque se están haciendo obras de construcción o porque sucedió un accidente.

Pero no solo hay conos de tránsito vehicular. También los hay de carácter deportivo, muy utilizados en las clases de Cultura Física o en entrenamientos.

Objetivo

Utilizar conocimientos de cuerpos geométricos en situaciones de la vida diaria.

Recursos

- Cartulinas de colores
- Tijeras
- Compás
- Goma
- Juego geométrico

Actividades

- **Investiga** sobre la descripción de los conos de señalización que incluya su forma, medidas y usos.
- **Elabora** un cartel con los conos de señalización de tránsito vehicular.
- **Construye** con cartulina los conos de señalización deportiva y **calcula** sus áreas totales.



Evaluación

1. **Expongan** sus trabajos haciendo hincapié en la descripción de cada cono, y promoviendo el respeto que como ciudadanos y estudiantes debemos tener al momento de observarlos.

Tema: Áreas en la carpintería

Áreas de polígonos

Situación cotidiana

Desde nuestros antepasados hasta la actualidad, las formas geométricas siempre han estado presentes en nuestra vida cotidiana; forman parte de diversos diseños de nuestro hogar: mesas, paredes, esculturas, entre otras.

Las autoridades del colegio quieren colocar vidrio sobre las mesas del preescolar para protegerlas. El perímetro de una mesa con forma de un hexágono regular es de 216 cm.

Calcula el área de la pieza de vidrio que se debe colocar sobre dicha mesita para cubrir y proteger su superficie.

Aproxima resultados a la décima.

Reflexiona

- ¿Cuántos triángulos iguales se pueden obtener de un hexágono regular?
- ¿Cuáles son sus medidas?
- Comprueba la respuesta.
- ¿Cuántos metros cuadrados de vidrio serán necesarios para colocar la protección de vidrio en 8 mesas iguales y en otra que tiene el doble de medida del lado?
- Si el lado de la mesa grande es el doble que el lado de la mesa pequeña, ¿será el área también el doble?

Resuelve la situación

- Un cuadro tiene una superficie con la forma de un polígono regular de seis lados. Si el perímetro de su superficie es de 336 cm, ¿podrá colocarse en una pared que tiene 100 cm de ancho? ¿Cuál es la superficie del cuadro?
- Un constructor necesita cubrir con baldosas una superficie, para lo cual tiene dos opciones: una baldosa en forma de pentágono de 20 cm de lado y otra en forma hexagonal de 18 cm de lado. ¿Qué tipo de baldosa le conviene aplicar y por qué?



Shutterstock, 1403742643

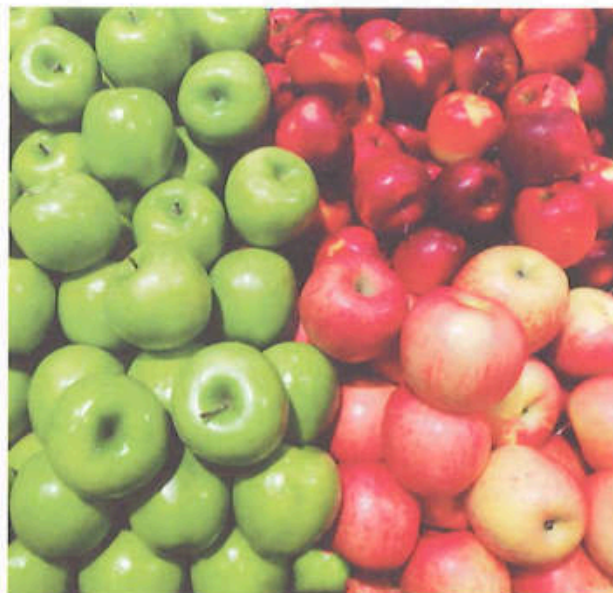
Tema: Cómo calculo en el mercado

Expresiones algebraicas

Situación cotidiana

Las personas que venden en el mercado deben tener muy claro el precio que ponen a los productos que ofrecen para la venta; es decir, deben hacer un cálculo adecuado para no afectarse en sus ganancias ni perjudicar al consumidor.

En un huerto se recolectó cierta cantidad de manzanas verdes y el doble de esa cantidad más 20 kg de manzanas rojas. Luego, se llenaron distintas bolsas con 10 kg de manzanas, de cada tipo. Cada bolsa con manzanas verdes se vendió a \$ 30 y cada bolsa con manzanas rojas, a \$ 35. Si por toda la venta se recibieron \$ 570, ¿cuántos kilos de manzanas se recolectaron en total?



Reflexiona

- **Escribe** una expresión algebraica para la cantidad en kilos de manzanas verdes y rojas.
- Comprueba la respuesta.
- ¿Qué ecuación te ayudó a encontrar la respuesta correcta?

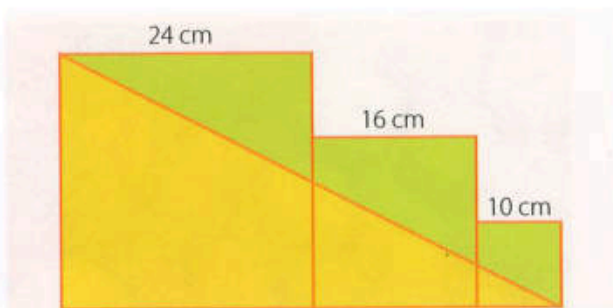
Resuelve la situación

- Pedro compra en la tienda de frutas cierta cantidad de kilogramos de mandarinas y el doble en peso de papaya. En total gasta \$ 12. ¿Cuántos kilogramos de mandarina compró?
Mandarina: \$ 1,80 Papaya: \$ 1,10
- **Organiza** los valores en la tabla sugerida.

Estudiante	Peso	Precio	Costo
Mandarina			
Papaya			
Total USD			

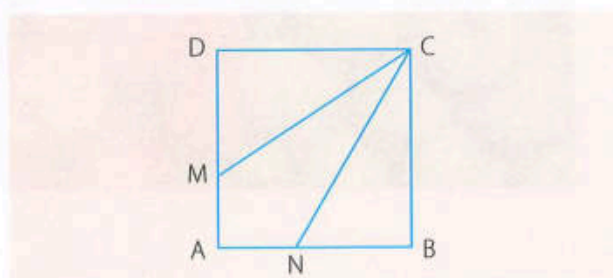
- ¿Por qué es necesario expresar la cantidad de kilogramos de mandarinas compradas con la variable x ?

1. Observa la figura y determina el valor del área verde:



Argumenta la solución.

2. El cuadrado ABCD tiene lados de longitud de 6 cm. Los puntos M y N están sobre AD y AB, respectivamente, de forma que CN y CM dividen el cuadrado en tres regiones de la misma área. ¿Cuál es la longitud de NB?



Argumenta la solución.

3. Cristina está practicando el salto de longitud. El promedio de las distancias que saltó en los primeros intentos de hoy es 3,80 m. En su siguiente intento, saltó 3,99 m y su promedio alcanzó los 3,81 m. ¿Qué distancia debe alcanzar en su próximo salto para aumentar su promedio a 3,82 m?

Argumenta la solución.

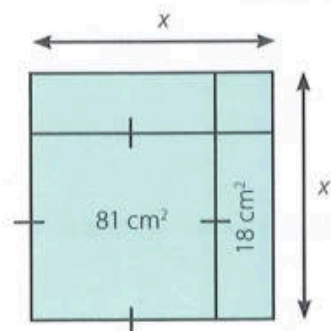
4. En un torneo, la mitad de los competidores se eliminan en cada ronda (si al principio de la ronda el número de competidores es impar, uno de ellos se selecciona al azar y se queda para la siguiente ronda). Si empiezan 100 competidores, ¿cuántas rondas deben pasar para que quede un ganador final?

Argumenta la solución.

5. ¿De cuántas formas puedo elegir 7 números del 1 al 9 de manera que al sumarlos el resultado sea un múltiplo de 3?

Argumenta la solución.

6. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?



Argumenta la solución.

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Si se duplica la expresión 2^4 , se obtiene:

Escoge la respuesta correcta.

- a) 4^4 c) 2^6
b) 2^8 d) 2^5

2. Lee y analiza.

¿Cuál es la expresión que representa el siguiente enunciado?

"El cuádruple de la mitad del cuadrado de un número".

Escoge la respuesta correcta.

- a) $4x^2$ c) $4(2x^2)$
b) $2(4x)^2$ d) $4\left(\frac{x^2}{2}\right)$

3. Lee y analiza.

La suma de dos números es 70, y su cociente es 9. ¿Cuánto es la resta de estos números?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 56 c) 48
b) 54 d) 39

4. Lee y analiza.

La tercera parte de las canicas están en una bolsa y las restantes, en una caja. La mitad de las canicas de la caja, 15, se guarda en la cartuchera. ¿Cuántas canicas están en la bolsa?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 45 canicas c) 20 canicas
b) 30 canicas d) 15 canicas

5. Lee y analiza.

U es a J como H es a:

Escoge la respuesta correcta.

- a)  b)  c)  d) 

6. Lee y analiza.

¿Qué número continúa la serie?

2; 3; 7; 16; 32;

Escoge la respuesta correcta.

- a) 64 c) 41
b) 57 d) 33

7. Lee y analiza.

Si $345\ 765 + 362\ 527 = ABCDED$; entonces el resultado de $(A + B + C + D) \times E$ es:

Escoge la respuesta correcta.

- a) 171 c) 135
b) 153 d) 121

8. Lee y analiza.

Calcula $4(A + B)$

8	6	14
5	A	15
2	14	B

Escoge la respuesta correcta.

- a) 26 c) 52
b) 104 d) 208

9. Lee y analiza.

Una bacteria se duplica cada minuto. Si colocamos una bacteria en una caja de vidrio, ¿después de cuántos minutos hay 64 bacterias?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 4 horas c) 6 horas
b) 5 horas d) 8 horas

10. Lee y analiza.

Si $A = 3 [4 + 2 - (4^2 + 3^3) - 4]$; calcula A disminuido en 5.

Escoge la respuesta correcta.

- a) 123 c) -128
b) 118 d) -118

11. Lee y analiza.

¿Cuál es el número que dividido para 7, luego multiplicado por 4 y aumentado en 100 su resultado es 116?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 14 c) 35
b) 28 d) 42

12. Lee y analiza.

En noveno de Básica hay 30 estudiantes, 10 practican básquet y 16 fútbol. Si todos practican un deporte, ¿cuántos practican los dos deportes?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 6 estudiantes c) 4 estudiantes
b) 5 estudiantes d) 3 estudiantes

13. Lee y analiza.

Determina el valor de X, si $a = 11$, $b = 3$.

$$X = \frac{a+1}{2b-2}$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $X = 6$ c) $X = 3$
b) $X = 4$ d) $X = 2$

14. Lee y analiza.

Si $a = 110^\circ$ y $b = 10^\circ$, ¿cuál es el suplemento de $a + b$?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 70° c) 110°
b) 60° d) 80°

15. Lee y analiza.

¿Qué número falta?

7	5	39
9	3	31
6	8	?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 48 c) 52
b) 50 d) 23

16. Lee y analiza.

Racionaliza esta expresión.

$$\frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ c) $3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{5} - \sqrt{3}$ d) $3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

17. Lee y analiza.

Encuentra el valor numérico.

Para: $a = -1$ $b = 2$ $c = -2$

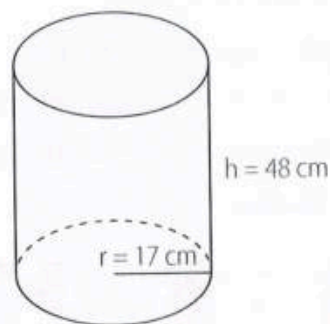
$$\frac{1}{2}a^2bc^3 + 3ab^2\left(\frac{a^2}{bc^2}\right)$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $-\frac{19}{4}$ c) $-\frac{4}{19}$
b) $-\frac{19}{2}$ d) $\frac{19}{2}$

18. Lee y analiza.

Encuentra el área del prisma.

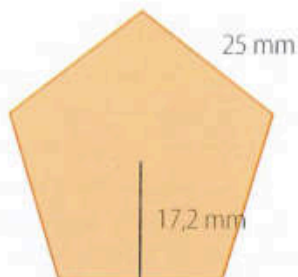


Escoge la respuesta correcta.

- a) $11\,527 \pi \text{ cm}^2$ c) $13\,872 \pi \text{ cm}^2$
b) $35\,343 \pi \text{ cm}^2$ d) $9\,856 \pi \text{ cm}^2$

19. Lee y analiza.

Calcula el área del polígono.



Escoge la respuesta correcta.

- a) $1\,343\text{ mm}^2$ c) $1\,827\text{ mm}^2$
b) $1\,075\text{ mm}^2$ d) $1\,193\text{ mm}^2$

20. Lee y analiza.

¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

Igualdades
1. $(\sqrt{2})^{-4} - \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$
2. $0,5 + 1,22... - \left(0,33... + \frac{2}{9}\right)^{-1} = -\frac{7}{9}$
3. $\left(\frac{3}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi\right) \times \left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1} \times \sqrt{\frac{25}{16\pi^4}}\right) = \frac{1}{4}$
4. $\sqrt{27} + 5\sqrt{128} - \sqrt{243} + 4\sqrt{200} = 80\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

- a) 3 y 4
b) 1 y 3
c) 1 y 2
d) 2 y 4

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |



Relación de la arquitectura con la matemática



Las matemáticas son una herramienta básica para la arquitectura

máticas. Grandes arquitectos emplearon para sus diseños simetría, formas geométricas, fractales y otros patrones de papel tapiz que derivan de la matemática.

La primera influencia matemática definida en la arquitectura es la de Pitágoras. La creencia pitagórica de que «todas las cosas son números» tenía claramente un gran significado para la arquitectura; así por ejemplo, vio la conexión entre la música y los números y comprendió claramente cómo la nota producida por una cuerda se relacionaba con su longitud. Estableció las proporciones de la secuencia de notas en una escala y descubrió que los hermosos sonidos armoniosos dependían de las proporciones de pequeños enteros, lo que llevó a que los arquitectos diseñaran edificios usando estas proporciones. Los números para Pitágoras también tenían propiedades geométricas y la geometría era el estudio de formas que eran determinadas por números. Pero más que esto, los pitagóricos desarrollaron una noción de estética basada en la proporción. Además, la regularidad geométrica expresaba belleza y armonía, y esto se aplicaba a la arquitectura con el uso de la simetría.

Los arquitectos contemporáneos utilizan *softwares* diseñados específicamente para la arquitectura que impliquen el uso de las matemáticas. De esa manera, los arquitectos hacen que las habitaciones y los edificios sean diseñados de cierta manera para sus ocupantes".

"La relación entre la matemática y la arquitectura se remonta a los primeros tiempos en los que el hombre empezó a construir estructuras funcionales. En las antiguas sociedades bizantinas, egipcias, griegas, islámicas y romanas, los matemáticos eran arquitectos, y los arquitectos eran matemáticos. Los matemáticos participaron en el diseño de grandes estructuras como pirámides, estadios, templos y canales de riego.

Sin las matemáticas, en ninguna época histórica, las estructuras carecerían de integridad. Para que un edificio tenga resistencia y estabilidad, debe tener ángulos precisos, longitudes correctas de sus muros y medidas adecuadas para el techo.

La estética arquitectónica o la belleza depende, en gran medida, de las mate-



La geometría es fundamental en la construcción de planos

Fuente: <https://www.arkiplus.com/relacion-de-la-arquitectura-con-la-matematica/>



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Cuál es el tema principal de la lectura?
2. Según la lectura, ¿desde cuándo se relacionan la matemática y la arquitectura?
3. ¿Qué otro título le pondrías a este texto?
4. ¿Cuál es tu opinión acerca de la relación entre la arquitectura y la matemática?
5. ¿A qué personaje histórico se refiere la lectura y por qué?
6. ¿Cómo debe estar construido un edificio para que tenga resistencia y estabilidad?
7. ¿Qué puedes decir de la imagen adjunta a la lectura?



Shutterstock 332701262



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** acerca de la proporción áurea o número de oro y su utilización para el diseño de construcciones. Estas pueden ser antiguas o modernas.
2. **Ingresa** a Internet y **busca** imágenes sobre construcciones, edificios, monumentos, puentes, etc. que te llamen la atención y que resalten a simple vista un diseño geométrico. **Realiza** un *collage* con estas imágenes.
3. **Busca** más información sobre Pitágoras y otros matemáticos que, a la vez, fueron grandes arquitectos.



Shutterstock 116751745

Trabajo colaborativo

4. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior. **Presenten** su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:
 - Debe haber un organizador gráfico.
 - Hay que incluir imágenes.
 - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
 - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock 645682786

1. **Relaciona** las columnas luego, **selecciona** la respuesta correcta.

1. $\left(-\frac{2}{7}\right)^9 + \left(-\frac{2}{7}\right)$ a) 1

2. $\left(-\frac{2}{7}\right)^6 + \left(-\frac{2}{7}\right)^{12}$ b) $-\frac{7}{2}$

3. $\left\{\left[\left(-\frac{2}{7}\right)^6\right]^6\right\}^{-4}$ c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

4. $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1}$ d) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-6}$

A) 1c, 2d, 3b, 4a

B) 1c, 2d, 3a, 4b

C) 1d, 2c, 3a, 4b

D) 1d, 2c, 3b, 4a

2. **Determina** el valor de X que hace posible la igualdad.

$$\sqrt[3]{7^x} = 7^3$$

a) 10 b) 5 c) 3 d) 15

3. Al simplificar la expresión $\left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}}\right)^{-1}$, se obtiene:

a) $\frac{7}{40}$ b) $\frac{40}{7}$ c) $\frac{7\sqrt{2}}{40}$ d) $\frac{19}{14}$

4. **Selecciona** el grupo de radicales que son equivalentes.

a) $\sqrt[10]{2^6}, \sqrt{2^3}, \sqrt[50]{2^{18}}$

b) $\sqrt{2^6}, \sqrt{2^3}, \sqrt{2^{12}}$

c) $\sqrt[10]{2^6}, \sqrt[5]{2^3}, \sqrt[20]{2^{12}}$

d) $3\sqrt{2^6}, \sqrt{2^6}, -4\sqrt{2^6}$

5. Al transformar $2\sqrt[5]{2^7}$ a potencia, se obtiene:

a) $2^{\frac{5}{3}}$ b) $2^{\frac{2}{3}}$ c) $2^{\frac{14}{5}}$ d) $2^{\frac{14}{3}}$

6. Al resolver el polinomio aritmético

$$\left\{\sqrt{(11^2 + 5^2) + 73} + \left(-0,25 + \frac{1}{3}\right)\right\}^{-2}, \text{ se obtiene:}$$

a) $-\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{288}$ c) -288 d) -24

7. **Relaciona** cada expresión con su factor racionalizante. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

1. $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$ a) $\sqrt[3]{4^2}$

2. $\frac{6}{\sqrt[3]{4^2}}$ b) $\sqrt[3]{4^4}$

3. $\frac{6}{\sqrt[3]{4^3}}$ c) $\sqrt[3]{4}$

4. $\frac{6}{2\sqrt[3]{4^4}}$ d) $\sqrt[3]{4^3}$

A) 1c, 2a, 3d, 4b

B) 1a, 2c, 3d, 4b

C) 1b, 2d, 3c, 4a

D) 1b, 2d, 3a, 4c

8. Al racionalizar $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, se obtiene:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

b) $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ d) $-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

9. **Analicen y respondan** en parejas. El polinomio que corresponde a la representación es:



a) $2x^2 - x + 3$

b) $-2x^2 + x + 3$

c) $x^2 - 2x + 3$

d) $-x^2 + 2x - 3$

10. Identifica las afirmaciones verdaderas. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

- a) El doble de un número más el triple de otro se representa por $2x+3y$.
- b) La raíz cuadrada de un número más su cuadrado se representa con $\sqrt{x+x^2}$.
- c) El cociente entre dos números, elevado al cuadrado, se representa con $\left(\frac{x}{y}\right)^2$.
- d) El producto del doble de un número con otro se representa con $\frac{2x}{y}$.

- 1. b y c 3. b y d
- 2. a y b 4. a y c

11. Analiza el siguiente polinomio $3x^2+2xy-4y^2$. Luego, **completa** las frases.

- a) Se trata de una expresión racional
- b) Por el número de términos es un
- c) Su grado absoluto es
- d) Su grado relativo con respecto a y es
- e) Está ordenado con respecto a la letra x en forma

12. El valor numérico del polinomio:

$$-2x^5+4x^3-\frac{2}{3}z^2+2 \text{ para } x=-1 \text{ y para } z=-3 \text{ es:}$$

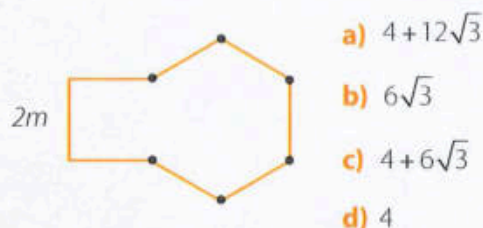
- a) -2 b) -6 c) 2 d) 11

13. El área lateral de un cono de altura 14 cm y radio 4 cm es:

- a) $8\pi\sqrt{53}$ b) $\pi\sqrt{53}$ c) $8\sqrt{53}$ d) $4\pi\sqrt{53}$

Coevaluación

14. El área del polígono irregular de la figura es:



15. Expreso mis emociones. ¿Qué haces cuando te sientes de buen humor y con optimismo en clases?

Autoevaluación

16. Pinta según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

Estoy en proceso

Contenidos	Aplico propiedades de la potenciación y radicación.	
	Identifico tipos de radicales y los transformo en potencias.	
	Racionalizo expresiones numéricas.	
	Resuelvo polinomios y aplico propiedades.	
	Encuentro áreas de polígonos regulares e irregulares.	

Metacognición

- ¿Realizaste las preguntas necesarias a tu docente para aclarar dudas?
- ¿Participaste activamente en los trabajos colaborativos?
- ¿En qué situaciones reales has utilizado estos conocimientos?

unidad 3

Polinomios operaciones. Productos notables. Volúmenes

La primera Misión Geodésica Francesa fue una delegación de científicos enviados por la Academia de Ciencias de París, que llegó a Quito el 29 de mayo de 1736.

Su objetivo fue medir un arco del meridiano terrestre a nivel del Ecuador. Pedro Vicente Maldonado, un gran científico ecuatoriano, fue miembro de esta misión.

A más de cumplir con su propósito, la misión contribuyó a definir el metro lineal. A partir de ese momento, su medida representó la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.



Preguntas generadoras

- En el siglo que corría durante la venida de la Misión Geodésica Francesa, ¿qué forma se concebía que tenía la Tierra?
- **Expresa**, utilizando notación científica, la equivalencia de un metro en relación con el cuadrante del meridiano terrestre.

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Adición y sustracción de polinomios, con signos de agrupación
- Multiplicación de monomios y polinomios. Multiplicación de polinomios
- Productos notables I (Cuadrado de un binomio, producto de la suma por la diferencia de dos términos)
- Productos notables II (Producto de la forma $(a + x)(x + b)$ cubo de un binomio)
- Triángulo de Pascal y teorema del binomio

Geometría y medida

- Volumen de prismas y pirámides
- Volumen de cilindros y conos
- Volumen por descomposición de sólidos

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.2. / O.M.4.5.

Tema 1

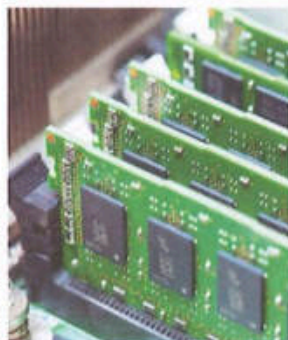
Adición y sustracción de polinomios, con signos de agrupación



Competencia socioemocional

Si no logras llegar a la respuesta de un ejercicio o problema, no te desanimes; vuelve a intentarlo, sé perseverante y no te rindas.

Comenta en clase acerca de esta consideración.



Memoria RAM



Competencia matemática

Los ordenadores tuvieron un precursor mecánico creado, en 1642, por Blaise Pascal.

En nuestro país, en 1902, el matemático y abogado Octavio Cordero Palacios inventó un ordenador mecánico al que nombró "clave poligráfica" o "metaglot". Este dispositivo traducía palabras de una lengua a otra. También inventó un "dispositivo numérico de cálculo para obtener la raíz cuadrada de números".

Indaga sobre Octavio Cordero Palacios y **elabora** una ficha bibliográfica.



Saberes previos

Reduce términos semejantes.

$$3x^2 - 2x + 8x^3 - 5 + 7x - 11x^2 + 4x - 5x^2 + 6 - 3x^3 - x^5 =$$

Los ordenadores actuales pueden ser mejorados en su desempeño al aumentar su memoria RAM. Si un ordenador está diseñado con una cierta cantidad de RAM medida en gigabytes (GB) con la posibilidad de agregarle el triple, ¿cuál es la expresión algebraica que representa la cantidad de memoria inicial, lo posible de agregar y el total máximo de memoria que puede tener ese ordenador?

Como no conocemos la cantidad de memoria colocada inicialmente, usamos x para representarla.

Si la cantidad inicial es x , el triple queda representado con $3x$.

La cantidad máxima posible la obtenemos al sumar la inicial con lo posible de agregar, esto es:

$$x + 3x$$

Como los términos son semejantes al reducirlos, obtenemos: $4x$

Sumar o restar monomios significa obtener una expresión algebraica después de reducir términos semejantes.

Ejemplo 1

Sumar los monomios $3x^2$, $2y$, $-4x^2$, $7z$, $-2y$.

Solución

$$3x^2 + 2y + (-4x^2) + 7z + (-2y) \quad \text{Colocamos los signos de suma.}$$

$$3x^2 + 2y - 4x^2 + 7z - 2y \quad \text{Destruimos paréntesis.}$$

$$-x^2 + 7z \quad \text{Reducimos términos semejantes.}$$

Ejemplo 2

Restar $-2a^3b$ de $-5a^3b$

Solución

$$-5a^3b - (-2a^3b) \quad \text{Identificamos el minuendo y el sustraendo.}$$

$$-5a^3b + 2a^3b \quad \text{Destruimos el paréntesis.}$$

$$-3a^3b$$

Al sumar polinomios, aplicamos la propiedad asociativa y conmutativa, de manera que reagrupamos términos semejantes para reducirlos.

Ejemplo 3

Sumar $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2y - 3y^3$ con $-\frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2y - 3xy^2 + 4y^3$

Solución

$$\frac{1}{2}x^3 + 2x^2y - 3y^3 + \left(-\frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2y - 3xy^2 + 4y^3\right) \text{ Sumamos.}$$

$$\frac{1}{2}x^3 + 2x^2y - 3y^3 - \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2y - 3xy^2 + 4y^3 \text{ Destruimos el paréntesis ().}$$

Aplicamos la propiedad asociativa y la conmutativa.

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}x^3\right) + \left(2x^2y - \frac{1}{4}x^2y\right) - 3xy^2 + (-3y^3 + 4y^3)$$

$$\frac{1}{10}x^3 + \frac{7}{4}x^2y - 3xy^2 + y^3 \text{ Reducimos términos semejantes.}$$

Ejemplo 4

De la suma del polinomio P_1 con el polinomio P_3 , restar el polinomio P_2 .

$$P_1: -4a^4 - 3a^2 - a + 1$$

$$P_2: 2a^5 - [a^4 - (7a^2 + 1) - 3a^3]$$

$$P_3: 10a^4 - 8a^3 - 3a^2$$

Solución

Sumamos los polinomios P_1 y P_3 :

$$\begin{array}{r} -4a^4 \quad -3a^2 - a + 1 \\ 10a^4 - 8a^3 - 3a^2 \\ \hline 6a^4 - 8a^3 - 6a^2 - a + 1 \end{array}$$

Simplificamos el polinomio P_3 :

$$\begin{array}{l} 2a^5 - [a^4 - (7a^2 + 1) - 3a^3] \\ 2a^5 - [a^4 - 7a^2 - 1 - 3a^3] \\ 2a^5 - a^4 + 7a^2 + 1 + 3a^3 \\ 2a^5 - a^4 + 3a^3 + 7a^2 + 1 \end{array}$$

Luego, colocamos en forma vertical los polinomios, cambiando de signo al polinomio sustraendo.

$$\begin{array}{r} 96a^4 - 8a^3 - 6a^2 - a + 1 \\ -2a^5 + a^4 - 3a^3 - 7a^2 \quad -1 \\ \hline -2a^5 + 97a^4 - 11a^3 - 13a^2 - a - 1 \end{array}$$

El polinomio resultante de la operación es:

$$96a^4 - 8a^3 - 6a^2 - a + 1$$



Recuerda que...

La suma de polinomios se puede hacer en forma vertical. Para ello, es recomendable ordenar en forma descendente y completar los polinomios.



DFA

Mantener contacto visual es clave cuando hay habilidades diferentes o dificultades auditivas.



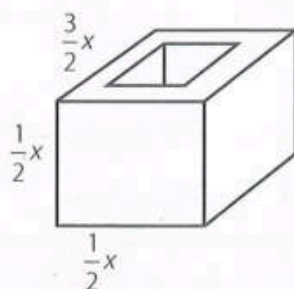
Interdisciplinariedad

Matemática y Música

Podemos encontrar las raíces de polinomios en las teclas de un piano. Al pulsar una tecla se activa un martillo que golpea una cuerda que vibra a determinada frecuencia (velocidad). Esta define la nota. La frecuencia es un número, y, de hecho, es la raíz de un polinomio que se define a partir de las características de la cuerda. Esto mismo sucede con cualquier instrumento u objeto que vibra.

Responde: ¿qué nombre recibe el polinomio que tiene dos monomios?

7. Obtén el volumen disponible de la caja de la figura.



8. Resuelve.

a) $-a^2 - \{7a^2 + 3ab - [8a^2 - (4ab - a^2)]\}$

b) $-[2yz - (\frac{1}{5}xz + \frac{1}{2}yz)] + (0,6yz - \frac{3}{10}xz)$

c) $2x^2 - x + 6; x^2 - 5x + 4$

d) $7a^2 - 5ab + 3b^2; -a^2 - 11b^2$

e) $3m^3 - 8m^2p - p^2; 12m^2p + p^2 - 9$

f) $\frac{2}{5}x^3 - 10x^2; \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2$

g) $8x^2 - 6xy + 4y^2; -2x^2 - 11xy + 12y^2; -x^2 - 9xy + 3y^2 - 1$

9. Suma los polinomios.

a) $7x^3 + 2x^2 - 1; -3x^3 - 7x^2 + 8$

b) $-\frac{3}{2}ac^2 + \frac{4}{3}ac^3; \frac{8}{5}a^2c - \frac{1}{7}ac^3 + ac^2$

10. Realiza las sustracciones.

a) De $18m^4n^3 - 6m^3n^2 + 6$ restar $-2m^4n^3 + 12$

b) Restar $\frac{12}{5}x^3 - 7x^2 + 2$ de $x^4 + \frac{7}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}$

Trabajo colaborativo

11. Trabajen en parejas y resuelvan.

Formulen 4 polinomios que contengan términos semejantes. **Propongan** operaciones entre ellos e intercambien con otra pareja para que las resuelva.

12. Completa los términos de cada operación. Resuelve en tu cuaderno.

a)
$$\begin{array}{r} 6a^2 - a + 8 \\ a^2 + 7a + 10 \\ -2a^2 + 8a \\ \hline 7a^2 - a + 22 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^3 - a^2 + 0,1a - \frac{1}{5} \\ a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 6a - \frac{1}{2} \\ 5a^3 + \frac{1}{2}a^2 + a - 3 \\ \hline \frac{37}{6}a^3 - \frac{17}{4}a^2 + \frac{13}{2}a - \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 7x^2 - xy + 3y^2 + 3 \\ x^2 - 8y^2 + \\ -4xy + y^2 \\ \hline x^2 - 9xy + 4y^2 + 8 \end{array}$$

13. Efectúa las operaciones indicadas con los siguientes polinomios:

$P_1: ax^2 - 2a^2x + 3$

$P_2: 10ax^2 + 3a^2x - 3$

$P_3: -12a^2x - ax^2 - 6$

a) $P_1 + P_2 - P_3$

b) $-P_1 - P_2 + P_3$

Actividad indagatoria

14. Investiga qué significa $P(x)$. Luego, formula dos ejemplos de $P(x)$.

Expón tu investigación junto con la suma y resta de ellos.

I.M.4.2.1.

1. **Obtén** la suma de los monomios $M_1 + M_2 + M_3$. Luego **escribe** la expresión algebraica resultante.

M_1 : 

M_2 : 

M_3 : 

$M_1 + M_2 + M_3 =$

2. **Suma** los siguientes monomios.

- a) $2x^5y - 3x^5y + 5x^5y - x^5y$
- b) $16a^4b^3 - 2a^4b^3 + 3a^4b^3 - 5a^4b^3$
- c) $2m^3n^4 + m^3n^4 - 7m^3n^4 + 10m^3n^4$
- d) $-8p^7q^{-1} + 15p^7q^{-1} - 6p^7q^{-1} + 12p^7q^{-1}$
- e) $5x^2yz^3 - 25x^2yz^3 - 15x^2yz^3 + 30x^2yz^3$
- f) $-24a^5c^{-2} + 14a^5c^{-2} + 8a^5c^{-2} - 7a^5c^{-2}$
- g) $120mnp - 200mnp + 150mnp - 320mnp$
- h) $18ax^{-3} + 22ax^{-3} - 6ax^{-3} - 30ax^{-3} + ax^{-3}$
- i) $525b^{-4}n^{-5} - 820b^{-4}n^{-5} - 405b^{-4}n^{-5} + b^{-4}n^{-5}$

3. **Calcula** la suma de cada grupo de monomios.

- a) $3m^2; -4m^2; -7m^2; 2m^2$
- b) $20z^3; -80z^3; 18z^3; 12z^3$
- c) $1,7ab^2; \frac{4}{3}ab^2; ab^2; \frac{14}{9}ab^2$
- d) $\frac{3}{4}x^3y + 0,75x^3y - \frac{3}{8}x^3y - x^3y$

e) $-14,6m^4n; -2,4m^4n; 7m^4n; \frac{21}{10}m^4n$

f) $3\sqrt{2}r^3; -2r^3; -7\sqrt{2}r^3; -4r^3$

g) $-2\sqrt{\frac{x}{y}}; \frac{5}{6}\sqrt{\frac{x}{y}}; \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}; -\frac{7}{6}\sqrt{\frac{x}{y}}$

4. **Utiliza** la propiedad asociativa y conmutativa para calcular $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$. **Escribe** la expresión algebraica resultante.

M_1 : 

M_2 : 

M_3 : 

M_4 : 

$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 =$

5. **Suma** cada grupo de monomios.

- a) $2ab; -3a^2b; -7a^2b; -8ab$
- b) $3x^4; -8x^4; 2x^2; -7x^4; -11x^2$
- c) $-\frac{2}{3}m^2n; -\frac{3}{2}mn^2; -\frac{7}{6}m^2n; -\frac{1}{2}m^2n; mn^2$
- d) $0,5st^2; 0,15; -\frac{3}{4}st^2; \sqrt{2}t; 0,35$

6. **Obtén** la diferencia.

- a) De $8x^5$ restar $-3x^5$
- b) Restar $\frac{1}{2}mn$ de $-5mn$
- c) De $109a^3bc$ restar $10a^3bc$

Tema 2

Multiplicación de monomios y polinomios

Competencia comunicacional

Los comerciantes de los mercados y plazas no utilizan calculadoras para realizar sus cuentas. Si bien sus matemáticas son básicas, las manejan con mucha prolijidad y exactitud.

Interdisciplinariedad

Matemática y Mecatrónica

En Ecuador, estudiantes universitarios de la especialidad electrónica y mecatrónica elaboran robots que son controlados a través de celulares.

Estos estudiantes crean sus robots con el propósito de competir en ferias científicas.

Una de las categorías de competencia es el fútbol.



Robot manipulador

Recuerda que...

En el estudio de las propiedades de la potenciación de números reales, se mencionó que:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$x^n (x^m + a) = x^{n+m} + ax^n$$

Desequilibrio cognitivo

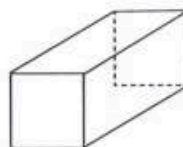
Si $P_1: -3x^4 - 4x^2 + 2x - 9$, ¿a qué es igual $2P_1$? **Explica** cómo lo calculaste.

Recordemos que las expresiones algebraicas que se forman a partir de la unión de dos o más variables y constantes, vinculadas a través de operaciones de suma, resta o multiplicación, se denominan polinomios.

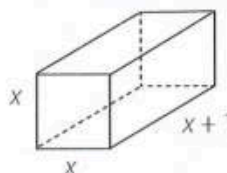
Vamos a ver cómo se multiplican monomios y polinomios.

Para una competencia de robots, un estudiante creó un robot manipulador de forma prismática, cuya cara frontal es cuadrangular y sus caras laterales son rectangulares. Si uno de los lados del rectángulo de las caras laterales es 1 cm más grande que el otro lado, ¿cuál es la expresión algebraica que expresa en forma aproximada el volumen del robot?

Lo primero que hacemos es esquematizar la forma del robot.



Como no conocemos el valor de ninguna de las aristas, asignamos la letra x como medida de las aristas de las caras cuadrangulares. De acuerdo con el enunciado, la arista más larga de las caras rectangulares es 1 cm más que la corta, por lo tanto, mide $x + 1$.



Para calcular el volumen de este prisma, consideramos la cara cuadrangular como base y calculamos su área, que multiplicaremos luego con la altura para obtener el volumen.

$$V = x \cdot x \cdot (x + 1)$$

Aplicamos la propiedad de multiplicación de bases iguales de la potenciación.

$$V = x^2 \cdot (x + 1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos el volumen requerido.

$$V = x^3 + x^2$$

Cuando multiplicamos monomios entre sí, multiplicamos sus coeficientes, y obtenemos la parte literal al aplicar la propiedad de la potenciación de producto de bases iguales.

Ejemplo 1

Multiplicar los siguientes monomios.

a) $4a^2b$ con $8a^3b^6$ b) $-5x^5y$ con $\frac{3}{10}y^{-5}z^4$ y con $-\frac{1}{6}mx^{-2}z^3$

Solución

a) $4a^2b \cdot 8a^3b^6 = (4 \cdot 8)(a^{2+3})(b^{1+6}) = 32a^5b^7$

b) $(-5x^5y)\left(\frac{3}{10}y^{-5}z^4\right)\left(-\frac{1}{6}mx^{-2}z^3\right) = \left(-5 \times \frac{3}{10} \times -\frac{1}{6}\right)(x^{5-2})(y^{1-5})(z^{4+3})$
 $= \frac{1}{4}x^3y^{-4}z^7$

En la multiplicación de un número por un polinomio, un monomio por un polinomio o un polinomio por otro, aplicamos la propiedad distributiva.

Ejemplo 2

Realizar las operaciones.

a) $-5(a^5b - 4ab^2 + 1)$ c) $(3x^2 + 2x - 1)(x - 6)$
 b) $7m^2n^3(-2m + 2n - 6)$

Solución

En los tres casos aplicaremos la propiedad distributiva e iremos multiplicando monomio por monomio.

a) $-5(a^5b - 4ab^2 + 1) = -5a^5b + 20ab^2 - 5$

b) $7m^2n^3(-2m + 2n - 6) = -14m^3n^3 + 14m^2n^4 - 42m^2n^3$

c) $(3x^2 + 2x - 1)(x - 6) = 3x^3 - 18x^2 + 2x^2 - 12x - x + 6$

Como podemos observar, este polinomio resultante tiene términos semejantes, los cuales deben ser reducidos.

$$3x^3 - 16x^2 - 13x + 6$$



Recuerda que...

La multiplicación de polinomios puede ser resuelta en forma vertical.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 1 \\ \times \quad x - 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - x \\ - 18x^2 - 12x + 6 \\ \hline \end{array}$$

$$3x^3 - 16x^2 - 13x + 6$$



DFA

Cuando hay dificultades visuales o una discapacidad visual, la mejor forma de ayudar es proporcionando explicaciones de tipo descriptivo, concreto, preciso y claro.



Competencia socioemocional

Es importante que realices todos los ejercicios que te propongan resolver. Conforme avances con los contenidos, adquirirás destrezas que te ayudarán a resolver ejercicios más complejos y a ganar seguridad.

Escribe una corta reflexión.

I.M.4.2.1.

1. Realiza los productos entre monomios.

a) $-2a \cdot 5a =$

b) $-\frac{3}{5}x^2 \cdot \frac{10}{9}xy^5 =$

c) $\sqrt{3}m^2 \cdot \sqrt{6}m^{-3} =$

d) $(-2a^4)(2a^2)(-5a) =$

e) $(-3y^5)(-2y^2)(-4y) =$

f) $(0,75x^3y)(-2x^2y^4)(-5xy^3) =$

g) $(-0,5a^3y^2)(mny)(-2m^3n^2y^3) =$

h) $\left(\frac{1}{8}r^3s\right)\left(-\frac{2}{11}s^4t^{-1}\right)\left(\frac{22}{3}r^{-6}t\right) =$

i) $(3\sqrt{2}a^5)(2\sqrt{2}b^3)(-5\sqrt{2}ab^{-1}) =$

j) $(-5x^2)(2x) =$

k) $(-a^2b^2)(4a^3b^3) =$

l) $6m^2(-12mn) =$

m) $(-3a^2b^3c)(-14a^2b) =$

n) $-2xyz(-9x^2y^3) =$

o) $0,2a^5(a^2b)(8b^2) =$

2. Halla los siguientes productos.

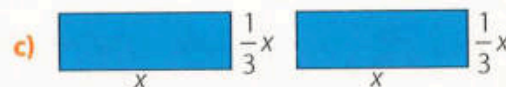
a) $(2a^{m+1})(-3a^{m+2}) =$

b) $(-0,3x^{n+2})(5x^{3n-2}) =$

c) $(-\sqrt{7}m^{x-6})(\sqrt{7}m^{-x+6}) =$

d) $\left(\frac{2}{5}x^{-n-3}\right)\left(-\frac{5}{3}x^{4n+3}\right)(2,5x) =$

3. Obtén el área total.



4. Multiplica los monomios por los polinomios.

a) $-2(x^3 - 6x^2 + 4x - 1)$

b) $5(a^5b^4 - 3a^4b^3 - 8a^3b^2)$

c) $-\frac{3}{2}\left(-\frac{6}{5}m^6 + \frac{8}{3}m^5 - \frac{1}{6}m^4 - 2\right)$

d) $-2\sqrt{5}(-\sqrt{5}x^2y + \sqrt{2}x^3y^2 - 4\sqrt{5}x^2y^3 - 1)$

5. Obtén los productos.

a) $2x^2(-3x^3 + 2x^2 - 6x + 4)$

b) $-x^2y^2(x^4 - y^4 + z^2 - x^2y^2 + y^2z^2)$

c) $(-a^6 + 3a^5 - 2a^4 + 3a^2 + 7a - 6)(-2a^2)$

d) $\frac{16}{3}ab^2\left(\frac{9}{8}a^2 - \frac{6}{5}b^2 + \frac{3}{8}ab - \frac{3}{2}c\right)$

e) $0,6s^2t^2\left(\frac{5}{2}st - \frac{1}{6}s^{-4} + \frac{15}{2}t^{-6}\right)$

f) $\sqrt{2}a^{x-1}(\sqrt{3}a^{x+2} - 2\sqrt{2}a^{-x-1} - \sqrt{2}a^{x+1})$

g) $(2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)(-3)$

h) $(7x^4 - 6x^3 + 2x - 5)(4)$

i) $(2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 11)(3x^2)$

j) $(5a^3 - a^2b + 4ab^2 - 7b^3)\left(-\frac{2}{7}a^2b\right)$

k) $(2x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 3)\left(\frac{3}{2}x\right)$

6. Resuelve aplicando la propiedad distributiva.

a) $(2x - 4)(6x^2 - 4x + 3)$

b) $(m - n^2)(am - an - 3)$

c) $(x - y)(x^2y + xy^2 - xy)$

d) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

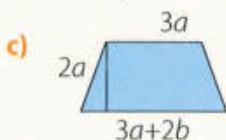
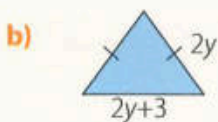
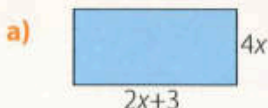
e) $(2x - 1)(x^3 - 3x^2 + 4)$

f) $(4a^2 + 3a + 1)(a + 1)$

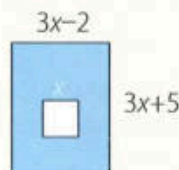
g) $(4x^2 + x + 1)(2x + 1)$

h) $(2x^3 + 4x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 1)$

7. Encuentra el área de las figuras.



8. Calcula el área sombreada.



9. Multiplica.

a)
$$\begin{array}{r} 6a^2 + 2ab - 8b^2 \\ \times \quad 3a - 2b \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ \times \quad \quad \quad x^2 - 5x + 3 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}m^3 - \frac{2}{5}m^2n + \frac{1}{3}mn^2 + \frac{1}{2}n^3 \\ \times \quad \quad \quad 2m + 3n \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 2x^{m+3} - 4x^{m+2} - 3x^{m+1} - 2x^m \\ \times \quad \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{1}{4}x^{m-2} + x^{m-3} \\ \hline \end{array}$$

10. Realiza las siguientes operaciones, si:

$Q = x^3 - 10x - 12x^2$; $P = 8 - 10x - 12x^2$; $R = 5x - 7$

a) $(P \cdot R) - Q =$

b) $(Q \cdot R) - P =$

11. Selecciona la respuesta correcta al resolver.

$(4x^2 - 3x + 7)(-x^2 + 2x - 6)$

a) $4x^4 + 11x^3 + 37x^2 - 32x + 42$

b) $4x^4 + 11x^3 - 37x^2 + 32x - 42$

c) $4x^4 - 11x^3 + 37x^2 + 32x - 42$

d) $-4x^4 + 11x^3 - 37x^2 + 32x - 42$

Trabajo colaborativo

12. Trabajen en parejas y resuelvan.

Formulen dos polinomios $P(x)$, uno de cuarto grado y otro de tercer grado, con coeficientes fraccionarios. Intercámbienlos con otra pareja para que los multiplique.

Actividad indagatoria

13. Investiga el proceso que se debe seguir para obtener el cuadrado y cubo de un polinomio.

Explica en clase con un ejemplo.



Interculturalidad

La matemática es fundamental para la gente que vive en el campo. Esta les ayuda a medir sus terrenos, dividirlos en parcelas; para sus plantaciones; para establecer la cantidad de semillas que necesita, los productos que vende, entre otros.

Indaga y elabora un párrafo acerca de la importancia de las matemáticas en la agricultura.



Memorias de computador



Competencia comunicacional

A fin de que un robot realice las funciones para las que fue creado, debe contar con un circuito de control.

Esos circuitos de control se diseñan y luego son elaborados en placas de circuito impreso, donde se colocan los elementos electrónicos. Estas placas son hechas a base de cobre para la conducción, y de un material aislante, como, la baquelita.



Saberes previos

Efectúa en tu cuaderno los productos:

$$(2x^2 - 5)\left(\frac{3}{2}x^2 - 1\right)$$

$$(ax - bx^2)(2ax + 3bx^2)$$

Se denomina producto notable a una multiplicación de expresiones algebraicas que cumple reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin realizar la multiplicación.

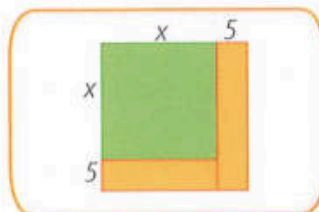
Los productos notables facilitan el proceso de multiplicación mediante reglas específicas dadas.

Veamos algunos productos notables.

Cuadrado de un binomio

En el diseño de un circuito impreso se ha tomado en consideración usar una placa de forma cuadrangular, de la cual se sabe a ciencia cierta que se dejará un margen de 5 mm, tanto en la parte inferior como del lado derecho. De ese margen hacia adentro se podrán colocar pistas de cobre y los componentes electrónicos necesarios. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de esa placa?

Elaboramos un esquema de la forma de la placa y colocamos las medidas proporcionadas como datos. Al valor desconocido lo asignamos con la letra x.

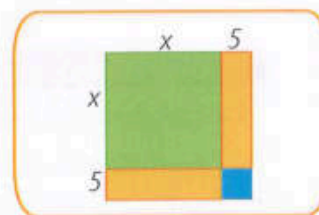


El gráfico nos muestra un cuadrado cuyo lado mide $x + 5$. Por lo tanto, su área es:

$$A = (x + 5)(x + 5)$$

$$A = (x + 5)^2$$

Otra forma de obtener el área de la placa es dividiéndola en cuatro áreas.



Obtenemos el área total al sumar las cuatro áreas.

$$A = x^2 + 5x + 5x + 5^2$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$A = x^2 + 10x + 25$$

Como se trata de la misma placa, podemos decir que:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Al analizar los dos lados de la igualdad, podemos concluir que en el segundo miembro tenemos el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término con el segundo y el cuadrado del segundo término.

Generalizando, tenemos que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1

Desarrollar los siguientes binomios al cuadrado:

a) $(y+9)^2$

c) $\left(0,3r^{-4} - \frac{3}{5}s^3t^2\right)^2$

b) $(5x-3y^2)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}x^{m+1} - 2n\right)^2$

Solución

Aplicamos la regla $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$, observando el signo.

a) $(y+9)^2 = y^2 + 2(y)(9) + 9^2 = y^2 + 18y + 81$

b) $(5x-3y^2)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3y^2) + (3y^2)^2 = 25x^2 - 30xy^2 + 9y^2$

c) $\left(0,3r^{-4} - \frac{3}{5}s^3t^2\right)^2 = \left(\frac{1}{3}r^{-4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}r^{-4}\right)\left(\frac{3}{5}s^3t^2\right) + \left(\frac{3}{5}s^3t^2\right)^2$
 $= \frac{1}{9}r^{-8} - \frac{2}{5}r^{-4}s^3t^2 + \frac{9}{25}s^6t^4$

d) $\left(\frac{1}{2}x^{m+1} - 2n\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)(2n) + (2n)^2$
 $= \frac{1}{4}x^{2m+2} - 2nx^{m+1} + 4n^2$

Producto de la suma por la diferencia de dos términos

Es el producto de dos binomios conjugados o producto de la suma por la diferencia de dos términos: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo 2

Encontrar el producto de los binomios conjugados.

a) $(2a-5b)(2a+5b)$ b) $\left(\frac{1}{4}y^n + \frac{4}{5}x^m\right)\left(0,25y^n - \frac{4}{5}x^m\right)$

Solución

Observamos que los binomios sean conjugados, es decir, que tengan términos iguales con signo contrario, y aplicamos la regla: $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

a) $(2a-5b)(2a+5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$

b) $\left(\frac{1}{4}y^n + \frac{4}{5}x^m\right)\left(0,25y^n - \frac{4}{5}x^m\right) = \left(\frac{1}{4}y^n\right)^2 - \left(\frac{4}{5}x^m\right)^2 = \frac{1}{16}y^{2n} - \frac{16}{25}x^{2m}$

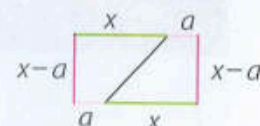


Recuerda que...

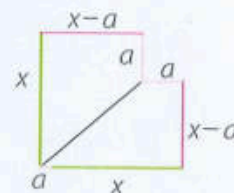
Para la demostración geométrica de

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2,$$

construimos un rectángulo de medidas $(x+a)$ y $(x-a)$. Luego, trazamos una recta, de manera que obtenemos dos trapecios.



Separamos los trapecios. Giramos el primero a la izquierda y luego hacia abajo, de modo que al unirlo al segundo trapecio, obtengamos la siguiente construcción:



Aquí observamos un cuadrado de lado x , al que le falta un cuadrado de lado a .

Es decir, tenemos que:

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

I.M.4.2.2.

1. Expresa el área de cada cuadrado.

a)  $x - 3$

c)  $\frac{3}{4}x + 1$

b)  $2y + 4$

d)  $\frac{1}{3}a + 7$

2. Completa la siguiente tabla.

x	y	x^2	$2xy$	y^2	$x^2 + 2xy + y^2$
2a	3b				
6y	9z				
4b	a^2				
$\frac{1}{2}r$	$\sqrt{2}s^2$				

3. Obtén los productos notables.

a) $(x - 2y)^2 =$

b) $(3a + 7)^2 =$

c) $(6x^2 - 1)^2 =$

d) $(2ab + 5)^2 =$

e) $(3r^2t - 2)^2 =$

f) $(4x^3 + 2y)^2 =$

g) $(8m^6 + 3n)^2 =$

h) $(7u^3v + 4r^4)^2 =$

i) $(\sqrt{5}y^3 - \sqrt{10}z^3)^2 =$

j) $(\sqrt{2}a - \sqrt{2}b)^2 =$

4. Desarrolla los binomios.

a) $\left(\frac{3}{8}a - \frac{2}{3}\right)^2 =$

b) $\left(0,16x^3 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 =$

c) $\left(\frac{5}{4}w^2 - 0,3z^3\right)^2 =$

5. Resuelve los productos notables.

a) $(x^m - y^n)^2 =$

b) $(a^{m+3} + b^{n+2})^2 =$

c) $(2r^{x+1} - 4s^{x-1})^2 =$

d) $\left(\sqrt{5}a^{2n} - \frac{1}{2}b^{3m}\right)^2 =$

6. Resuelve y escribe la medida del lado del cuadrado, cuya área es la expresión dada.

a) $9u^2 + 12u + 4$

b) $64x^2 - 96x + 36$

c) $\frac{4}{9}y^2 - 4y + 9$

d) $4x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}$

7. Completa la siguiente tabla.

a	b	$(a + b)^2$	$(a + b)(a - b)$
m	2		
2x	3		
p^2	4q		

8. Aplica la propiedad asociativa para convertir a cada trinomio en binomio. Luego realiza el producto. Sigue el ejemplo:

$$\begin{aligned}(x+y-3z)^2 &= [(x+y)-3z]^2 \\ &= (x+y)^2 - 2(x+y)(3z) + 9z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 6xz - 6yz + 9z^2\end{aligned}$$

a) $(2a-3b-4c)^2 = [(2a-3b)-4c]^2$

b) $(5x^2+3y+2z)^2 = [(5x^2+3y)+2z]^2$

c) $(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+1)^2 = [(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)+1]^2$

9. Expresa el área de las figuras.

a)  $x-2$
 $x+2$

b)  $2x+3$
 $2x-3$

c)  $\frac{1}{2}y-10$
 $\frac{1}{2}y+10$

10. Obtén el producto notable.

a) $(x-3)(x+3) =$

b) $(2x-6)(2x+6) =$

c) $(6a^2+3b)(3b-6a^2) =$

d) $(0,1x^2+0,2y^3)(0,1x^2-0,2y^3) =$

e) $\left(\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}y^2\right)\left(\frac{1}{8}z^{-2}-\frac{1}{3}y^2\right) =$

f) $(m-1,4a)(m+1,4a) =$

g) $(r^{m+1}+25^n)(r^{m+1}-25^n) =$

h) $(8a^{x-1}-3b^{x+1})(3b^{x+1}+8a^{x-1}) =$

i) $\left(\frac{2}{7}x^{n-2}-\frac{1}{4}y^{-1}\right)\left(\frac{2}{7}x^{n-2}+\frac{1}{4}y^{-1}\right) =$

11. Escribe en tu cuaderno el término o los términos faltantes para que se cumpla el producto.

a) $(3a-2b) \quad = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

b) $(2x+y) \quad = 4x^2 - 4xy + y^2$

c) $(7x-4y) \quad = 49x^2 - 16y^2$

d) $\left(\frac{1}{8}x^5+2\right)\left(\frac{1}{8}x^5-2\right) = \frac{1}{64}x^{10}-4$

e) $(x^{2m}-3)(3+x^{2m}) = -9$

12. Determina los siguientes productos notables.

a) $(a-2b+3c)^2$

b) $(x-2)^2$

c) $(6x+2y) \cdot (6x-2y)$

d) $(\sqrt{x}+10)^2$

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3x}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3x})$

f) $(\sqrt{20m}-\sqrt{5n})^2$

Trabajo colaborativo

13. Trabajen en parejas y resuelvan.

Organicen grupos de tres integrantes para explicar por qué $(2y+3)(-2y-3)$ es igual a $(-2y+3)^2$, y por qué $(7x-2y)(-7x-2y) = 4y^2 - 49x^2$, usando productos notables.

Actividad indagatoria

14. Investiga la demostración del producto notable $(x-a)^2$. Expón en clase.



Desequilibrio cognitivo

¿Cómo desarrollarías el cubo del binomio $x + 1$? Explica oralmente.

Los productos notables están íntimamente relacionados con fórmulas de factorización que trataremos más adelante, por lo que su aprendizaje facilita la solución de diversas multiplicaciones con ciertas características.

En este tema, se estudiarán el producto de la forma $(x + a)(x + b)$ y el binomio al cubo.

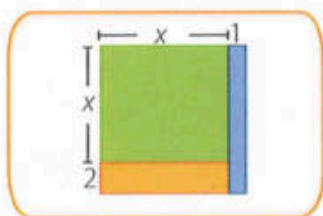
Producto de la forma $(x + a)(x + b)$

Una mano robótica, al ser un dispositivo electrónico, requiere de una placa de circuito impreso controlador. Si durante el diseño se eligió una placa cuadrangular de cierta medida, pero luego se observó la necesidad de agregarle 1 cm a la izquierda y 2 cm en la parte inferior, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área de la placa modificada?

Realizamos un esquema de la modificación que se le hizo a la placa.

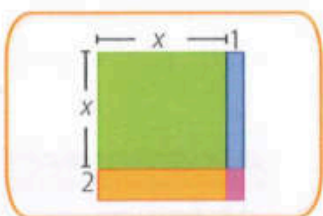


Mano de un robot



El gráfico nos permite ver un rectángulo de lados $x + 1$ y $x + 2$, cuya área es:
 $A = (x + 1)(x + 2)$

El área de esta placa también se puede obtener si la dividimos en cuatro secciones como se muestra a continuación:



Si calculamos el área de cada sección y las sumamos, tenemos el área de la placa.
 $A = x^2 + x + 2x + 2$
 Reduciendo términos semejantes, queda:
 $A = x^2 + 3x + 2$

Dado que se trata de la misma área, deducimos que:

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

Al analizar lo obtenido en el segundo miembro de la igualdad, podemos decir que el primer término es el término común de los dos binomios elevado al cuadrado; el segundo término tiene el coeficiente que resulta de la suma algebraica de los dos términos no comunes de los binomios; y el tercer término resulta del producto de los mismos dos términos no comunes.

Competencia comunicacional

Otro dispositivo electrónico en el que estudiantes ecuatorianos han puesto interés de invención es la prótesis de mano.

Mediante este dispositivo, las personas que por alguna razón perdieron una extremidad superior tienen la esperanza de sustituirla para mejorar su calidad de vida.

Responde: ¿qué rama de la ciencia se ocupa de diseñar, construir y programar a los robots?

El producto notable de dos binomios con un término común se resuelve así:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplo 1

Obtener los productos notables.

a) $(2x+3)(2x-4)$

b) $\left(\frac{2}{5}m-3n\right)\left(\frac{2}{5}x-n\right)$

Solución

a) $(2x+3)(2x-4) = (2x)^2 + (3-4)x + (3)(-4) = 4x^2 - x - 12$

b) $\left(\frac{2}{5}m-3n\right)\left(\frac{2}{5}m-n\right) = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 + (-3n-n)\frac{2}{5}m + (-3n)(-n)$
 $= \frac{4}{25}m^2 - \frac{8}{5}mn + 3n^2$

Binomio al cubo $(a+b)^3$

Para obtener el resultado de un binomio al cubo, seguiremos estos pasos:

1. Descomponemos la potencia en dos factores: $(a+b)^2(a+b)$
2. Desarrollamos el binomio al cuadrado: $(a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
3. Multiplicamos aplicando la propiedad distributiva:

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

4. Reducimos términos semejantes: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Un binomio al cubo es igual al cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primer término con el segundo término, más el triple del primer término con el cuadrado del segundo término y más el cubo del segundo término.

Si el binomio tiene signo negativo $(a-b)^3$, los signos van alternados:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo 2

Resolver $\left(5x - \frac{1}{5}y\right)^3$

Solución

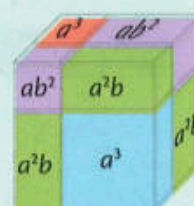
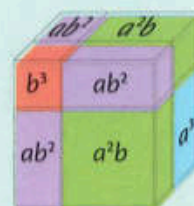
$$\left(5x - \frac{1}{5}y\right)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2\left(\frac{1}{5}y\right) + 3(5x)\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \left(\frac{1}{5}y\right)^3$$

$$= 125x^3 - 15x^2y + \frac{3}{5}xy^2 + \frac{1}{125}y^3$$



Recuerda que...

Representación geométrica del cubo del binomio $(a+b)^3$

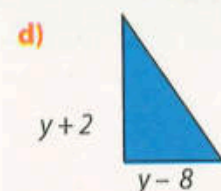
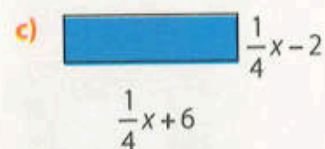
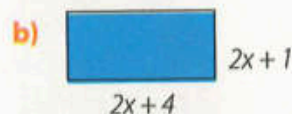
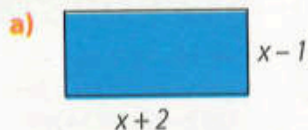


DFA

El hecho de que haya una discapacidad auditiva no significa que el tono de voz con el que se habla debe ser exagerado o excesivo. Basta con que haya claridad al momento de comunicarse.

I.M.4.2.2.

1. Expresa y calcula el área de los rectángulos.



2. Desarrolla los productos.

- a) $(z+3)(z+8) =$
- b) $(u-4)(u+7) =$
- c) $(x-10)(x-2) =$
- d) $(3x+2)(3x+6) =$
- e) $(4a-3)(4a+10) =$
- f) $(x^5+4)(x^5-6) =$
- g) $(3x^3-2)(3x^3-1) =$
- h) $(4a+5b)(4a-3b) =$
- i) $(\sqrt{2}x-y)(\sqrt{2}x+3y) =$
- j) $(2m^2-8a)(2m^2+4a) =$
- k) $(3j^3+6c^2)(6c^2-4j^3) =$

3. Escribe en tu cuaderno el término o los términos faltantes para que se cumpla la igualdad.

- a) $(x+4)(x \quad) = x^2 - 2x - 24$
- b) $(m+3)(m \quad) = m^2 + 10m + 21$
- c) $(n^2+4)(n^2-12) = \quad n - 48$
- d) $(\quad + 2)(\quad - 8) = 9x^2 - 18x - 16$
- e) $\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right)\left(\frac{1}{2}a^2 - 3\right) = \frac{1}{4}a^4 \quad + 3$
- f) $(a+4)(a+3) = a^2 \quad + 12$
- g) $(m-11)(m+3) = m^2$
- h) $(m-8)(m-3) = m^2$
- i) $(a - \quad)(a + \quad) = a^2 - a - 6$

4. Obtén los productos.

- a) $\left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{6}\right)$
- b) $\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}\right)$
- c) $(0,6v^4 + 0,1w)(0,6v^4 - 0,2w)$
- d) $\left(\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d\right)\left(\frac{1}{3}c - \frac{2}{9}d\right)$
- e) $(0,7a^2b^2 - 0,1d)(0,7a^2b^2 - d)$
- f) $(x-6)(2x-1) =$
- g) $(3x+1)(2x-3) =$
- h) $(3m-2)(3m+4) =$
- i) $(4a-3)(6a-5) =$
- j) $(2b+3)(b-3) =$

5. Resuelve los productos.

a) $(x^n + 2)(x^n - 3) =$

b) $(a^{m+1} - 5)(a^{m+1} - 4) =$

c) $(7x^{a+2} + y)(7x^{a+2} + 5y) =$

d) $\left(\frac{1}{5}x - y^{m-1}\right)\left(\frac{1}{5}x - 2y^{m-1}\right) =$

e) $(2x + 3)(3x - 7) =$

f) $(b^2 - 5)(ba^2 + 3) =$

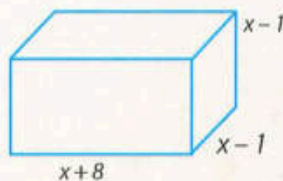
g) $(m + 9n)(6m - 5n) =$

h) $(2a^2 + 5b)(4a^2 - 7b) =$

i) $(2c - 5d)(5c + d) =$

j) $(2x^3 - 5)(5x^3 - 2) =$

6. Calcula el área total del prisma.



7. Completa en tu cuaderno la tabla.

a	b	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3
x	3				
2x	y				
$\frac{3}{5}s^2$	$\frac{5}{2}t$				
x^n	y^n				

Trabajo colaborativo

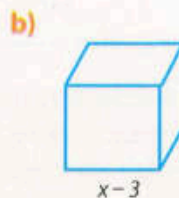
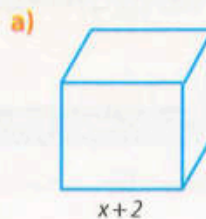
8. Trabajen en parejas y resuelvan.

Calculen el valor de la arista de los cubos que cumplen las siguientes condiciones:

$V = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; si $a = 1$

$V = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$; si $x = 5$

9. Expresa y calcula el volumen de los cubos.



10. Desarrolla los binomios.

a) $(4y + 3)^3 =$

b) $(2x - 5y)^3 =$

c) $\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}n^3\right)^3 =$

d) $\left(a^{x+1} + \frac{1}{2}b^x\right)^3 =$

11. Relaciona cada producto notable con la expresión algebraica correspondiente.

Producto notable	Expresión algebraica
1. $(5x - 3y)^2$	a) $64x^2 + y - 6y^2$
2. $(8x + 3y)(8x - 2y)$	b) $25x^2 - 49y^2$
3. $(2x - y)^3$	c) $25x^2 - 30xy + 9y^2$
4. $(5x - 7y)(5x + 7y)$	d) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

A) 1b, 2d, 3a, 4c

B) 1b, 2a, 3d, 4a

C) 1c, 2a, 3d, 4b

D) 1c, 2a, 3b, 4b

Actividad indagatoria

12. Investiga cómo se denomina el proceso contrario a los productos notables.

Toma como ejemplo uno de los estudiados y muéstrale a tu clase cómo se desarrolla dicho proceso inverso.



Saberes previos

Desarrolla los binomios:

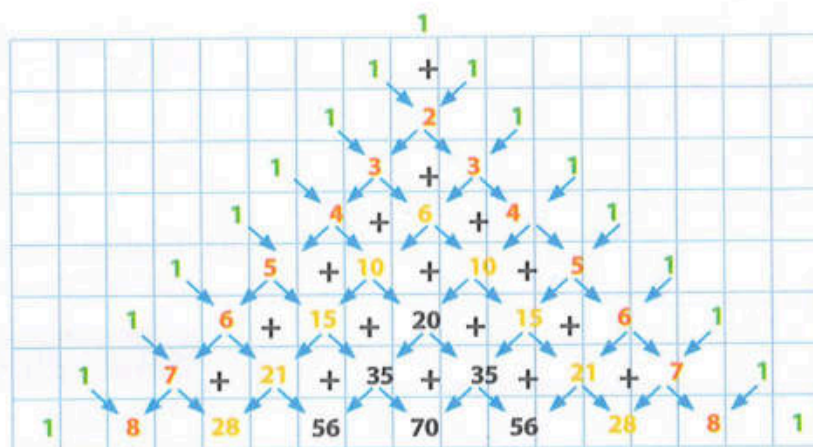
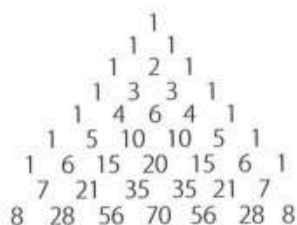
$$(2x-3)^2 =$$

$$(4a+5b)^3 =$$

Blaise Pascal, con su análisis del triángulo que lleva su apellido, contribuyó a la conformación de teorías matemáticas, como también lo hicieron los trabajos del ecuatoriano de origen alemán, Peter Thullen.

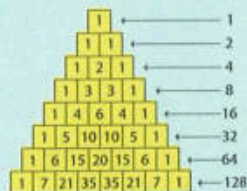
¿Qué estructura tiene el triángulo denominado triángulo de Pascal que se observa en la imagen?

Se trata de un triángulo simétrico de números enteros. Está conformado por filas que tienen 1 al inicio y al final de cada fila. Empieza con un 1 en la primera fila, y en las filas siguientes muestra números de forma que cada uno de ellos son la suma de los dos números que tiene encima.



Recuerda que...

En el triángulo de Pascal se observan algunas particularidades. Por ejemplo, al sumar los números de la fila, se obtienen las potencias de 2.



Ejemplo 1

Obtener la fila 9 y 10 del triángulo de Pascal.

Solución

Para obtener la fila 9, sumamos los números de la fila 8.



Para formar la fila 10, sumamos los obtenidos de la fila 9.



Teorema del binomio

El teorema del binomio o de Newton es una fórmula con la cual se pueden escribir directamente los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio $(a + b)^n$.

Para determinar esta fórmula, encontraremos por multiplicación directa los desarrollos de los binomios hasta la quinta potencia.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

El análisis del desarrollo de estos binomios nos permite encontrar la fórmula que aplicaremos:

1. Si el exponente del binomio es n , hay $n+1$ términos en el desarrollo.
2. Para cada valor de n , el desarrollo de $(a + b)^n$ empieza con a^n y termina con b^n . En cada término los exponentes de a y b suman n .
3. Las potencias de a disminuyen de 1 en 1 al pasar de cada término al siguiente. La b aparece por primera vez en el segundo término con exponente 1 que aumenta de 1 en 1. El exponente de b siempre es una unidad menor que el número de orden del término.
4. El primer coeficiente es la unidad. El de cualquier otro término se obtiene multiplicando en el término anterior su coeficiente por el exponente de a y dividiendo ese producto entre el número de términos anteriores al que se trata de formar.

Ejemplo 2

Desarrollar $(x + 2y)^7$.

Solución

El desarrollo tendrá 8 términos, iniciará con x^7 y terminará con $128y^7$.

Para obtener los coeficientes, tomamos en cuenta la conclusión 4.

$$x^7 + 7x^6(2y) + 21x^5(2y)^2 + 35x^4(2y)^3 + 35x^3(2y)^4 + 21x^2(2y)^5 + 7x(2y)^6 + (2y)^7$$

$$x^7 + 14x^6y + 84x^5y^2 + 280x^4y^3 + 560x^3y^4 + 672x^2y^5 + 448xy^6 + 128y^7$$



Recuerda que...

En los coeficientes de los términos del desarrollo de los binomios, la simetría que se obtiene es similar a los números dispuestos en el triángulo de Pascal.

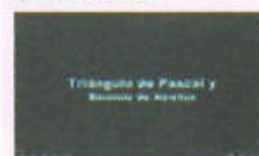
Si el binomio tiene signo negativo, en el desarrollo se colocan los signos alternadamente.

1	→	$(x+y)^0$
1 1	→	$(x+y)^1$
1 2 1	→	$(x+y)^2$
1 3 3 1	→	$(x+y)^3$
1 4 6 4 1	→	$(x+y)^4$
1 5 10 10 5 1	→	$(x+y)^5$
1 6 15 20 15 6 1	→	$(x+y)^6$



Competencia digital

Amplía tu conocimiento sobre el triángulo de Pascal y binomio de Newton. Ingresa en el siguiente enlace web: lynk.ec/9m09



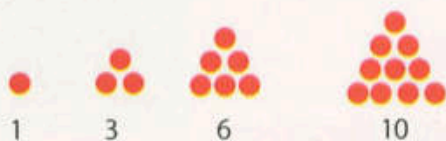
I.M.4.2.2.

1. Lee la información. Luego, **realiza** las actividades indicadas.

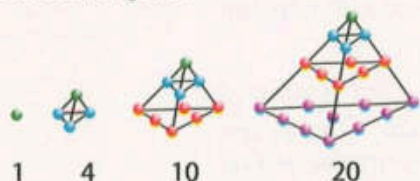
- a) Al analizar el triángulo de Pascal en forma diagonal, se observa la disposición de los siguientes tipos de números:



Los números triangulares son aquellos que permiten obtener una estructura triangular.



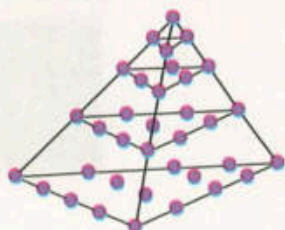
Los números tetraédricos son aquellos que permiten obtener una estructura piramidal de base triangular.



- b) **Escribe** los números triangulares que corresponden a cada figura.



- c) **Escribe** el número tetraédrico que corresponde a la siguiente figura.



2. **Encuentra** los números que corresponden a la fila 10, la fila 11 y la fila 12 del triángulo de Pascal.

Fila 10

Fila 11

Fila 12

3. **Determina** el número de términos que corresponde al desarrollo del binomio.

a) $(x - b)^5$

b) $(m - n)^8$

c) $(a^5 - b^2)^2$

d) $(2m + 6)^{11}$

e) $(z - 8)^n$

f) $(r - 2s)^{20}$

4. **Determina** lo solicitado para cada binomio.

- a) El primero y último término del desarrollo de:
 $(x - a)^9$

- b) El primero y último término del desarrollo de:
 $(a^3 - 2b^5)^6$

- c) El segundo término del desarrollo de:
 $(2y - 3)^7$

- d) El quinto término del desarrollo de:
 $(2 + 4a)^{11}$

- e) El cuarto término en el desarrollo de:
 $(3x - y^2)^4$

- f) El último término en el desarrollo:
 $(2x^3 - 1)^{50}$

- g) El quinto término en el desarrollo de:

$$\left(\frac{a}{3}-6\right)^5$$

- h) El término del medio en el desarrollo de:

$$(m+4n^2)^6$$

5. Problema-decisión. Analiza, decide y selecciona la respuesta correcta.

- a) El coeficiente del quinto término en el desarrollo de $(4x - y^2)^6$ es:

- A) 240
- B) 1280
- C) 24
- D) -240

- b) El término de la mitad en el desarrollo de $(6a - b^3)^8$ es:

- A) $12\,096a^3b^{15}$
- B) $90\,720a^4b^{12}$
- C) $-12\,096a^3b^{15}$
- D) $-90\,720a^{12}b^{12}$

- c) El término que no contiene a x en el desarrollo de $(3x^2 - x^{-1})^6$ es:

- A) El cuarto término
- B) El último término
- C) El quinto término
- D) El sexto término

- d) El cuarto término en el desarrollo de $\left(\frac{x^3}{3}-3\right)^5$ es:

- A) $-30x^6$
- B) $-7290x^6$
- C) $7290x^6$
- D) $30x^6$

- 6. Utiliza** el teorema del binomio para desarrollar los siguientes binomios:

- a) $(2-a)^5$
- b) $(b^3+1)^8$
- c) $(z^2-3)^7$
- d) $(m^4+5n^3)^6$
- e) $(5x-3y^2)^4$
- f) $(x^2+2y^2)^9$
- g) $(2m^2-n^4)^5$

- 7. Desarrolla** los binomios utilizando el triángulo de Pascal.

- a) $(x+y)^4$
- b) $(m-n)^5$
- c) $(3+a)^5$
- d) $(a^2-b)^9$

Trabajo colaborativo

- 8. Trabajen** en parejas y resuelvan.

Formulen un binomio con $4 \leq n \leq 8$. **Propongan** a otra pareja encontrar dos de los términos de su desarrollo.

Actividad indagatoria

- 9. Investiga** sobre la particularidad del triángulo de Pascal con el número 11.

Utiliza el siguiente enlace web: lynk.ec/9m10

- 10. Explica** a la clase el resultado de tu investigación.

Tema 6

Volumen de prismas, pirámides y cuerpos redondos

Competencia comunicacional

En el 2016, se realizó una medición con precisión centimétrica del Chimborazo. Esta medición permitió concluir que nuestro nevado, medido desde el centro de la Tierra, es 1 180 m más alto que el Everest.



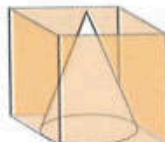
Volcán Chimborazo

Determina el volumen de un cono de helado que tiene una altura de 12 cm y un radio de 3 cm.



Desequilibrio cognitivo

¿Cómo calcularías el volumen de agua que es posible colocar en cada uno de los recipientes?



La tercera Misión Geodésica Francesa determinó que la altura del Chimborazo es 6 268 m. Si uno de sus propósitos hubiera sido calcular su volumen, ¿cuál sería la expresión algebraica que les permitiría obtener en forma aproximada ese volumen?

Lo primero que hacemos es seleccionar un cuerpo geométrico que represente aproximadamente al nevado. Como este tiene una cúspide, la decisión estaría entre una pirámide y un cono. Sin embargo, al observar la base, el cuerpo que se aproxima más es el cono.

Luego de las fórmulas para calcular el volumen de cuerpos geométricos, escogemos la que le corresponde al cono y reemplazamos los datos conocidos.

Cubo Arista l $V = l^3$	Prisma Base Altura h $V = A_{base} \cdot h$
Pirámide Altura h Base $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$	Cilindro Radio r Altura h $V = \pi r^2 h$
Cono Altura h Radio r $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	Esfera Radio r $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Conocemos la altura pero no el radio. Por lo tanto, la expresión es:

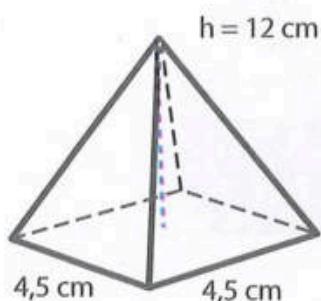
$$V = \frac{6\,268\pi r^2}{3} m^3$$

M.4.2.21. Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.

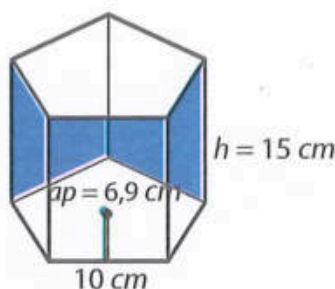
Ejemplo 1

Calcular el volumen de los cuerpos geométricos.

a)



b)



Solución

a) Se trata de una pirámide cuadrangular. Reemplazamos los datos conocidos

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{(4,5 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm}}{3} = 81 \text{ cm}^3$$

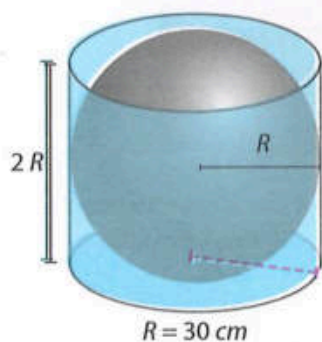
b) Es un prisma rectangular, por tanto, reemplazamos los datos en la fórmula

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h = \frac{5 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 6,9 \text{ cm}}{2} \cdot 15 \text{ cm} = 2587,5 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 2

Calcular el volumen del líquido depositado en el recipiente.



Solución

Debemos restar el volumen de la esfera del volumen del cilindro.

De acuerdo con el gráfico, el radio de la esfera y de la base del cilindro es 30 cm y la altura del cilindro es 60 cm.

$$V_{\text{liquido}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}}$$

$$V_{\text{liquido}} = \pi(30 \text{ cm})^2(60 \text{ cm}) - \frac{4}{3}\pi(30 \text{ cm})^3$$

$$= 54\,000\pi \text{ cm}^3 - 36\,000\pi \text{ cm}^3$$

$$= 18\,000\pi \text{ cm}^3$$



Interdisciplinariedad

Matemática y Geometría



Los silos son grandes tanques que sirven para almacenar granos y semillas.

La forma cónica inferior resulta apropiada para descargar lo almacenado del tanque.

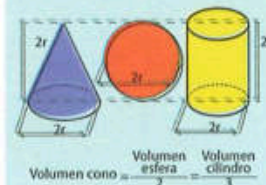
Por su forma geométrica, es muy útil al momento de saber acerca del volumen de semillas o granos almacenados.

Shutterstock, 566160880.



Recuerda que...

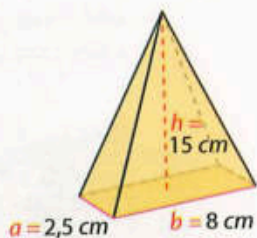
Entre el volumen del cono, la esfera y el cilindro, se pueden establecer relaciones siempre que sus medidas sean las indicadas en el gráfico.



I.M.4.6.3.

1. Calcula el volumen de los cuerpos geométricos.

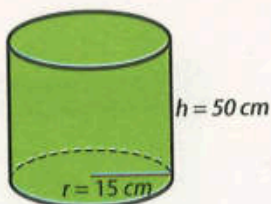
a)



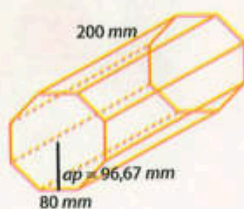
b)



c)

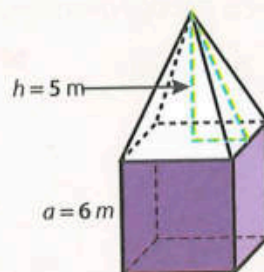


d)

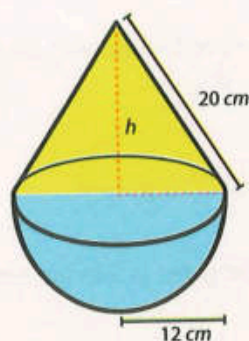


2. Determina el volumen.

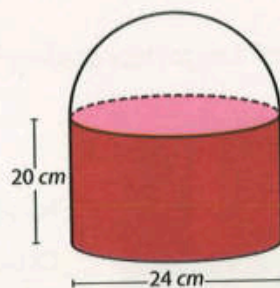
a)



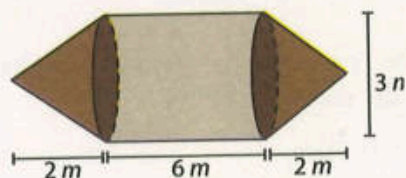
b)



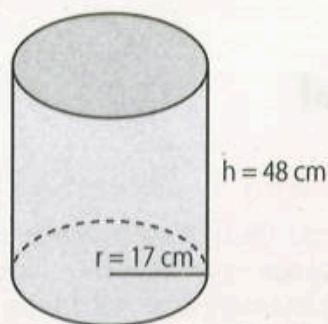
c)



d)

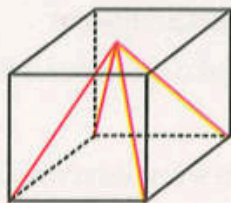


e)



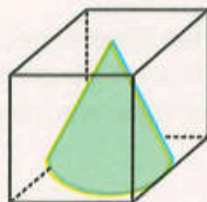
3. **Calcula** el volumen del cuerpo geométrico inscrito.

a)



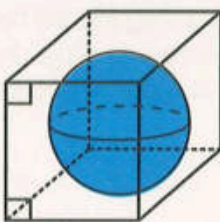
$$V_{\text{cubo}} = 64 \text{ m}^3$$

b)



$$V_{\text{cubo}} = 5\,832 \text{ cm}^3$$

c)



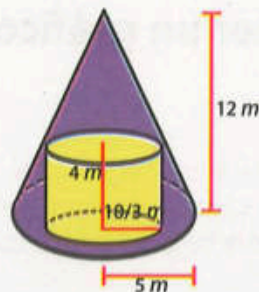
$$V_{\text{cubo}} = 343 \text{ dm}^3$$

Trabajo colaborativo

4. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

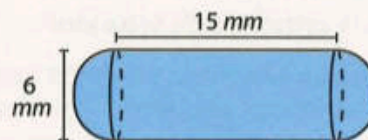
Calculen el volumen de un cono de altura y diámetro 10 cm, una esfera de diámetro 10 cm y un cilindro de altura y diámetro 10 cm. **Comprueben** que se cumplen las relaciones entre sus volúmenes.

5. **Calcula** el volumen del cono libre del cilindro.



6. **Problema-decisión. Resuelve.**

Una empresa farmacéutica ha elaborado cápsulas que serán colocadas en un recipiente cilíndrico de diámetro de 5 cm y de altura 8 cm. Si la forma y las medidas de las cápsulas se muestran en la figura, **decide** si se pueden colocar 200 cápsulas en el recipiente. **Justifica** tu respuesta.



7. **Determina** el área total y el volumen de un cono cuya generatriz mide 10 cm y el radio de la base es de 5 cm.
8. Dos recipientes cilíndricos A y B de distinta altura y diámetro tienen el mismo volumen. Si el diámetro de A es la mitad del diámetro de B, **determina** la relación de sus alturas.

a) $h_A = \frac{1}{2} h$

b) $h_A = 4h_B$

c) $h_A = 2h_B$

d) $h_A = 8h_B$

Actividad indagatoria

9. **Investiga** la fórmula para calcular el volumen de un cono truncado. **Formula** un problema y **expón** el proceso de cálculo de su volumen.

Estrategia: hacer un gráfico tridimensional

Problema resuelto

Calcular la medida de la línea diagonal de un prisma cuadrangular que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 20 cm y la altura, 60 cm.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿De qué cuerpo geométrico se calculará la diagonal? Prisma cuadrangular

¿Cuánto mide la arista de la base del prisma? 20 cm

¿Cuánto mide la altura del prisma? 60 m

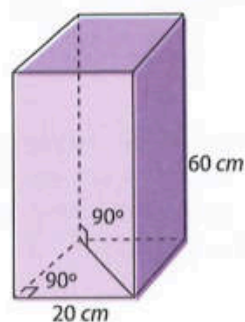
2. Fijar una estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

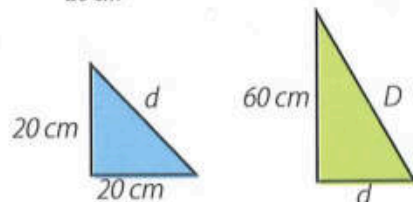
Realizamos un dibujo en tres dimensiones, es decir, lo hacemos con perspectiva. Ahí dibujamos la diagonal y observamos cómo obtener su medida.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?



El gráfico permite visualizar dos triángulos rectángulos: uno en la base, donde calcularemos la diagonal que es el cateto del segundo triángulo, donde está la diagonal requerida.



$$d = \sqrt{(20 \text{ cm})^2 + (20 \text{ cm})^2} = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$D = \sqrt{(60 \text{ cm})^2 + (20\sqrt{2} \text{ cm})^2} = 20\sqrt{11} \text{ cm}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La diagonal mide $20\sqrt{11} \text{ cm}$.

Problema resuelto

Calcular la medida de la línea diagonal de un prisma hexagonal que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 2 m y la altura, 6 m.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿De qué cuerpo geométrico se calculará la diagonal?

Prisma hexagonal

¿Cuánto mide la arista de la base del prisma? 2m

¿Cuánto mide la altura del prisma? 6m

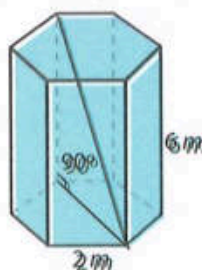
2. Fijar una estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

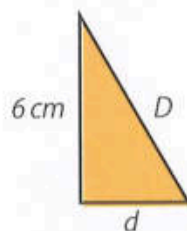
Realizamos un dibujo en tres dimensiones, es decir, lo hacemos con perspectiva. Ahí dibujamos la diagonal y observamos cómo obtener su medida.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?



El gráfico permite visualizar un triángulo rectángulo formado por la diagonal del hexágono de la base, la altura del prisma y la diagonal requerida.



d es igual a dos veces el radio de la circunferencia que inscribe al hexágono y el radio es igual al valor del lado por ser un hexágono: $d = 2r = 4 \text{ m}$

$$D = \sqrt{(4 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 2\sqrt{13} \text{ m}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

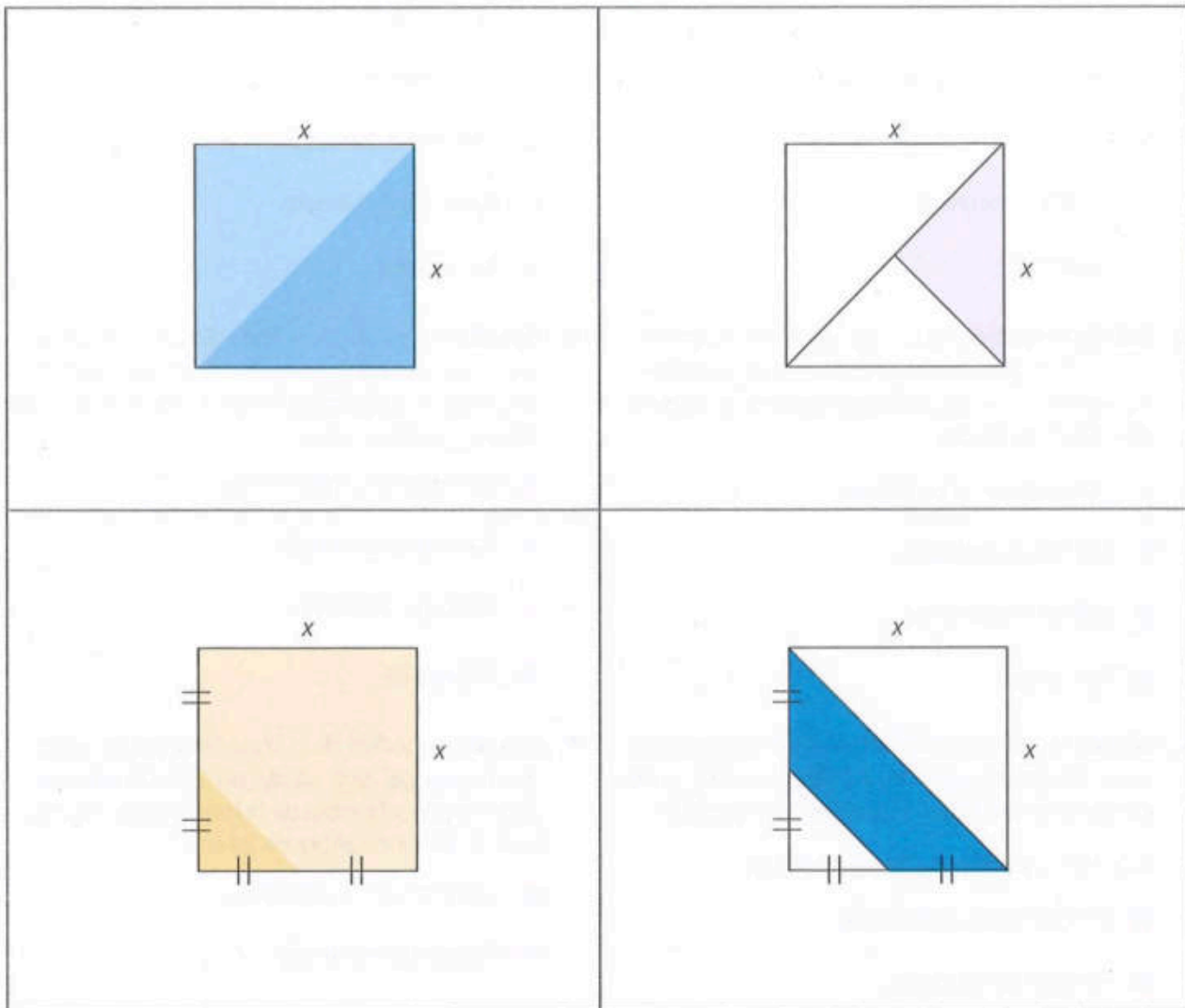
La diagonal mide $2\sqrt{13} \text{ m}$.

Problemas propuestos

1. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma hexagonal que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 12 cm y la altura, 18 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
2. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma cuadrangular que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 36 cm y la altura, 40 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
3. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma rectangular que va de un vértice superior a uno inferior, si los lados de la base del prisma miden 12×16 cm y tiene una altura de 50 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
4. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un cubo que va de un vértice superior a uno inferior, si su arista mide 3 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
5. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma hexagonal que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 8 cm y la altura, 10 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
6. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma cuadrangular que va de un vértice superior a uno inferior. La arista de la base del prisma mide 24 cm y la altura, 32 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
7. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma hexagonal que va de un vértice superior a uno inferior, si la arista de la base del prisma mide 6 cm y tiene una altura de 24 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
8. **Calcula** la medida de la línea diagonal de un prisma pentagonal que va de un vértice superior a uno inferior, si la diagonal de la base del prisma mide 15 cm y tiene una altura de 30 cm.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.

Calculando perímetros y áreas

Determina la superficie y el perímetro de las áreas sombreadas en cada caso.



Cálculo mental

Multiplicación de un número por 1,25

Estrategia: multiplicar un número por 1,25 equivale a sumar el número con su cuarta parte.

$$30 \times 1,25 = 30 + \frac{30}{4} \\ = 30 + 7,5 = 37,5$$

Ahora, hazlo tú.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $20 \times 1,25 =$ | h) $18 \times 1,25 =$ |
| b) $8 \times 1,25 =$ | i) $24 \times 1,25 =$ |
| c) $32 \times 1,25 =$ | j) $36 \times 1,25 =$ |
| d) $22 \times 1,25 =$ | k) $52 \times 1,25 =$ |
| e) $14 \times 1,25 =$ | l) $72 \times 1,25 =$ |
| f) $50 \times 1,25 =$ | m) $56 \times 1,25 =$ |
| g) $66 \times 1,25 =$ | n) $26 \times 1,25 =$ |

Aproximando medidas importantes

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Estudios Sociales

Justificación / problemática

Nuestro país ha sido visitado por tres ocasiones por científicos franceses para realizar mediciones con respecto a la Tierra. La última misión logró medir con exactitud, usando satélites, la altura del Chimborazo. Con estas mediciones se concluye que nuestro nevado, medido desde el centro de la Tierra, es el punto más elevado del planeta. Si la Tierra fuera completamente redonda, esto no sucedería. Pero como es ensanchada en la línea equinoccial, la realidad incuestionable es que en nuestro territorio se encuentra el mencionado punto.



Shutterstock, 157201103

Objetivo

Calcular el volumen de la Tierra aproximando su forma a la de una esfera.

Recursos

- Hojas
- Computador
- Pliegos de papel bond

Actividades

- **Investiga** sobre los objetivos primordiales de cada una de las misiones geodésicas francesas. ¿Cómo se llega a determinar que el Chimborazo, a pesar de ser más pequeño que el Everest, resulta ser el punto más elevado del mundo?
- **Investiga** sobre el radio de la Tierra.
- **Investiga** sobre los nombres de otros científicos que hayan sido reconocidos por academias de ciencias o que hayan sido galardonados por sus trabajos.



Evaluación

1. **Elabora** una infografía que será entregada en la unidad educativa en la que estudias. La infografía contendrá la siguiente información:

Página 1. Título: En el Ecuador se hizo y se hace ciencia. Contenido: *collage* con las imágenes de científicos ecuatorianos con sus nombres.

Página 2. Resumen de los aspectos importantes y los objetivos de las tres misiones geodésicas francesas.

Página 3. Dibujo esquemático de la forma aproximada de la Tierra superpuesta la imagen verdadera, con la explicación gráfica de por qué el Chimborazo es el punto más alto del planeta, a pesar de que el Everest es el monte más alto del mundo. Incluir las alturas de estos dos colosos e indicar por cuántos metros el Chimborazo resulta ser más alto desde el centro de la Tierra.

Página 4. Gráfico de la Tierra con su forma esférica aproximada y el cálculo de su volumen aproximado.

2. **Reproduce** la infografía para distribuirla entre los estudiantes de la unidad educativa.

Aplico en la vida cotidiana

Tema: Un negocio nuevo

Volumen de sólidos geométricos

Situación cotidiana

En varias ocasiones, antes de tener un negocio, se debe elaborar un presupuesto de gastos un estudio de mercado sobre el negocio que se desea emprender, así como buscar diferentes estrategias para ofrecer un buen servicio al cliente.



Para abrir una tienda de comida rápida, Vinicio arma envases de distintas formas para llenarlos de papas fritas, todos con el mismo largo. Si Vinicio desea brindar un buen servicio a sus clientes y quiere conocer qué envase tiene mayor capacidad, ¿cuál debe elegir?

1.



2.



3.



Envases 1 y 2: el diámetro de la base es de 8 cm y la altura, de 12 cm. Envase 3: Tiene dos caras cuadradas de 6 cm de lado y altura 12 cm.

Reflexiona

- ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre los tres envases?
- Si Vinicio escogiera el envase que tiene menor capacidad, ¿cuántos metros cuadrados de cartón tendrá que comprar si tiene que elaborar 100 unidades?
- Comprueba la respuesta.

Resuelve la situación

- Raúl tenía un tanque de reserva de agua con forma de prisma; luego cambió por un tanque que tiene el doble de los lados de la base y la misma altura. Si con el primer tanque pagaba \$ 8 por el agua consumida, ¿cuánto pagará con el nuevo tanque? El nuevo tanque mide 1 m de ancho; 1,40 m de largo; y 0,90 m de profundidad.

Tema: Estructuras metálicas

Aplicación del teorema de Pitágoras y semejanza

Situación cotidiana

Las construcciones, en la actualidad, utilizan estructuras metálicas que deben ser lo suficientemente resistentes para poder soportar el peso de la cubierta que se colocará.

Guillermo tiene un taller donde hace estructuras metálicas. Uno de sus clientes le ha encargado preparar dos estructuras, como se muestra a continuación. ¿Cuántos metros de tubo necesita para poder fabricarlos?



Trabajador que utiliza la molienda eléctrica en la estructura de acero.

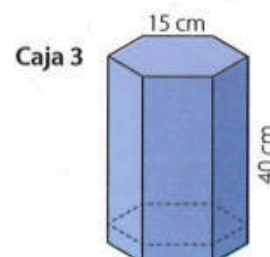
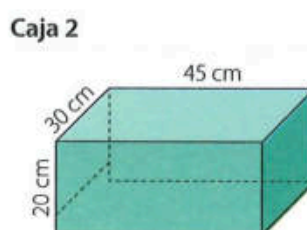
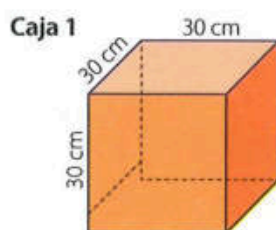


Reflexiona

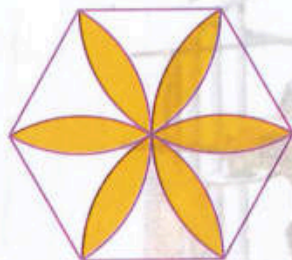
- ¿Qué debes averiguar?
- Comprueba la respuesta.
- ¿Qué estrategia utilizaste y qué conocimientos son necesarios para resolver la situación?

Resuelve la situación

- Una fábrica debe elaborar cajas lo más económicas posible y sin tapas. Tienen tres modelos. ¿En cuál de las cajas se utiliza más cartón?

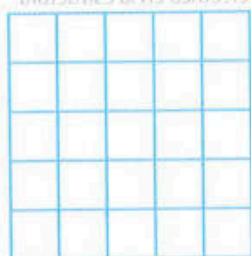


1. ¿Cuál es el área de la flor formada en el hexágono? Toma en cuenta que cada lado mide 1 m.



Argumenta la solución:

2. A una cuadrícula de papel de 5×5 , como la que se presenta a un lado, se la quiere cortar de manera que se obtengan cuadrículas de 2×2 . ¿Cuál es el mayor número de cuadrículas que se puede obtener?



Argumenta la solución:

3. ¿Con qué piezas de las siguientes se forma un cuadrado?

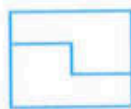


Argumenta la solución:

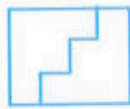
4. Un rectángulo de madera de $30 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ se cortó en dos piezas iguales, de manera que estas piezas puedan reensamblarse para formar otro rectángulo de $40 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$. ¿Cuál de las siguientes figuras muestra el rectángulo original dividido en las dos piezas?



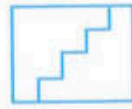
(a)



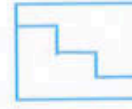
(b)



(c)



(d)



(e)

5. Marisa tiene 4 blusas, 3 faldas y 2 pantalones. ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer para vestirse?
6. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener sumando dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$?

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Si al doble de la tercera parte de un número se le agrega 8, su resultado es 32. ¿Cuál es dicho número?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 30 c) 32
b) 28 d) 36

2. Lee y analiza.

En una planta avícola hay gallinas, gallos y patos. Sin contar las gallinas, hay 24 aves; sin contar los gallos, hay 36 animales; y, sin contar los patos, hay 28 animales. ¿Cuál es el número de gallos?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 4 gallos c) 8 gallos
b) 6 gallos d) 10 gallos

3. Lee y analiza.

Completa la serie y **responde**: ¿cuánto es $(A + B)^2$?

A	5	20
3	8	24
5	B	30

Escoge la respuesta correcta.

- a) 16 c) 81
b) 100 d) 144

4. Lee y analiza.

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ¿cuántos elementos tendría la intersección del conjunto de números primos?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 8 elementos c) 4 elementos
b) 5 elementos d) 3 elementos

5. Lee y analiza.

¿Qué número puede ubicarse entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{9}$?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{7}{3}$

6. Lee y analiza.

Seis amigos se reparten una caja de chocolates; a cada uno le toca 15 chocolates. ¿Cuántos chocolates corresponde a cada uno si aumentan 3 amigos más?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 8 chocolates c) 12 chocolates
b) 10 chocolates d) 15 chocolates

7. Lee y analiza.

Un albergue de animales tiene alimento para mantener a 15 animales durante 6 días. ¿A cuántos animales se podrá alimentar con la misma cantidad de comida durante 9 días?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 9 animales c) 12 animales
b) 10 animales d) 13 animales

8. Lee y analiza.

Si mi padre conduce a 60 km/h y tarda 25 minutos en llegar a mi colegio, ¿cuánto demorará si va a 80 km/h?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 16'30" b) 18'45" c) 15' d) 20'30"

9. Lee y analiza.

El bus del colegio cobra \$ 3 por kilómetro recorrido. ¿Cuánto tendrá que cobrar a la semana si cada día recorre 94 km?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 1 510 dólares c) 1 410 dólares
b) 1 140 dólares d) 1 210 dólares

10. Lee y analiza.

La tabla que se muestra a continuación resume los resultados de dos equipos de fútbol. Si el próximo partido se juega de local, ¿cuál es la probabilidad que el equipo gane?

	Ganados	Perdidos
Local	24	5
Visitante	18	6

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{5}{24}$ c) $\frac{24}{5}$
b) $\frac{29}{100}$ d) $\frac{24}{29}$

11. Lee y analiza.

Una florista lleva un registro de la cantidad de flores que recoge diariamente hasta el fin de semana. Si inició el lunes con 19 flores, ¿cuántas recogió hasta el sábado?

19 - 25 - 37 - 55 - 79

Escoge la respuesta correcta.

- a) 324 c) 109
b) 140 d) 450

12. Lee y analiza.

¿Qué números completan la serie?

4, 7, 13, 22, 34,

Escoge la respuesta correcta.

- a) 46 y 58 c) 45 y 56
b) 49 y 67 d) 68 y 136

13. Lee y analiza.

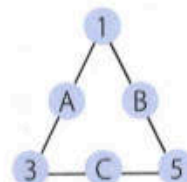
Luisa compra un televisor y paga \$ 918,40 con el IVA incluido según la factura. ¿Cuánto costó el televisor antes de agregar el impuesto?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 906,40 c) 820,00
b) 900,00 d) 800,00

14. Lee y analiza.

La suma de las líneas del triángulo suman 10. ¿Cuánto es $(A + B + C)^2$?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 121 c) 81
b) 100 d) 144

15. Lee y analiza.

¿Cuánto es el 20 % del 50 % de 1 800?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 360 c) 180
b) 450 d) 160

16. Lee y analiza.

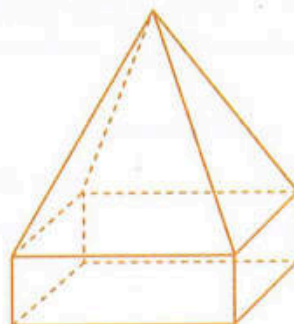
La suma de tres números es 103; el primer sumando es 25; el tercero es la suma de adicionar 10,2 al primer sumando. ¿Cuál es el segundo sumando?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 67,8 c) 42,8
b) 35,2 d) 80,2

17. Lee y analiza.

Calcula el volumen de la figura y selecciona la respuesta correcta.



Largo prisma:

4 cm

Ancho prisma:

3 cm

Altura del prisma:

6 cm

Altura total de ambas figuras incrustadas:

14 cm

Escoge la respuesta correcta.

a) 120 cm^3

c) 104 cm^3

b) 84 cm^3

d) 68 cm^3

18. Lee y analiza.

Un número excede a otro en 5 unidades. La tercera parte del mayor es igual al 25 % del menor aumentada en 10 unidades. Los números son:

Escoge la respuesta correcta.

a) 15 y 20

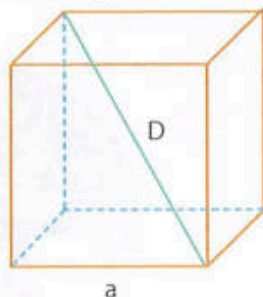
c) 10 y 15

b) 10 y 20

d) 15 y 25

19. Lee y analiza.

La medida de la diagonal del cubo de la figura es:



Escoge la respuesta correcta.

a) $\sqrt{3}a$

c) $\sqrt{6}a$

b) $3a$

d) $9a^2$

20. Lee y analiza.

La medida de la diagonal del cubo de la figura si $a = 10$ es:

Escoge la respuesta correcta.

a) 100

b) 300

c) 1 000

d) -2000

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |



Misión Geodésica Francesa



Monumento Mitad del Mundo. Latitud 00°00'00"

"Fue una delegación de científicos enviados por la Academia de Ciencias de París que, con el apoyo de Luis XV, rey de Francia, y el permiso de Felipe V, rey de España, llegaron a Quito el 29 de mayo de 1736.

La misión encomendada consistía en completar los datos matemáticos relacionados con la verdadera forma de la Tierra. Para tal efecto, tenían que medir desde el Ecuador un arco de meridiano terrestre.

Esta misión estuvo encabezada por los astrónomos y físicos Carlos María de La Condamine, Luis Godin, Pedro Bouguer; el botánico José Jussieu; el médico y cirujano Juan Seniergues y varios ingenieros, dibujantes, ayudantes, etc. A esta comisión se sumaron, a solicitud de Felipe V, los marinos españoles Jorge

Juan y Antonio de Ulloa, quienes debían también realizar investigaciones discretas sobre la vida de la colonia. En Guayaquil, se les unió uno de los notables criollos de la época, Pedro Vicente Maldonado.

Partiendo de Quito, la expedición realizó mediciones a través de la triangulación y establecieron los puntos de referencia en Yaruquí, Tarquí (cerca de Cuenca). Estas mediciones fueron particularmente difíciles debido a la orografía de la región andina. Las tareas geodésicas duraron hasta 1739.

Los trabajos que la Misión Geodésica de Francia realizó en América fueron de tal importancia que revolucionaron los conceptos científicos de la época, no solo al constatar que la tierra era achatada en los polos sino que, con las mediciones realizadas, se pudo conocer con precisión el tamaño del planeta y también se usaron más tarde para determinar la verdadera longitud del metro, medida que representa la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, y sobre el cual se basó el sistema métrico decimal.

Una segunda misión llegó a Guayaquil el 1 de junio 1901, a cargo del Servicio Geográfico del ejército francés y al mando del Cmdt. Bourgeois. Su objeto fue ratificar o rectificar las mediciones realizadas por la primera misión.

En esta misión participaron los coroneles Perrier y Lallemand, el Dr. Paul Rivet; los tenientes coroneles Noirel, De Fonlongue y Durand; y los suboficiales Damerval, Lecomte, Duffrenne, Gressier, Domart, Lavis, Thil, Brasselet, Anquetin, Presse, Soubriard y Soullot".



Monumento a Pedro Vicente Maldonado en Riobamba

Fuente: <http://www.encyclopediadelecuador.com/historia-del-ecuador/mision-geodesica-francesa/>



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Qué relevancia tuvieron las mediciones realizadas por estas misiones?
2. ¿Cuál fue el objetivo principal de esta misión científica?
3. ¿Cuál es el propósito del autor con este texto?
4. Respecto de la forma del planeta, ¿qué se pudo constatar con las mediciones que realizaron los científicos de esta misión?
5. ¿Cuál fue la medida del metro que se llegó a establecer gracias a las investigaciones de la Misión Geodésica?



Shutterstock, 332701280



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** acerca de las mediciones que realizaron los científicos. Si puedes, **visita** el monumento a la Mitad del Mundo o, en su defecto, **ingresa** a un sitio web que mencione este lugar.
2. **Ingresa** a Internet y busca imágenes sobre el tema. **Realiza** un collage con estas imágenes.
3. **Escribe** la biografía de Pedro Vicente Maldonado. **Expón** tu trabajo en tu clase.



Shutterstock, 1116151745

Trabajo colaborativo

4. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior. **Presenten** su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:
 - Debe haber un organizador gráfico.
 - Hay que incluir imágenes.
 - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
 - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 645627706

Sobre los polinomios:

$$P_1: 3x^4 + 2x^3 - 1$$

$$P_2: -6x^3 + 4x^2 - x$$

$$P_3: 2x^2 + 3x - 2$$

1. La suma de P_1 y P_2 es:

a) $9x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

b) $-6x^3 + 4x^2 - x - 1$

c) $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

d) $-6x^3 + 6x^2 + x - 2$

2. La resta de P_3 de P_2 es:

a) $-6x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

b) $6x^3 - 2x^2 + 4x - 2$

c) $3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

d) $3x^4 - 2x^2 + 1$

3. Resuelve $a - \left[\frac{1}{2}a^2 - \left(2a + 3 + \frac{3}{2}a^2 \right) - 1 \right]$ y escoge la respuesta correcta.

a) $-2a^2 - a - 2$ c) $2a^2 + a + 2$

b) $a^2 + 3ax + 4$ d) $a^2 + 3a + 4$

4. Selecciona el monomio factor para que se cumpla la igualdad $2a^3b \left(\quad \right) \frac{1}{4}a^{-2}b^2 = a^3$

a) $\frac{1}{2}a^3b^3$ c) $\frac{1}{2}ab^{-3}$

b) $2ab$ d) $2a^2b^{-3}$

5. El polinomio $-8y^2 + 12y^3 - 12 + 20y$ se obtiene al multiplicar el polinomio $3y^3 - 2y^2 + 5y - 3$ con:

a) -4 c) 4

b) 2 d) -2

6. El polinomio que se obtiene al multiplicar $-3ax^2$ con $x^4 - 2x^2 + 1$ es:

a) $-3ax^4 + 6ax^3 - 3ax$

b) $-3x^5 + 6x^4 - 3x^2$

c) $3ax^5 - 6ax^4 + 3ax^2$

d) $-3ax^6 + 6ax^4 - 3ax^2$

7. El área de la figura es:

$$2x - a$$



$$x + a$$

a) $2x^2 + 3ax - a^2$ c) $2x^2 + 3ax + a^2$

b) $2x^2 + ax - a^2$ d) $2x^2 + ax + a^2$

8. Resuelve $x[x^2 - x(x-1) + 3(x^2 + 2x - 3)]$ y escoge la respuesta correcta.

a) $3x^3 + 7x^2 - 9x$ c) $5x^3 + 5x^2 - 9x$

b) $3x^3 + 7x^2 - 9$ d) $5x^2 + 5x - 9$

9. Relaciona la columna de los productos con sus desarrollos. Luego, selecciona la respuesta correcta.

1) $(2x-3)(2x+3)$ a) $4x^2 - 2x - 6$

2) $(2x-3)^2$ b) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

3) $(2x-3)(2x+2)$ c) $4x^2 - 12x + 9$

4) $(2x-3)^3$ d) $4x^2 - 9$

A) 1d, 2a, 3c, 4b

B) 1c, 2d, 3b, 4a

C) 1a, 2b, 3d, 4c

D) 1d, 2c, 3a, 4b

10. Al simplificar la expresión $(x-3y)(x+3y) - (2x-y)^2$, se tiene:

a) $xy - 10y^2$ c) $-3x^2 + 4xy - 10y^2$

b) $6x^2 + 7xy$ d) $6x^2 - 10y^2$

11. Los números que pertenecen a la cuarta fila del triángulo de Pascal son:

- a) 1 4 6 4
 b) 1 3 3 1
 c) 1 2 1
 d) 1 5 10 10 5 1

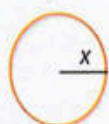
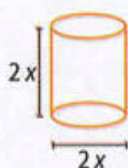
12. El desarrollo del binomio $(2y - 1)^5$ es:

- a) $32y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1$
 b) $32y^5 + 80y^4 + 80y^3 + 40y^2 + 10y + 1$
 c) $32y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y - 1$
 d) $32y^5 - 80y^4 + 80y^3 - 40y^2 + 10y - 1$

Coevaluación

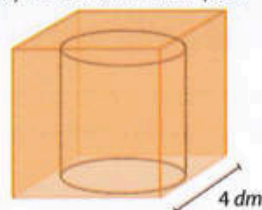
Resuelvan en pareja los siguientes ejercicios.

13. La razón entre el volumen del cilindro y el volumen de la esfera es:



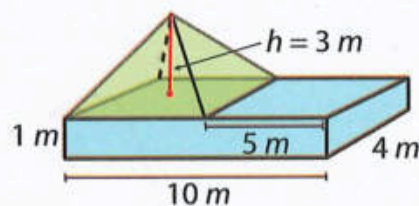
- a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$
 b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

14. El volumen del cubo, libre del volumen del cilindro, medido en dm^3 , es:



- a) $64 - 16\pi$ c) $16\pi - 64$
 b) $64 + 16\pi$ d) $16\pi + 64$

15. El volumen del cuerpo geométrico es:



- a) $70 m^3$ c) $60 m^3$
 b) $80 m^3$ d) $100 m^3$

16. **Expreso mis emociones.** Sé optimista cuando tengas que realizar tus tareas y demás obligaciones como estudiante. Comparte tu sentir con tus compañeros.

Autoevaluación

17. Pinta según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

Estoy en proceso

Contenidos	Sumo y resto polinomios.	
	Multiplco polinomios.	
	Resuelvo operaciones combinadas.	
	Desarrollo productos notables.	
	Comprendo la estructura del triángulo de Pascal.	
	Aplico el teorema del binomio.	
	Calculo el volumen de poliedros y cuerpos redondos.	

Metacognición

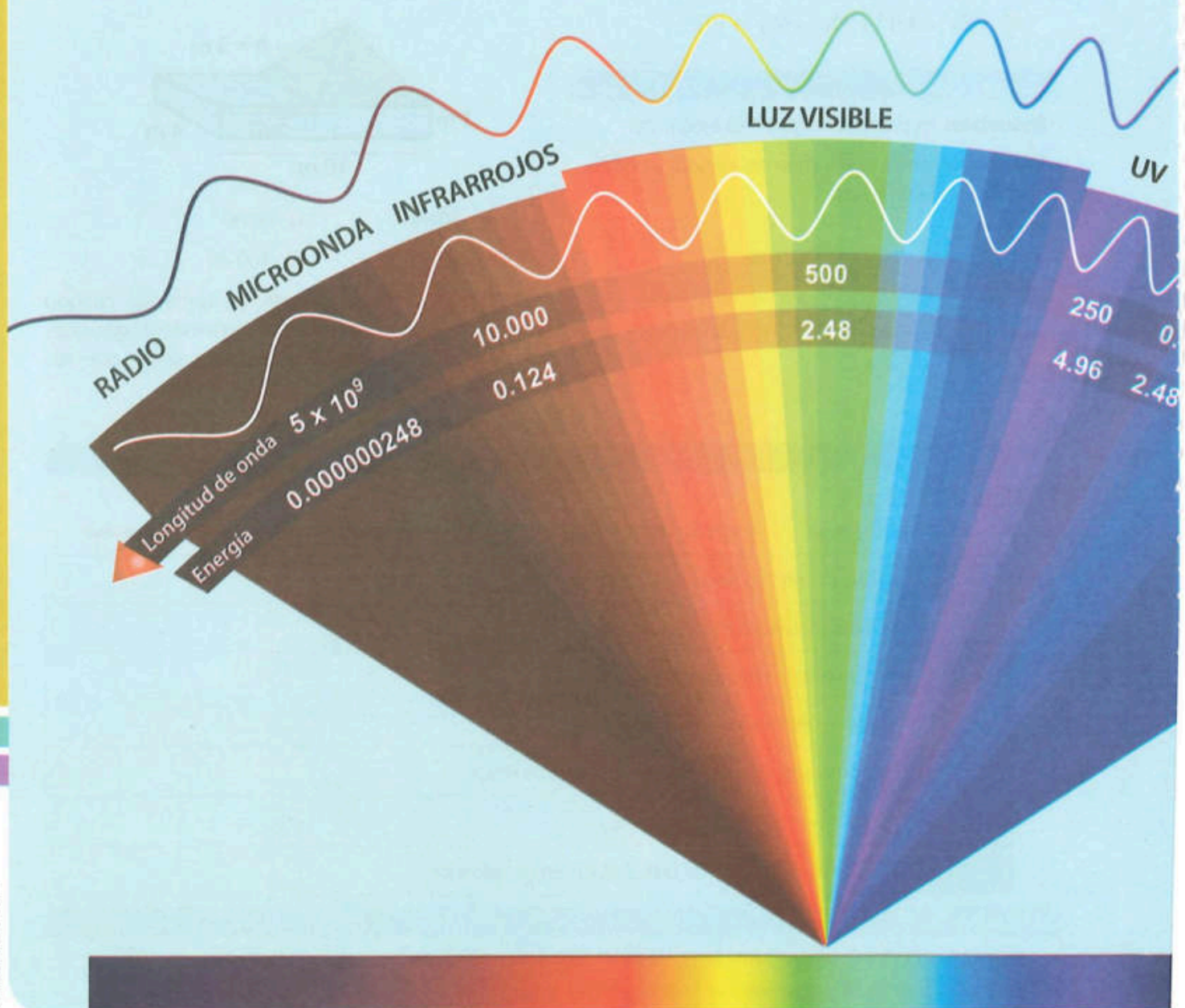
- ¿Planteé al docente las preguntas necesarias para aclarar mis dudas?
- ¿Participé motivado y activamente en los trabajos colaborativos y actividades indagatorias?
- ¿Relacioné oportunamente los conocimientos adquiridos con situaciones de mi entorno?

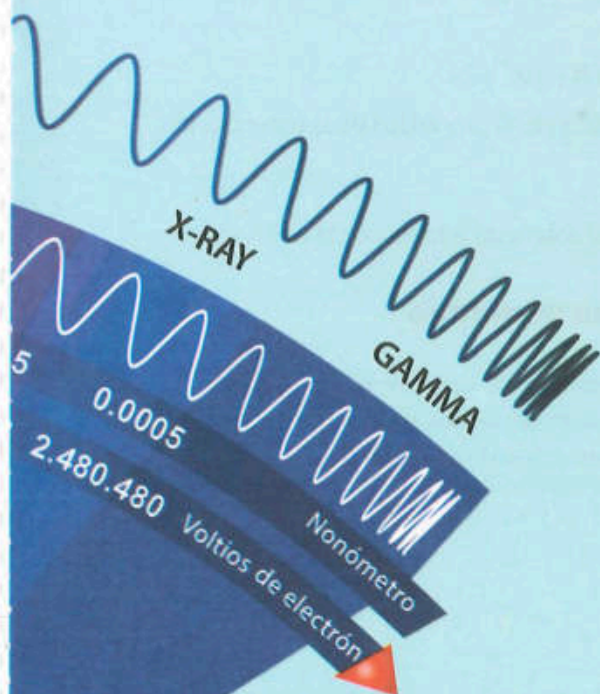
División. Factorización. Medidas de tendencia central

El Sol emite energía. Esta viaja en forma de ondas llamadas electromagnéticas. Algunas de ellas atraviesan la atmósfera y son absorbidas por la superficie terrestre y todos los objetos que en ella se encuentran, incluidos nosotros.

De acuerdo con la cantidad de energía que transportan, las ondas pueden ser muy energéticas (como los rayos gamma, rayos X y ultravioleta) y de menos energía (como los infrarrojos, microondas y las ondas de radio).

Las ondas llamadas de espectro visible son las que pueden ser percibidas por el ojo humano y corresponden a la luz.





Preguntas generadoras

- Al comparar la frecuencia de las ondas electromagnéticas, ¿cuáles son las ondas que tienen mayor frecuencia?
- **Investiga** qué tipo de ondas son dañinas para la piel de los seres humanos.

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- División sintética. Cocientes notables
- Factor común monomio y factor común polinomio
- Factorización de trinomios. Factorización de polinomios (por agrupación de términos, de trinomio cuadrado perfecto)
- Aplicaciones de la factorización:
 - Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$
 - Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
 - Diferencia de cuadrados perfectos
 - Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción
- Factorización de la diferencia o suma de cubos perfectos.

Estadística y probabilidad

- Medidas de tendencia central para datos agrupados

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.2. / O.M.2.

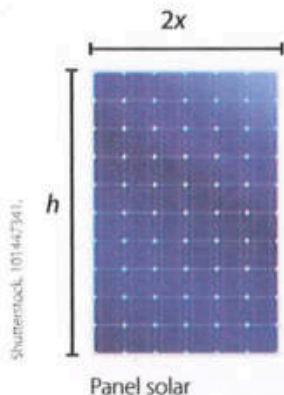


Saberes previos

Realiza las multiplicaciones.

a) $3m^2(-4am^2)=$

b) $-2a^3b(-6a-3b^3)=$



La división de polinomios tiene las mismas partes que la división aritmética. Si hay dos polinomios $P(x)$ (dividendo) y $Q(x)$ (divisor) de modo que el grado de $P(x)$ sea mayor que el grado de $Q(x)$ y el grado de $Q(x)$ sea mayor o igual a cero, siempre hallaremos dos polinomios: $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto). Veamos cómo realizamos la división.

¿Cuál es el valor de la altura del panel solar si el área está representada por la expresión algebraica $8x^2$?

Para determinar el valor del lado desconocido, realizamos una división. Para ello, contemplemos el siguiente proceso:

$$A = b \times h \text{ entonces } h = 8x^2 \div 2x$$

Dividimos los coeficientes y la parte literal aplicando la propiedad de la potenciación de división de bases iguales.

$$\frac{8x^2}{2x} = (8 \div 2)(x^2 \div x) = 4x \text{ La altura del panel solar está representada por } h = 4x$$



Competencia comunicacional

Un panel solar es un dispositivo que capta la energía de la radiación solar.

Los hay de dos tipos: unos son conectores térmicos que sirven para calentar agua y otros son paneles fotovoltaicos que sirven para generar energía eléctrica.

En el espacio son utilizados para suministrar energía eléctrica a los satélites artificiales.



Paneles solares que captan la radiación del Sol

División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, aplicamos la propiedad distributiva de manera que obtenemos tantas divisiones de monomios como términos tiene el polinomio. Luego resolvemos cada una de ellas.

Ejemplo 1

Dividir $3x^4 - \frac{2}{5}x^2 - x$ por $-2x^2$.

Solución

Expresamos la división.

$$\left(3x^4 - \frac{2}{5}x^2 - x\right) \div (-2x^2) =$$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} &\left(3x^4 - \frac{2}{5}x^2 - x\right) \div (-2x^2) = \\ &\left[3x^4 \div (-2x^2)\right] - \left[\frac{2}{5}x^2 \div (-2x^2)\right] - \left[x \div (-2x^2)\right] \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x^{-1} \end{aligned}$$

División entre polinomios

Para dividir un polinomio por otro, se ordenan en forma descendente, y luego se colocan en una galera. Una vez colocados así, dividimos el primer término del polinomio para el primer término del polinomio divisor, al cociente lo multiplicamos por los términos del polinomio divisor, cambiamos de signo a estos términos y sumamos algebraicamente el polinomio obtenido. Repetimos el proceso hasta que el polinomio residuo obtenido sea de menor grado que el polinomio divisor.

Ejemplo 2

Dividir $4x^4 - 5x + x^2 + 2 + x^3$ por $-1 + x$.

Solución

Ordenamos los polinomios al tiempo que los colocamos en una galera:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 2 & x - 1 \end{array}$$

Dividimos $4x^4$ por x y colocamos el resultado debajo del polinomio divisor:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 2 & x - 1 \\ & 4x^3 \end{array}$$

Multiplicamos $4x^3$ por $x - 1$ y al polinomio resultante lo colocamos con signo contrario debajo del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 2 & x - 1 \\ -4x^4 + 4x^3 & 4x^3 \end{array}$$

Sumamos algebraicamente y repetimos el proceso hasta obtener cero o un polinomio de menor grado que el polinomio divisor:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 2 & x - 1 \\ -4x^4 + 4x^3 & 4x^3 \\ \hline 5x^3 + x^2 - 5x + 2 & \\ -5x^3 + 5x^2 & \\ \hline 6x^2 - 5x + 2 & \\ -6x^2 + 6x & \\ \hline x + 2 & \\ -x + 1 & \\ \hline 3 & \end{array}$$



Recuerda que...

Si un polinomio es incompleto, se completa los términos con ceros.

$$\begin{array}{r|l} 0,1x^3 - 0,5x^2 + 0x + 4 & x + 3 \\ -0,1x^3 - 0,3x^2 & 0,1x^2 - 0,8x + 2,4 \\ \hline -0,8x^2 + 0x + 4 & \\ 0,8x^2 + 2,4x & \\ \hline 2,4x + 4 & \\ -2,4x - 7,2 & \\ \hline -3,2 & \end{array}$$



DFA

El comportamiento y las formas de hablar suelen variar de persona a persona. Es importante respetar el estilo que cada persona tenga a la hora de hablar y de comportarse.



Competencia digital

Imprime la página 5 del siguiente enlace y practica división de polinomios.

lynk.ec/9m12



Competencia digital

Amplía tu conocimiento y practica operaciones con polinomios en el siguiente enlace:

lynk.ec/9m13



I.M.4.2.1.

1. Obtén los siguientes cocientes.

a) $3x^2y^2z^4 + xyz =$

b) $-8y^2z^2 + 2yz =$

c) $16a^2b^5c + 8a^2b^3 =$

d) $7w^8y^3 + 2yz =$

e) $0,4x^6y^5z^4 + 0,2x^6y^3z =$

f) $\frac{3}{5}a^{-4}b^2 + \frac{1}{3}a^3b^{-6} =$

g) $\frac{11}{2}m^5n^3 + \left(-\frac{9}{2}m^3n^2\right)$

h) $0,3x^4y^{-2} + 0,5y^{-6}z$

i) $-\frac{144}{mn} + 12am^2n =$

2. Divide los monomios:

a) $72a^{2m}b^{3n} + 8a^{2m}b^{2n} =$

b) $222x^{2a}y^a + 37x^ay^{2a} =$

c) $27a^{3x}b^{2x} + 9a^xb^x =$

d) $8x^{3m}y^m + 56x^{4m}y^{-2m} =$

e) $-18x^{m+1}z^n + 6x^{m-1}z^{n+1} =$

f) $0,25a^{-m+2}b + 0,5a^{m-2} =$

g) $\frac{3}{8}x^{2m-2}y^{n-1} + \frac{1}{4}x^3y^2 =$

h) $16x^3 - 8x^2 + 4x + 2x =$

3. Efectúa las siguientes divisiones.

a) $\frac{6x^4yz^2}{2xyz} =$

b) $\frac{12m^2np}{-3mn^2p^3} =$

c) $\frac{-16a^3bc}{4abc^4} =$

d) $\frac{24r^6s^2t^2}{9r^2s} =$

e) $\frac{-35a^4b^{-2}}{-7ab} =$

f) $\frac{0,5x^2y^{-1}}{3xy^2} =$

g) $\frac{-1,2g^{-3}h^3}{0,3g^{-1}h^{-2}} =$

4. Divide.

a) $(16x^3 - 8x^2 + 4x) + 2x =$

b) $(2x^2 - 3x + 1) + 4x =$

c) $(-50x^4y^2 - 25x^3y + 15x^2) + 5xy$

d) $(36a^5b^3 - 9a^4b^4 + 81a^3b^5 + 27a^2b^6) + 9a^3b^2$

e) $(-49x^6 + 21x^4 - 63x^2 + 7x) + 14x$

f) $(0,14m^{-2} - 0,21m^{-3} - 0,63m^{-4}) + (-0,7m^{-2})$

g) $\left(\frac{8}{3}a^5b^2 + \frac{2}{9}a^3b^3 - \frac{5}{6}a^2b^4\right) + \frac{7}{18}a^2b^2$

h) $\left(-\frac{17}{3}xy^2 - \frac{5}{4}x^3y^3 + \frac{7}{5}x^4y^4\right) + \frac{2}{3}x^2y$

5. Encuentra el cociente.

a) $(2x^2 + 4x) \div 2x =$

b) $(3y^5 + 4y^3 - 2y^2) \div y^2 =$

c) $(6z^6y + 18z^4y^3) \div 6z^4y =$

d) $(81a^2b^5 + 9a^5b^2) \div 9a^2b^2 =$

e) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) \div \frac{1}{2}x^2 =$

f) $(x^{2m+1} - x^{m-1}) \div x^m =$

g) $(2x + 3) \div 2 =$

h) $(4x + 5) \div x =$

i) $(7x + 6) \div x =$

j) $(4x - 7) \div x =$

k) $\frac{4x^3 + 6x^2 - 2x + 10}{2} =$

l) $\frac{x^{m+1} + x^{m-1}}{x^m} =$

m) $(4x^2 - 5x - 19) \div 2x =$

n) $(6x^3 - 8x^2 + 6x - 9) \div 3x =$

Trabajo colaborativo

6. Trabajen en parejas y resuelvan.

Calculen el área de la base de un prisma cuadrangular cuyo volumen es:

$8a^3 - 4a^2b - 2ab^2 + b^3$ y cuya altura es $2a + b$.

7. Realiza las divisiones entre polinomios.

a) $(6x^2 - 3x + 2) \div (2x + 1) =$

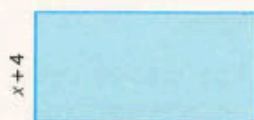
b) $(4x^4 - 6x^3 + 3x - 1) \div (x^3 - 3) =$

c) $(2y^3 + 9y^2 + 5y - 6) \div (2y + 3) =$

d) $\left(\frac{5}{3}a^3 + \frac{1}{16}a^2b + \frac{5}{2}ab^2\right) \div \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b\right) =$

e) $(x^{2a+3} + 2x^{2a+2} + 2x^{2a+1} + x^{2a}) \div (x^a + x^{a-1}) =$

8. Calcula la base de la figura conociendo su área.



$A = 2x^2 + 5x - 12$

9. Problema-decisión. Aplica lo aprendido y decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F).

- a) El cociente de la división de un polinomio de quinto grado para otro polinomio de segundo grado es de grado 3.
- b) La división de $x^3 + 1$ para $x^2 - x + 1$ es exacta.
- c) El residuo de la división de $x^2 + 2x + 1$ para $x + 1$ es $2x$.
- d) El residuo de la división de $x^4 - y^4$ para $x^2 + y^2$ es 0.

10. Resuelve en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

División	Cociente	Residuo
$\frac{4x^2 - 10x + 4}{2x - 4} =$		
$\frac{3a^2 - 13a + 4}{a - 4} =$		

Actividad indagatoria

11. Investiga el proceso de división de polinomios por coeficientes separados. Expón ante la clase con un ejemplo.



Desequilibrio cognitivo

¿Cuál es el factor que hace posible cada producto?

$$(a+b) \quad = a^2 - b^2 \quad \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y^2 \quad = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{16}y^4$$

Shutterstock, 37058907



¿Sabías que?

Las microondas no solo son emitidas por el Sol, sino que también pueden ser generadas a través de dispositivos elaborados con elementos llamados semiconductores, como el silicio o arseniuro de galio o en tubos llamados de vacío.

Una de las aplicaciones de este tipo de ondas es el horno de microondas, el cual genera ondas en el rango de 2,45 GHz (gigahercios).



Competencia socioemocional

Cuando trabajes en grupo, toma la iniciativa y manifiesta tus puntos de vista en la resolución de problemas para llegar a soluciones efectivas.

En general, la división sintética es un procedimiento abreviado para realizar la división de un polinomio entre un binomio lineal expresado como $x - a$, y solo sirve para obtener las raíces enteras. En la fabricación de un microondas, se ha considerado la expresión algebraica $x^3 + x^2 - 5x - 2$ para representar su volumen, y el binomio $x - 2$ para representar su altura. ¿Cuál es la expresión que representa el área de su base?

Para determinar la expresión algebraica que representa el área de la base del microondas, debemos dividir la expresión del volumen para la expresión de la altura.

Esta división puede ser realizada utilizando la división sintética, la cual es recomendable usar en polinomios $P(x)$, ordenados en forma descendente, que van a ser divididos entre binomios de la forma $x \pm a$.

El proceso es el siguiente:

Escribimos los coeficientes del polinomio dividendo y el opuesto del segundo término del polinomio divisor.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -2 & 2 \end{array}$$

Bajamos el primer coeficiente, lo multiplicamos por el número de la derecha. Registramos ese producto en la segunda columna para ser sumado algebraicamente con el número que se encuentra en esa posición. Al resultado obtenido lo multiplicamos por el número de la derecha y repetimos el proceso para las siguientes columnas.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -2 & 2 \\ & 2 & 6 & 2 & \\ \hline 1 & 3 & 1 & 0 & \end{array}$$

Expresamos el cociente separando el último número obtenido. Le damos la forma, considerando que es un grado menor al polinomio dividendo. El número excluido es el residuo.

Cociente $1 \quad 3 \quad 1$ Residuo 0.

El polinomio cociente es: $x^2 + 3x + 1$.

Cocientes notables

Existen ciertas divisiones cuyo cociente puede ser escrito directamente. A este tipo de divisiones se les denomina cocientes notables.

La diferencia de dos cuadrados perfectos dividida entre la suma de las raíces es igual a la diferencia de sus raíces. Y si la división es para la diferencia de sus raíces, el cociente es igual a la suma de las raíces.

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Calcular el cociente $\frac{25x^4 - 64y^2z^6}{5x^2 + 8yz^3}$

Como $25x^4 - 64y^2z^6$ es la diferencia de dos cuadrados perfectos y $5x^2 + 8yz^3$ es la suma de sus raíces, el cociente es:

$$\frac{25x^4 - 64y^2z^6}{5x^2 + 8yz^3} = 5x^2 - 8yz^3$$

La diferencia de cubos perfectos dividida entre la diferencia de sus raíces cúbicas es igual al cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Si por el contrario es la suma, tenemos:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

Ejemplo 1

Calcular el cociente $\frac{216p^3 - 8q^3r^9}{6p - 2qr^3}$

Solución

$6p - 2qr^3$ es la diferencia de los cubos perfectos $216p^3 - 8q^3r^9$

Por lo tanto:

$$\frac{216p^3 - 8q^3r^9}{6p - 2qr^3} = 36p^2 + 12p + 4q^2r^6$$



Recuerda que...

La diferencia de dos potencias de exponentes iguales, ya sea pares o impares, siempre es divisible entre la diferencia de sus bases.

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 - x^2y^2 + y^3$$

La suma de potencias de exponentes iguales impares siempre es divisible, exactamente, entre la suma de sus bases.

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

La diferencia de potencias de exponentes iguales pares siempre es divisible, exactamente, entre la suma de sus bases.

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y^2 + y^3$$

Una suma de potencias iguales pares nunca será divisible exactamente entre la suma de sus bases; tampoco lo será la diferencia de potencias iguales impares si se divide entre la suma de sus bases.

I.M.4.2.1.

1. **Ordena** en forma descendente los polinomios; **complétalos** si es necesario.

a) $-8x + 6 - 5x^3 + x^4 - 6x^2$

b) $16y^4 + y^7 - 7 + 4y^3 - 5y^2$

c) $18a + 7a^3 - 4a^4 - 6 + a^5$

d) $m^{-4} + 2m^{-1} - 3m + 4 - 6m^{-2}$

2. **Completa** en tu cuaderno el proceso de división sintética.

a) $(6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 6) \div (x - 3)$

+6	+3	-2	+4	-6	3
		+63			
+21		+187	+555		

Cociente:

Residuo:

b) $(4y - 6y^2 + 3y^3 - 4) \div (y + 6)$

+3	-6	+4	-4	
	-18		-888	
+3	+148			

Cociente:

Residuo:

c) $(-2n^3 + n^4 - 160n - 12) \div (n - 6)$

1	-2	+0	-160	-12	6
		+24			
+4	+24	-16			

Cociente:

Residuo:

3. **Realiza** las siguientes divisiones por división sintética.

a) $(3a^3 + 15a^2 - 34a + 56) \div (a + 7)$

Cociente:

Residuo:

b) $(30x^3 - 21x - 6x^4 + 5 + 4x^2) \div (x - 5)$

Cociente:

Residuo:

c) $\left(-\frac{7}{2}m^3 + \frac{1}{2}m + \frac{13}{4}m^2 - 2 + \frac{1}{2}m^5 - \frac{1}{4}m^4\right) \div (m - 2)$

Cociente:

Residuo:

d) $(1 + 0,75x^2 - 0,5x^5 + 3x^3) \div (x + 3)$

Cociente:

Residuo:

e) $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + 1\right) \div \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Cociente:

Residuo:

f) $(6m^3 - 3m^5 + 15) \div (m + 3)$

Cociente:

Residuo:

g) $(12x^4 - 4x^2 + 10) \div (x - 5)$

Cociente:

Residuo:

h) $(x^5 - 32x^2) \div (x - 2)$

Cociente:

Residuo:

4. **Problema-decisión.** Aplica lo aprendido en este tema. Luego, **decide** y **selecciona** el cociente y residuo para cada división.

a) $(2x^3 - 6x^2 + 2x - 1) \div (x - 2)$

A) $2x^2 - x - 2; -5$

C) $2x^2 - 2x - 2; -5$

B) $2x^2 - 2x + 2; 5$

D) $2x^2 + x - 2; -5$

b) $(4x^3 - x^2 - 5) \div (x + 3)$

A) $4x^2 - 13x + 39; -122$

C) $4x^2 - x - 1; -12$

B) $4x^2 - x - 2; -2$

D) $4x^2 + 1; -2$

5. Determina el cociente.

a) $\frac{4a^2 - 25b^2c^2}{2a - 5bc} =$

b) $\frac{81x^2y^4 - 64z^6}{9xy^2 + 8z^3} =$

c) $\frac{49a^2y^4 - 121z^6}{7ay^2 + 11z^3} =$

d) $\frac{36m^4n^2 - 100q^2}{6m^2n - 10q} =$

e) $\frac{-0,01z^2 + 0,25w^2}{0,5w + 0,1z} =$

f) $\frac{27m^3 - 64n^3}{3m - 4n} =$

g) $\frac{125x^6 + 343y^6}{5x^2 + 7y^2} =$

h) $\frac{216a^9 + 512b^9}{6a^3 + 8b^3} =$

i) $\frac{1331y^6 - 1000z^3}{11y^2 - 10z} =$

j) $\frac{8a^{3m} + 27b^{3n}}{2a^m + 3b^n} =$

k) $\frac{0,064x^{6a} - 0,216y^{9a}}{0,4x^{2a} - 0,6y^{3a}} =$

6. Completa las expresiones para que la igualdad sea verdadera.

a) $\frac{9a^4b^2 - 25c^6}{\quad} = 3a^2b + 5c^3$

b) $\frac{\quad}{3x^2y - z^3} = 9x^4y^2 + 3x^2yz^3 + z^6$

c) $\frac{\frac{1}{49}z^4 - \frac{64}{9}p^2}{\quad} = \frac{1}{7}z^2 - \frac{8}{3}p$

d) $\frac{1+x^6}{\quad} = x^4 - x^2 + 1$

e) $\frac{\quad}{3-x^3} = x^6 + 3x^3 + 9$

f) $\frac{\quad}{7a^2+b} = 7a^2 - b$

7. Desarrolla los cocientes.

a) $\frac{x^6 - y^6}{x - y} =$

b) $\frac{p^7 - 128s^{14}}{p - 2s^2} =$

c) $\frac{32x^5 + 243y^{10}}{2x + 3y^2} =$

8. Señala los cocientes que no son notables.

a) $\frac{100x^2 - 9}{10x + 3}$

b) $\frac{32x^{10} - 1}{2x^2 - 1}$

c) $\frac{8b^3 - 27}{2b + 3}$

d) $\frac{4x^6 + y^2}{2x^3 + y}$

Trabajo colaborativo

9. Trabajen en parejas y resuelvan.

Demuestren que

$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ y que

$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$

Actividad indagatoria

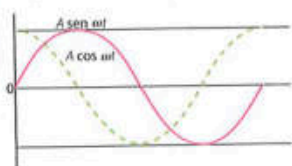
10. Investiga por qué la suma de potencias con exponentes pares iguales no es divisible para la suma de sus raíces.



Saberes previos

Efectúa los productos en tu cuaderno.

$$a(x + y + z) \quad 2xy^2(4xy - 5x^2y^3) \quad (a + z)(2m + 3p) \quad (7y + w^2)(x^2 - 2y)$$



Modelación de expresiones algebraicas



Competencia matemática

Como la energía viaja en forma de ondas, la matemática ha conseguido modelar este movimiento con expresiones algebraicas que muestran el tamaño de la onda y la frecuencia con que se producen.

Factorizar se refiere a la descomposición de un polinomio en el producto de otros polinomios de grado inferior al dado.

Existen varias técnicas de factorización, y en este tema vamos a tratar la factorización de un polinomio por factor común.

Algunas de las expresiones matemáticas que modelan el movimiento de las ondas que transportan energía son:

$$A \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$A \cdot \text{cos}(\omega t)$$

Si A es un factor, $\text{sen}(\omega t)$ es otro factor y $\text{cos}(\omega t)$ es otro factor, ¿cuál es el factor común que tienen estas dos expresiones?

Al comparar las dos expresiones, observamos que el factor común es A .

Factorización de monomios

Factorizar un monomio significa expresarlo como el producto de otros monomios.

Ejemplo 1 Factorizar el monomio $-6x^3y^2$

Solución Una de las tantas formas puede ser: $-2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y$



Interculturalidad

La práctica de conteo, vigente en algunas zonas de los Andes, tiene relación con sus creencias. Por ejemplo, el resultado del conteo de semillas significa que tendrán abundancia o deficiencia de producción en la agricultura, según se obtenga una cantidad par o impar.

Factorización de polinomios que tienen un factor común

El factor común de un polinomio se forma con el m.c.d. de los coeficientes y las letras de la parte literal que sean comunes con el menor exponente. Una vez conformado el factor común, dividimos cada término del polinomio para el factor común. Los cocientes constituyen el polinomio factor.

Ejemplo 2

Factorizar el monomio $4a^2b^3c^5 - 12a^3b^2c^3 + 20a^5bc^2$

Solución

La m.c.d. de 4, 12 y 20 es 4.

En la parte literal común es $a^2b^2c^2$. Por lo tanto, el factor común es $4a^2b^2c^2$.

Dividimos cada término del polinomio para el factor común y obtenemos:

$$4a^2b^3c^5 - 12a^3b^2c^3 + 20a^5bc^2 = 4a^2b^2c^2(b^2c^3 - 3abc + 5a^3)$$

M.5.1.1. Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas.

Ejemplo 3

Extraer el factor común de $(a-b)xy^2z + (a-b)yz^2 - (a-b)^2xz^3$.

Solución

El factor común es $(a-b)z$. Dividimos el polinomio para él y obtenemos:

$$(a-b)xy^2z + (a-b)yz^2 - (a-b)^2xz^3 = (a-b)z(xy^2 + yz - xz^2)$$

En algunos polinomios es necesario hacer agrupaciones para extraer el factor común de entre sus elementos; luego de esto, es probable que exista otro factor común. De ser así, el polinomio queda factorizado por agrupación.

Ejemplo 4

Factorizar el polinomio $6x^2 + 24x + 5ax + 20a$

Solución

El primer y segundo términos tienen la variable x en común, mientras que el tercer y cuarto términos tienen en común la constante a . Por lo tanto, los agrupamos de dos en dos.

$$(6x^2 + 24x) + (5ax + 20a)$$

Extraemos factor común en cada grupo.

$$6x(x + 4) + 5a(x + 4)$$

Los dos términos tienen como factor común $(x + 4)$. Por lo tanto tenemos:

$$6x^2 + 24x + 5ax + 20a = (x + 4)(6x + 5a)$$

Ejemplo 5

Factorizar el polinomio $12x^3 - 2x + 3 - 18x^2$

Solución

Agrupamos el primer término con el tercer término y el segundo con el cuarto.

$$(12x^3 - 18x^2) - (2x - 3)$$

En el primer grupo el factor común es $6x^2$. En el segundo, el factor común es 1, por lo que obtenemos:

$$6x^2(2x - 3) - (2x - 3)$$

Entre los dos términos, el factor común es $(2x - 3)$. Al dividir tenemos:

$$12x^3 - 2x + 3 - 18x^2 = (2x - 3)(6x^2 - 1)$$



Recuerda que...

Si introduces términos en un paréntesis precedido del signo negativo, estos cambian de signo.

$$-8x^2 - 3x = -(8x^2 + 3x)$$



DFA

El proceso de aprendizaje no debe ser una carrera de velocidad. Cada persona tiene su propio ritmo y debemos respetarlo.



Interdisciplinariedad

Matemática y Medicina

La factorización tiene aplicaciones muy puntuales en los campos de la medicina, pues ayuda a estudiar las redes neuronales y hace más fácil la comprensión de los mecanismos cerebrales del aprendizaje.

Indaga y responde:
¿para qué se utiliza la factorización dentro de las matemáticas?

I.M.4.2.1.

1. **Calcula** el m.c.d. de cada grupo de números.

- a) 14 y 21
- b) 12, 20 y 36
- c) 93, 72 y 66
- d) 18, 54 y 42

2. **Relaciona** en tu cuaderno cada monomio con su factorización.

- | | |
|---------------|--|
| a) $15ax^2$ | 1. $4 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot x \cdot x$ |
| b) $96x^3y^2$ | 2. $3 \cdot 7 \cdot a^2ax^2$ |
| c) $28a^2x^2$ | 3. $3 \cdot 6 \cdot a \cdot x \cdot x$ |
| d) $27x^5y^4$ | 4. $3 \cdot 5 \cdot a \cdot x^2$ |
| e) $18ax^2$ | 5. $12 \cdot 8 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^2$ |
| f) $6x^3y^2$ | 6. $2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^2$ |
| g) $21a^3x^2$ | 7. $3 \cdot 9 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y$ |

3. **Determina** el factor común de las siguientes expresiones.

- a) $a^3 + a$
- b) $a^3b + a^2b^2 + ab^3$
- c) $3xy^2 + 6$
- d) $2m^2n^2 + 4mn$
- e) $4m^2 - n^2$
- f) $20x - 12xy + 4xz$
- g) $6x^3y^2 - 4x^2y^3 + 8xy^4$
- h) $(x + 1)^2 - 6(x + 1)$

4. **Encuentra** el factor común y factoriza los binomios.

- a) $2ab + 4a^2b =$
- b) $18m^2 + 3mn =$
- c) $16q^2rt - 4qr^2t =$
- d) $63x^4y - 9x^2y^3 =$
- e) $4,9w^3z^2 + 0,7w^4z =$
- f) $14a^5n^4p - 28a^6n =$
- g) $25xyz + 75x^3y^2z^6 =$
- h) $36m^7n^7p^3 - 6m^5n^5p^7 =$

5. **Factoriza** los siguientes polinomios.

- a) $6x - 10 =$
- b) $a^2b + 3ab^2 =$
- c) $12xy^2 - 4y^3 =$
- d) $15m^2n^2 - 5mn =$
- e) $36x^3y^2z - 24xz^2 =$
- f) $21fg^2 - 14g =$
- g) $16p^2q - 12pq^2 + 20q^3 =$
- h) $35a^2b - 28ab^2 - 49 =$

6. **Factoriza** las expresiones con fracciones.

- a) $\frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{5}{2}ab =$
- b) $\frac{3}{7}m^{11}n^{10} + \frac{9}{7}m^{10}n^{11} =$

$$c) \frac{18}{25}x^2y^4 - \frac{24}{25}x^4y^2 =$$

$$d) \frac{13}{3}r^5s^{25} + \frac{52}{3}r^4s^{24} =$$

7. **Factoriza** las expresiones con coeficientes decimales.

$$a) 1,5x^6y^6 - 0,5x^3y^9$$

$$b) 0,4m^7n - 1,6mn^7 =$$

$$c) 3,2a^9b^5 + 0,8a^5b^9 =$$

8. **Extrae** el factor común de cada polinomio.

$$a) 6x^3y^2z + 12xyz - 4x^2y^3z^3$$

$$b) 15a^2b^3 - 25a^3b^4 - 20a^2b^2 + 35a^5b^3$$

$$c) -42w^5z^4 + 63w^7z^5 - 7w^3z^3 + 21w^6z^2$$

$$d) \frac{8}{9}a^6b^4c - \frac{16}{9}ab^3c^2 + \frac{4}{9}a^5bc^7$$

$$e) 0,64m^3n^3 - 0,8m^4n^2 + 0,16m^2n^4$$

$$f) 6x^3y^2z + 12xyz - 4x^2y^3z^3$$

9. **Identifica** el factor común y **factoriza**.

$$a) (n+1)x - (n+1)y$$

$$b) 2a(3a-5) + 7b(3a-5)$$

$$c) (x^{m+1} - y^n)a^3 + (x^{m+1} - y^n)b^3$$

$$d) 7m(a+b+c) - 8n(a+b+c)$$

10. **Completa** la factorización en tu cuaderno.

$$a) -72a^2b^3 - 6a^3b^2 = -6a^2b^2$$

$$b) -12x^4y^5 + 6x^6y^2 = (2y^3 - x^2)$$

$$c) -2(a+b) - c(a+b) = -(a+b)$$

$$d) -(m+n)y + (m+n)x = -(y-x)$$

11. **Factoriza** por agrupación de términos.

$$a) 6ax + 2ay + 12bx + 4by$$

$$b) m^2nx + n^4y + m^2xy + n^3y^2$$

$$c) 14mx^2 - 6ny + 21nx^2 - 4my$$

$$d) 3byr + 3bty + 4arx + 4atx$$

$$e) 2a - 4n - 3ya + 6ny =$$

$$f) x^3 - x - x^6 - x^4 =$$

$$g) 25x^2y - 5y^2 - 5x^5 - x^3y =$$

$$h) pm + 2b + bm + 2p =$$

$$i) 3x^2 - a^2 + x - 3a^2x =$$

$$j) 2x^3 - 1 - x^2 + 2x =$$

$$k) 3am - 3bm + 6an - 6bn =$$

Trabajo colaborativo

12. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Formulen un polinomio factorizable. **Intercámienlo** con otra pareja para que sea factorizado. **Expongan** las resoluciones en clase.

Actividad indagatoria

13. **Investiga** la expresión algebraica que permite calcular la distancia recorrida por un objeto que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme; **factorízala** y **expón** en clase.



Desequilibrio cognitivo

¿Cuáles de las expresiones representa la diferencia de dos cuadrados perfectos?

- a) $a^3 - 27b^3$ b) $4a^2 - \frac{1}{9}b^2$ c) $512x^3 + 1$ d) $a^2 - 100$ e) $4a^2 + 81b^2$



Red de comunicación



¿Sabías que?

Varias frecuencias de ondas de radio se usan para la televisión y emisiones de radio FM y AM, comunicaciones militares, teléfonos celulares, redes inalámbricas de computadoras y otras numerosas aplicaciones de comunicaciones.



Onda de sonido de radio

En la factorización, al igual que en aritmética, no todo polinomio se puede descomponer en un producto indicado de dos o más factores distintos de 1; hay expresiones algebraicas que solo son divisibles por la unidad y por ellas mismas; en consecuencia, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así, $a + b$ no se puede descomponer en dos factores distintos de 1 porque solo es divisible por $a + b$ y por la unidad.

La red de comunicación celular comprende algunos elementos, entre ellos, el de acceso al público (el teléfono celular). En el diseño de un teléfono celular se ha considerado la expresión $x^2 - y^2$ para representar el área de su parte rectangular frontal. ¿Es posible encontrar una expresión que represente su largo y otra que represente su ancho?

Si recordamos los productos notables, observaremos que cuando multiplicamos la suma de dos términos por su diferencia, obtenemos la diferencia de sus cuadrados. Como la factorización es un proceso contrario a la multiplicación, podemos decir que:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Por lo tanto, diremos que la expresión que representa al largo es $x + y$ y la que representa al ancho es $(x - y)$.

La diferencia de dos cuadrados perfectos es igual a dos factores: uno formado por la suma de sus raíces cuadradas, y el otro, por la diferencia de esas raíces.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 1

Factorizar $16x^2 - 49y^2$

Solución

Comprobamos que $16x^2$ y $49y^2$ sean cuadrados perfectos, es decir, calculamos sus raíces cuadradas exactas.

De $16x^2$ es $4x$ y de $49y^2$ es $7y$.

Como tales raíces existen, factorizamos aplicando la regla:

$$16x^2 - 49y^2 = (4x + 7y)(4x - 7y)$$

Ejemplo 2

Factorizar

a) $81a^4 - b^4$

b) $(x+y)^2 - (z-w)^2$

Solución

a) $81a^4 - b^4 = (9a^2 + b^2)(9a^2 - b^2)$

Uno de los factores contiene otra diferencia de cuadrados.

Al factorizar tenemos:

$$\begin{aligned} 81a^4 - b^4 &= (9a^2 + b^2)(9a^2 - b^2) \\ &= (9a^2 + b^2)(3a + b)(3a - b) \end{aligned}$$

b) $(x+y)^2 - (z-w)^2 = [(x+y) + (z-w)][(x+y) - (z-w)]$
 $= (x+y+z-w)(x+y-z+w)$

Diferencia de cubos

La diferencia de cubos es igual a dos factores: uno contiene la diferencia de sus raíces cúbicas y el segundo, la suma del cuadrado de la primera raíz con el producto de las dos raíces y el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 3

Factorizar $x^3 - 64y^6$

Solución

$$x^3 - 64y^6 = x^3 - [(2y^2)^3] = (x - 4y^2)(x^2 + 4xy^2 + 16y^4)$$

Suma de cubos

La suma de cubos es igual a dos factores: uno contiene la suma de sus raíces cúbicas y el segundo, el cuadrado de la primera raíz menos el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo 4

Factorizar $\frac{1}{8}x^9 + 729y^3$

Solución

$$\frac{1}{8}x^9 + 729y^3 = \left(\frac{1}{2}x^3 + 9y\right)\left(\frac{1}{4}x^6 - \frac{9}{2}x^3y + 81y^2\right)$$



Recuerda que...

Toda suma de potencias pares puede ser factorizada si esta puede convertirse en suma de cubos.

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\ &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \end{aligned}$$

$a^4 + b^4$ no es factorizable, pues no puede convertirse en suma de cubos perfectos.

Diferencia de bases con exponentes pares

$$a^4 - b^4 = (a - b)$$

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Suma de bases con exponentes impares

$$a^5 + b^5 = (a + b)$$

$$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

Diferencia de bases con exponentes impares

$$a^5 - b^5 = (a - b)$$

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$



Competencia socioemocional

La base para tener buenas relaciones interpersonales está en reconocer las emociones de los demás y conocer y manejar tus emociones.

Escribe un párrafo en el cuaderno acerca de la importancia de las relaciones interpersonales con tus compañeros. Preséntalo en clase.

I.M.4.2.1.

1. **Extrae** la raíz cuadrada de cada término.

a) $36x^2$

b) $144a^2b^4$

c) $81m^8n^2$

d) $25y^6z^{12}$

e) $0,0169a^2x^2$

f) $0,49x^{10}y^4z^2$

g) $\frac{9}{64}x^{2a}$

h) $\frac{225r^2t^2}{196s^4}$

i) $(a+b)^2$

j) $49(m+n)^4$

2. **Identifica** las expresiones que pueden ser factorizadas como diferencia de cuadrados.

a) $64m^2 - 16$

d) $4a^2 - 81b^4$

b) $121a^4 + 36z^6$

e) $8z^2 - 25w^2$

c) $49a^2 - 1$

f) $100b^{12}a^2 - 225$

3. **Factoriza** las siguientes expresiones algebraicas.

a) $16v^2 - 100z^2 =$

b) $169 - 121b^4 =$

c) $-324z^6 + 1 =$

d) $-400x^4y^4 + 9z^6 =$

e) $\frac{64}{25}a^2 - \frac{1}{4}b^2 =$

f) $\frac{100}{49}z^4 - \frac{36}{81}y^6 =$

g) $-\frac{1}{9}a^2 + \frac{b^4}{c^2} =$

h) $-1 + 1,69a^4b^2$

i) $a^2 - 1 =$

j) $x^2 - 4 =$

k) $9a^2 - b^2 =$

l) $16x^6 - y^2 =$

m) $1 - m^4 =$

n) $0,01 - \frac{49}{36}a^2 =$

o) $25a^2b^4 - c^8 =$

p) $121x^4 - 100y^8 =$

q) $81m^4 - n^4 =$

r) $(p-3)^2 - 4 =$

s) $(2x+3)^2 - (x-2)^2 =$

t) $\frac{9}{4}x^6 - \frac{y^2}{25} =$

4. **Factoriza** hasta la mínima expresión.

a) $16x^4 - y^4$

b) $m^8 - 81n^4$

5. **Extrae** la raíz cúbica de los siguientes términos:

a) $27a^3c^6$

b) $-64w^{12}y^6z^9$

c) $1331\frac{a^6}{b^3}$

d) $\frac{729}{8}x^{18}y^9z^3$

6. **Factoriza**.

a) $27x^3y^3 - 1 =$

b) $125a^6b^3 - 64c^3 =$

c) $216r^9 + 8s^3t^3 =$

d) $\frac{1}{343}m^3 - \frac{8}{729}n^3$

e) $a^3 - 1 =$

f) $b^3 + c^3 =$

g) $b^3 + 27 =$

h) $x^6 + y^3 =$

i) $1 + 64y^3 =$

j) $x^3y^3 - z^3 =$

7. **Descompón** en factores.

a) $x^{2n} - y^{4n} =$

b) $81a^{2m+2} - 1 =$

c) $0,04x^{2n} - 0,01y^2$

d) $a^{4x+2} - 25b^{2x+2} =$

8. **Factoriza** la suma de cubos.

a) $8n^3 + 216m^3 =$

b) $512x^3 + 1 =$

c) $0,512 + 0,008x^{3n}$

9. **Factoriza y obtén** dos factores.

a) $x^{12} + y^{12} =$

b) $64x^6 + y^{18} =$

c) $b^6 + c^6 =$

d) $a^{12} + b^{12} =$

e) $8 + x^6 =$

f) $a^6 + b^3 =$

g) $m^{10} + n^{10} =$

h) $m^6 + 27 =$

i) $8p^6 + q^3 =$

j) $64 + y^{12} =$

k) $x^6 + 125 =$

l) $x^{10} + 1 =$

Trabajo colaborativo

10. **Trabajen** en parejas y resuelvan.

Formulen una suma de potencias pares que sea factorable y otra que no lo sea. **Intercambien** la suma con otra pareja, que decidirá qué binomio factorizará. **Expongan** en clase.

Actividad indagatoria

11. **Investiga** cómo quedaría factorizado el binomio $a - b$ si consideramos que a y b son cuadrados perfectos.



Radiografía de tórax



Saberes previos

Desarrolla los siguientes binomios en tu cuaderno:

$$(x + y)^2 = \quad \left(2a + \frac{1}{3}b\right)^2 =$$

Una expresión algebraica es un cuadrado perfecto cuando es el producto de dos factores iguales. Por ejemplo, $64a^2$ es cuadrado perfecto de $8a$; y $25x^2$ es cuadrado perfecto de $5x$.

En este tema analizaremos la factorización de trinomios cuadrados perfectos.

En el diseño de la lámina de impresión radiográfica de la imagen, se ha usado la expresión $9x^2 + 6xy + y^2$ para expresar su área, ¿es correcto decir que la placa es cuadrada?

Dado que el área del cuadrado se obtiene elevando su lado al cuadrado, debemos determinar la expresión que representa el área que resulta de esta operación. Para ello, vamos a conceptualizar lo que es un trinomio cuadrado perfecto.



¿Sabías que?

Los rayos X son un tipo de radiación electromagnética, invisible para el ojo humano, capaz de atravesar cuerpos opacos y de imprimir películas fotográficas. Los actuales sistemas digitales permiten obtener y visualizar la imagen radiográfica directamente en una computadora, sin necesidad de imprimirla.

Un trinomio cuadrado perfecto (TCP) es un polinomio ordenado en relación con una variable; es cuadrado perfecto cuando el primer y tercer término son cuadrados perfectos (o tienen la raíz cuadrada exacta) y positivos. Además, el segundo término equivale al doble del producto de estas raíces cuadradas.

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Esta expresión se obtiene al desarrollar el cuadrado de un binomio. Por lo tanto:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

De acuerdo con esta información, determinamos si la expresión $9x^2 + 6xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto:

$$9x^2 + 6xy + y^2$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & y \\ \left[\begin{array}{c} \rightarrow 2(3x)y \leftarrow \end{array} \right] \\ 6xy \end{array}$$

Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto: se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio ya formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

$$9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2$$

El resultado obtenido nos permite deducir que la forma de la lámina de impresión radiográfica es la de un cuadrado cuyo lado queda representado por la expresión $3x + y$.



Interculturalidad

En la actualidad, muchas comunidades indígenas continúan recreando sus prácticas educativas ancestrales. Estas permiten conocer no solo sus aspectos sociopolíticos y socioculturales, sino también sus conocimientos científicos.

Ejemplo 1

Factorizar $49a^4 - 42a^2b + 9b^2$

Solución

$$\begin{array}{ccc} 49a^4 & - & 42a^2b + 9b^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 7a^2 & & 3b \\ \swarrow & & \searrow \\ 2(7a^2)(3b) & & \\ & & 42a^2b \end{array}$$

Comprobamos si hay dos términos cuadrados perfectos.

Observamos que el término del medio sea el doble producto de las raíces de los cuadrados perfectos.

Como cumple las condiciones:

$$49a^4 - 42a^2b + 9b^2 = (7a^2 - 3b)^2$$

Trinomio cuadrado perfecto incompleto

- Algunas veces los trinomios tienen dos términos positivos cuadrados perfectos, pero el otro término no cumple la condición de ser el doble producto de las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos. En este caso se busca la manera de completarlo; al final resulta una diferencia de cuadrados.
- Este caso de factorización se conoce como trinomio cuadrado perfecto incompleto.

Ejemplo 2

Factorizar $16w^4 - 68w^2z^2 + 64z^4$

Solución

$16w^4$ y $64z^4$ son cuadrados perfectos positivos, pero $68w^2z^2$ no es el doble producto de las raíces cuadradas. Este término debería tener la forma $64w^2z^2$. Por lo tanto, para convertirlo en un TCP, sumamos $4w^2z^2$, pero para no alterar la expresión, también restamos $4w^2z^2$.

$$(16w^4 - 68w^2z^2 + 64z^4 + 4w^2z^2) - 4w^2z^2$$

$$(16w^4 - 64w^2z^2 + 64z^4) - 4w^2z^2$$

$$(4w^2 - 8z^2)^2 - 4w^2z^2 \quad \text{Obtenemos una diferencia de cuadrados.}$$

$$[(4w^2 - 8z^2) + 2wz][(4w^2 - 8z^2) - 2wz]$$

$$(4w^2 - 8z^2 + 2wz)(4w^2 - 8z^2 - 2wz)$$



Recuerda que...

En ocasiones, es necesario agrupar al trinomio en un paréntesis para que cumpla las condiciones de un TCP.

$$\begin{aligned} -b^2 + 2b - 1 &= -(b^2 - 2b + 1) \\ &= -(b - 1)^2 \end{aligned}$$



Competencia digital

Ingresa al siguiente enlace: lynk.ec/9m14 y evalúa tu conocimiento.



Interdisciplinariedad

Matemática y Contabilidad

La factorización es una herramienta muy útil en los campos empresariales. A partir de ella se da solución a diversos problemas y modelos financieros de cualquier índole.

I.M.4.2.1.

1. **Obtén** el segundo término de cada trinomio para que sean trinomios cuadrados perfectos.

a) $1 + \quad + 4b^2$

b) $81a^2 + \quad + 16c^2$

c) $144x^4 + \quad + 49y^2$

d) $\frac{1}{4}m^2n^2 + \quad + \frac{16}{9}p^4q^2$

e) $0,36x^2y^2 - \quad + 0,25z^4$

f) $4x^{2m} - \quad + 196y^{2n}$

g) $\frac{4}{225}a^{2x+2} + \quad + b^{4x+2}$

h) $9x^2 + \quad + 64 =$

i) $4x^4 - \quad + 36 =$

j) $25a^2 + \quad + 9 =$

k) $4a^8 + \quad + 81 =$

l) $49x^2 - 28x + \quad =$

m) $36x^2 + 36xy + \quad =$

2. **Identifica** los trinomios cuadrados perfectos.

a) $1 + 2ab - b^2$

b) $169r^2 - 26rs + s^2$

c) $-4x^2 + 24xy^2z + 36y^4z^2$

d) $2a^2b^2 - 4abc^2 + 4c^4$

e) $-6xy + 9x^2 + y^2$

f) $121m^2 - 88mnp + 64n^2p^2$

g) $x^2 - 2x + 1$

h) $a^2 - 2a + 4$

i) $m^4 - 6m + 9$

j) $1 + 10m + 100m^2$

k) $p^2 - 8pq + 16q^2$

l) $25s^2 - 10s - 1$

3. **Comprueba** si son trinomios cuadrados perfectos. Luego **factoriza**.

a) $4x^2 + 4xy + y^2$

b) $-9a^2 - 12ab - 4b^2$

c) $36x^2 - 24xy^2 + 4y^4$

d) $\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{6}xz + \frac{4}{9}z^2$

e) $0,01n^2 + 0,36m^6 - 0,12m^3n$

f) $-\frac{8}{25}r^3 + 1 + \frac{16}{625}r^6$

g) $x^2 - 2xy + y^2 =$

h) $a^2 + 4a + 4 =$

i) $4m^4 - 12m^2 + 9 =$

j) $4m^4 - 12m^2 + 9 =$

k) $m^2 + 20mn + 100n^2 =$

l) $p^4 - 8p^2q + 16q^2 =$

4. **Extrae** el factor común y luego **factoriza** el trinomio.

a) $ax^2 + 2axy + ay^2 =$

b) $4mx^2 - 12my + 9m =$

c) $-w^2z^2 + 4wtz^2 - 4t^2z^2 =$

d) $96xy - 64x^2 - 36y^2$

e) $9a^2x + 6abx + b^2x =$

f) $x^2y + 8xy + 16y =$

g) $16x^2 - 48xy + 36y^2 =$

h) $-x^2 + 14xy - 49y^2 =$

i) $100a^2x^2 + 20abx^2 + b^2x^2 =$

j) $m^2p - 0,5mp + 0,0625p =$

k) $-n^4 + 10n^2p - 25p^2 =$

5. **Descompón** en factores.

a) $(x+y)^2 - 2(x+y)z^3 + z^6 =$

b) $81m^4 + 18m^2(a+b) + (a+b)^2 =$

c) $(2x+5y)^2 - 2(2x+5y)(z+w) + (z+w)^2 =$

6. **Selecciona** en cada caso la factorización correcta del polinomio.

a) $(x-y)^2 - 12(x-y) + 36$

A) $(x+y-6)^2$

C) $(x-y-6)^2$

B) $(x-6y)^2$

D) $(x+y+6)^2$

b) $16 - 8(a-b) + (a-b)^2$

A) $(4-a-b)^2$

C) $(4+a+b)^2$

B) $(4-a+b)^2$

D) $(4+a-b)^2$

7. **Resuelve** los trinomios cuadrados perfectos incompletos.

a) $a^4 + a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 + a^2b^2$

b) $81x^4 - 36x^2y^2 + 16y^4$

c) $25x^4 + 64x^2y^2 + 100y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2$

d) $4z^4 + y^4 + 4z^2y^2 - 4z^2y^2$

e) $256m^4 + 64m^2n^2 + 16n^4$

f) $1 + b^4$

g) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

h) $m^4 + 2m^2n^2 + 9n^4$

i) $25a^4 + a^2b^2 + b^4$

j) $16x^4 + 8x^2y^2 + 9b^4$

Trabajo colaborativo

8. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Creen dos trinomios cuadrados a partir de binomios al cuadrado. **Intercámbienlos** con otro grupo para que los **factoricen**.

Actividad indagatoria

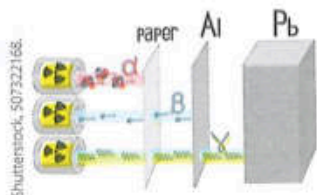
9. **Investiga** cómo estructurar un trinomio cuadrado perfecto incompleto. **Formula** uno y **explica** en clase cómo lo hiciste.

Factorización de trinomios de las formas $x^2 + bx + c$; $ax^2 + bx + c$



Desequilibrio cognitivo

Reflexiona: ¿cuál es la expresión que representa el área de un rectángulo cuyo largo está determinado por $a - 2$ y cuyo ancho, por $a - 3$?



Radiación rayos gamma

En el desarrollo del producto notable $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, se obtiene un trinomio de la forma $x^2 + px + q$. Para ello, se hace $a + b = p$ y $ab = q$; por lo tanto, la relación directa entre productos notables y factorización es directa.

En este tema analizaremos los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, $ax^2 + bx + c$.

Para evitar la radiación producida por los rayos gamma, se ha construido una placa de plomo, cuya área ha sido representada por la expresión $x^2 + 5x - 24$. ¿Cuál es la expresión que representa el largo y el ancho de la placa?

Para responder la interrogante, debemos recordar que un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se obtiene a partir del producto de dos binomios que tienen como término común una letra con coeficiente 1. Por lo tanto, revisemos la forma de factorizar este trinomio.



¿Sabías que?

Otro tipo de energía electromagnética son los rayos gamma. Estos rayos vienen desde el espacio y son absorbidos por la atmósfera. Sin embargo, pueden ser producidos al manipular los átomos de elementos radiactivos. Su energía es tan grande que pueden causar daño al núcleo de las células. Esta propiedad se usa para esterilizar alimentos e instrumental médico.

La factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ corresponde a factores (paréntesis). Los dos contendrán la raíz cuadrada del primer término del trinomio. A continuación del primer término, en el primer paréntesis irá el signo del segundo término del trinomio, mientras que luego del primer término del segundo paréntesis, irá el signo que resulte de multiplicar los signos del segundo y tercer término. Luego se buscarán dos términos que sumados algebraicamente den el coeficiente b y que multiplicados algebraicamente den c .

$$x^2 + bx + c = (x + d)(x + e) \quad \text{Siempre que } d + e = b \text{ y } d \cdot e = c$$

En el trinomio $x^2 + 5x - 24$, que representa el área de la placa, tenemos:

$$x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3), \text{ puesto que } 8 - 3 = 5 \text{ y } (+8)(-3) = -24$$

Ejemplo 1

Factorizar $x^2 + 6xy - 7y^2$

Solución

Este trinomio contiene como término independiente la letra y . Por lo tanto, los términos por encontrar deberán contener dicha letra.

$$x^2 + 6xy - 7y^2 = (x + 7y)(x - y)$$

Porque: $7y - y = 6y$ y $(+7y)(-y) = -7y^2$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La factorización de este trinomio se obtiene de la siguiente manera:

1. Multiplicamos el coeficiente de a con c .
2. Abrimos 2 paréntesis; en cada uno colocamos a y la raíz de x^2 .
3. En el primer paréntesis luego del primer término escribimos el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo paréntesis, el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo con el signo del tercer término del trinomio.
4. Buscamos dos términos que sumados algebraicamente den b y que multiplicados algebraicamente den el producto $a \cdot c$.
5. Dividimos toda la expresión para a .
6. Finalmente, extraemos el factor común de los paréntesis, con la finalidad de simplificar el denominador a .

Ejemplo 2

Factorizar $9m^2 - 18m - 7$

Solución

63

$$9m^2 - 18m - 7$$

$$(9m - \quad)(9m + \quad)$$

$$\frac{(9m - 21)(9m + 3)}{9}$$

$$\frac{3(3m - 7) \cdot 3(3m + 1)}{3 \cdot 3}$$

$$9m^2 - 18m - 7 = (3m - 7)(3m + 1)$$

Multiplicamos 9 por 7.

Colocamos los signos según lo indicado.

Buscamos los números que sumados dan -18 y multiplicados -63 y dividimos por 9.

Extraemos factor común en cada paréntesis y simplificamos.

Método del aspa

Consiste en descomponer en dos factores el primer y tercer término de un trinomio, de manera que el producto en cruz nos permita obtener el término del medio.

Ejemplo 3

Factorizar $2x^2 + 3x - 54$

Solución

$$2x^2 + 3x - 54$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad -9 \quad -9x \\ x \quad 6 \quad +12x \\ \hline 3x \end{array}$$

$$2x^2 + 3x - 54 = (2x - 9)(x + 6)$$



Competencia digital

Ingresa al enlace
y practica

lynk.ec/9m26



Recuerda que...

En algunos trinomios se debe primero extraer el factor común.

$$6x^2 + 27x - 15$$

10

$$3(2x^2 + 9x - 5)$$

$$\frac{3(2x + 10)(2x - 1)}{2}$$

$$\frac{3 \cdot 2(x + 5)(2x - 1)}{2}$$

$$3(x + 5)(2x - 1)$$

I.M.4.2.1.

1. **Descompón** los números. **Exprésalos** en dos factores.

a) $48 =$

d) $120 =$

b) $84 =$

e) $104 =$

c) $162 =$

f) $170 =$

2. En cada literal, **escribe** dos números que cumplan las condiciones dadas.

a) Multiplicados den 60 y sumados 16

b) Multiplicados den -30 y sumados -13

c) Multiplicados den 3 y sumados -4

d) Multiplicados den 6 y sumados -5

e) Multiplicados den -28 y sumados -3

f) Multiplicados den -54 y sumados 3

g) Multiplicados den -11 y sumados 10

h) Multiplicados den 36 y sumados -15

3. **Identifica** el tipo de trinomio.

a) $a^2 + 13a + 42$

b) $9a^2 + b - 2b^2$

c) $4x^2 + 12xy - 2b$

d) $z^2 + 3zw + 28w^2$

4. **Factoriza** los trinomios.

a) $x^2 + 5x - 66 =$

b) $x^2 + 30x + 104 =$

c) $a^2 - 25a - 84 =$

d) $m^2 + 8m - 84 =$

e) $a^2b^2 + 8ab - 105 =$

f) $x^2 + 4y - 32y^2 =$

g) $m^2 + 22mn + 112n^2 =$

h) $z^2 + 20zu - 69u^2 =$

i) $p^2 + 23pr - 108r^2 =$

j) $t^2 + w - 110w^2 =$

k) $a^2 + 7a + 12 =$

l) $x^2 - 8x - 33 =$

m) $m^2 - 11m + 24 =$

n) $a^2 - a - 6 =$

o) $b^2 + 4b - 5 =$

p) $p^2 + 9p - 22 =$

q) $a^2 + 3a - 10 =$

r) $x^2 + 3x - 18 =$

s) $a^4 - 5a^2 - 14 =$

t) $x^2 - 5xy - 36y^2 =$

u) $a^2 + 13a - 90 =$

v) $m^2 + 4mn^2 - 21n^4 =$

5. Descompón en factores los trinomios.

- a) $3x^2 + 8x + 5 =$
- b) $12a^2 + 13a - 14 =$
- c) $2x^2 + x - 36 =$
- d) $6q^2 + 4qr - 32r^2 =$
- e) $10x^2 + 23xy - 42y^2 =$
- f) $m^2 + 8m - 84 =$

6. Factoriza los trinomios utilizando la fórmula general.

- a) $x^2 + x - 12 =$
- b) $6x^2 + 7x - 3 =$
- c) $35x^2 + 37x - 6 =$
- d) $2a^2 - 13a + 6 =$
- e) $6x^2 - 7x - 3 =$
- f) $9m^2 + 6m - 8 =$
- g) $24a^2 - 38a + 15 =$
- h) $2b^2 - 3b - 9 =$
- i) $4p^2 - 16p + 15 =$
- j) $4a^2 + 19ab - 5b^2 =$
- k) $6m^2 - 19m + 10 =$
- l) $6x^2 - 5x - 21 =$
- m) $8a^4 - 37a^2 - 15 =$

n) $6x^2 + 49xy - 45y^2 =$

o) $8a^2 + 6a - 35 =$

p) $10m^2 - 23m - 5 =$

q) $10x^4 - 21x^2 - 10 =$

r) $8a^2 - 26ab + 15b^2 =$

s) $30b^2 - 7b - 15 =$

7. Utiliza el método del aspa para factorizar los trinomios.

a) $x^3 + 11x^2 - 42x =$

b) $2x^2 + x - 45 =$

c) $40x^2 + 29xy + 3y^2 =$

d) $8m^2 + 45mn - 18n^2 =$

e) $x^{4a} + 12x^{2a} + 32 =$

f) $6x^2 - 7x - 3 =$

g) $10a^2 + 31a - 63 =$

h) $2x^2 - 11x + 12 =$

Trabajo colaborativo

8. Trabajen en parejas y resuelvan.

Busquen con anticipación un trinomio de la forma $ax^2 + b + c$, y **resuelvan** los trinomios por el método del aspa.

Actividad indagatoria

9. Investiga cómo expresar la factorización del trinomio $x^2 - x - 3$. **Resuelve** de dos formas diferentes.

Medidas de tendencia central para datos agrupados



Saberes previos

Calcula la media, mediana y moda de los siguientes datos que corresponden a la edad de un grupo de diez jóvenes:

15 14 15 16 13 18 15 14 17 16

En una ciudad, se ha medido durante un mes el índice de radiación de los rayos ultravioleta. Estos datos han sido registrados en la siguiente tabla. ¿Cuáles son las medidas de tendencia central de este grupo de datos?

Índices de radiación de una ciudad durante un mes			
Índice	x	f_i	F_i
[1 – 3]	2	5	5
[3 – 5]	4	8	13
[5 – 7]	6	6	19
[7 – 9]	8	5	24
[9 – 11]	10	4	28
[11 – 13]	12	2	30
TOTAL		30	

Archivo Editorial.

Revisemos cómo calcular las medidas de tendencia central.

Media

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f_i}{N} \text{ donde: } \sum x \cdot f_i \text{ suma de los productos de } x \text{ con } f_i$$

De acuerdo con la fórmula, es necesario calcular los productos de x con f_i , los cuales registramos en la tabla.

Índice de radiación de una ciudad durante un mes				
Índice	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[1–3]	2	5	5	10
[3 – 5]	4	8	13	32
[5 – 7]	6	6	19	36
[7 – 9]	8	5	24	40
[9 – 11]	10	4	28	40
[11 – 13]	12	2	30	24
TOTAL		30		182

Archivo Editorial.



Gráfico de radiaciones solares



Competencia comunicacional

La mayor parte de los rayos ultravioletas, UV, del Sol son absorbidos por la atmósfera; sin embargo, debido al agujero de la capa de ozono, los rayos UV llegan cada vez en mayor cantidad a la superficie terrestre.

Elabora un resumen en el cuaderno acerca de las afectaciones que producen estos rayos a las personas. **Preséntalo** a la clase.



Shutterstock: 796343298.



Me refuerzo

Imprime la página 1 del documento y **practica** medidas de tendencia central. lynk.ec/9m15

M.4.3.6. Definir y aplicar niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.

M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Al aplicar la fórmula, tenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f_i}{N}; \bar{x} = \frac{182}{30}; \bar{x} = 6,1$$

Mediana Me

Para calcularla se debe seleccionar un intervalo, el cual se identifica dividiendo el número de datos por 2. La cantidad obtenida se busca en la columna de F_i . De no haberla, se toma la mayor F_i siguiente.

$$M_e = L_i + A \left(\frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \text{ donde:}$$

L_i límite inferior del intervalo seleccionado.

A amplitud de los intervalos.

F_{i-1} F_i anterior del intervalo seleccionado.

f_i frecuencia absoluta del intervalo.

Al aplicar la fórmula obtenemos:

$$M_e = 5 + 2 \left(\frac{\frac{30}{2} - 13}{6} \right); M_e = 5,67$$

Moda Mo

Al igual que para la mediana, debemos seleccionar un intervalo al cual llamaremos modal. Este intervalo corresponderá al que contiene a la mayor f_i .

$$M_o = L_i + A \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right] \text{ donde:}$$

f_{i-1} f_i anterior a la del intervalo modal.

f_{i+1} f_i siguiente a la del intervalo modal.

$$M_o = 3 + 2 \left[\frac{8 - 5}{(8 - 5) + (8 - 6)} \right]; M_o = 5 + 2 \left[\frac{3}{3 + 2} \right] = M_o = 6,2$$



Interdisciplinariedad

Matemática y Psicología

El tiempo que transcurre entre la finalización de la presentación de un chiste y el momento en que una persona comienza a reírse se denomina tiempo de reacción. En psicología, es un caso de estudio. La tabla muestra el resultado de una experiencia medida en décimas de segundo.

Tiempo	f_i	F_i
[12,5 – 18,5)	5	5
[18,5 – 24,5)	57	62
[24,5 – 30,5)	134	196
[30,5 – 36,5)	130	326
[36,5 – 42,5)	58	384
[42,5 – 48,5)	10	394

El intervalo de la mediana es: [30,5 – 36,5)

El intervalo modal es:

[24,5 – 30,5)

Archivo Editorial



Competencia digital

Refuerza tu conocimiento sobre medidas de tendencia central; puedes revisar el siguiente video:

lynk.ec/9m16



I.M.4.8.1.

1. En la siguiente tabla de datos **identifica**:

Masa de un grupo de estudiantes				
Edad	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[40 – 50]	45	4	4	180
[50 – 60]	55	10	14	550
[60 – 70]	65	2	16	130

a) $N =$

b) $\frac{N}{2} =$

- c) Intervalo en que se calculará la mediana y la moda

d) $L_i =$

e) $A =$

f) $f_{i-1} =$

g) $f_{i+1} =$

2. Lee el enunciado y **realiza** las actividades.

En una empresa se registró la edad de sus empleados, que se resume en la siguiente tabla:

31	48	51	36	56	49
60	18	40	35	36	40
29	46	48	39	39	34
37	44	56	47	42	49
42	29	27	38	25	48

Organiza en tu cuaderno los datos en una tabla de frecuencias que contenga la marca de clase x , la frecuencia absoluta f_i y la frecuencia absoluta acumulada F_i y $x \cdot f_i$.

$R = 60 - 18 =$

$K =$

$\approx$

$A =$

Edad de los empleados de una fábrica

Edad	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[18 – 25]				
[25 – 32]				
[32 – 39]				
[39 – 46]	En tu cuaderno			
[46 – 53]				
[53 – 60]				
TOTAL				

3. Calcula la media ($\bar{x}$).

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i}{N}$$

4. Calcula la mediana.

$$M_e = L_i + A \left(\frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

5. Calcula la moda.

$$M_o = L_i + A \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right]$$

6. **Determina** la media, la mediana y la moda para el siguiente caso. Luego, **selecciona** la opción correcta.

Se determinaron las notas (sobre veinte puntos) obtenidas por un grupo de estudiantes en una prueba de matemática: 15, 20, 15, 18, 20, 18, 16, 15, 16, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 18, 14, 18.

a) Media = 16,2

Mediana = 16

Moda = 15

c) Media = 19

Mediana = 15

Moda = 16

b) Media = 17

Mediana = 17

Moda = 18

d) Media = 15

Mediana = 20

Moda = 18

7. **Completa** en tu cuaderno cada tabla y **calcula** las medidas de tendencia central de los grupos de datos agrupados en cada caso.

Gasto mensual en transporte				
Edad	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[0 – 50)		22		
[50 – 100)		25		
[100 – 150)		18		
[150 – 200)		12		
[200 – 250)		10		
[250 – 300)		12		
[300 – 350)		8		
[350 – 400)		6		
[400 – 450)		5		
[450 – 500)		2		
TOTAL		120		

a)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i}{N}$$

$$\bar{x} =$$

$$\frac{N}{2} =$$

$$M_e = L_i + A \left(\frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

$$M_e =$$

$$M_o = L_i + A \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \right]$$

$$M_o =$$

Trabajo colaborativo

8. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Entre todos los integrantes del curso, **registren** sus estaturas en centímetros. **Organicen** la información en una tabla de frecuencias con datos agrupados y, junto a dos estudiantes, **calculen** las medidas de tendencia central.

b)

Ingreso mensual de los padres de familia de un año de básica				
Ingreso \$	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[300 – 400)		4		
[400 – 500)		6		
[500 – 600)		2		
[600 – 700)		10		
[700 – 800)		6		
[800 – 900]		5		
[900 – 1 000)		2		
[1 000 – 1 100)		2		
[1 100 – 1 200)		1		
TOTAL		38		

$$\bar{x} =$$

$$M_e =$$

$$M_o =$$

9. **Completa** en tu cuaderno la tabla y **calcula** la media, la mediana y la moda de la siguiente distribución.

Salario en dólares				
Salarios \$	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[360 – 370)		20		
[370 – 380)		30		
[380 – 390)		42		
[390 – 400)		8		
TOTAL				

Actividad indagatoria

10. **Investiga** cómo calcular la desviación estándar en datos agrupados. **Aplica** la fórmula en algunos problemas de la ejercitación.

Utiliza el siguiente enlace web: lynk.ec/9m17

Estrategia: buscar regularidades

Problema resuelto

Se calcula la suma de cinco grupos de números enteros consecutivos y se observa que se cumple una regularidad.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$$

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$$

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 = 1\,680$$

Determinar la regularidad y luego verificarla con otros dos grupos de números consecutivos.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Qué son números consecutivos?

Son aquellos que están uno a continuación de otro.

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Buscamos la regularidad.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Al analizar los productos de números consecutivos, observamos que si les sumamos 1 obtenemos números cuadrados perfectos.

$$24 + 1 = 25 = 5^2$$

$$120 + 1 = 121 = 11^2$$

$$360 + 1 = 361 = 19^2$$

$$840 + 1 = 29^2$$

$$1\,680 + 1 = 1\,681 = 41^2$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La regularidad que se observa y se cumple puede ser representada con la expresión algebraica $x^2 - 1$, la cual se cumple en:

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 = 3\,024 \quad 3\,024 + 1 = 3\,025 = 55^2$$

$$8 \times 9 \times 10 \times 11 = 7\,920 \quad 7\,920 + 1 = 7\,921 = 89^2$$

Problema resuelto

Se calcula la suma de los cubos de números consecutivos y se observa que se cumple una regularidad.

$$1^3 + 2^3 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$$

Determinar la regularidad y luego verificarla con otros dos grupos de números consecutivos.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Qué son números consecutivos?

Son aquellos que están uno a continuación de otro.

¿Cómo se calcula el cubo de un número?

Se multiplica un número tres veces por sí mismo.

2. Fijar una estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Buscamos la regularidad.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Al analizar los resultados de las sumas, observamos que estas son la suma de los números (bases) elevada al cuadrado.

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

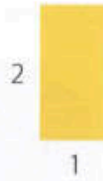
La suma de los cubos de números consecutivos es igual a un cuadrado perfecto.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 784 = 28^2$$

Problemas propuestos

1. Un rectángulo mide 1 cm de ancho y 2 cm de largo. Si el ancho aumenta un centímetro cada vez y el largo se conserva, ¿en cuánto aumenta el perímetro? **Comprueba** si hay una regularidad al completar la tabla. ¿Cuál es la regularidad?



- a) Comprender el problema.

Ancho	1	2	3	4	5	6	7
Largo	2	2	2	2	2	2	2
Perímetro							

- b) Plantear la estrategia.
c) Aplicar la estrategia.
d) Responder.

2. Si con cuatro palillos se puede formar un cuadrado, ¿cuántos palillos se necesitan para formar 10 cuadrados? **Encuentra** la regularidad al completar la tabla. ¿Cuál es la regularidad?



- a) Comprender el problema.
b) Plantear la estrategia.
c) Aplicar la estrategia.

Cuadrados	1	2	3	4	5	...	10
Número de palillos							

- d) Responder.

3. Si con tres palillos se puede formar un triángulo, ¿cuántos palillos se necesitan para formar 10 triángulos? **Encuentra** la regularidad al completar la tabla. ¿Cuál es la regularidad?



- a) Comprender el problema.
b) Plantear la estrategia.

Triángulos	1	2	3	4	5	...	10
Número de palillos							

- c) Aplicar la estrategia.
d) Responder.

4. ¿Cuánto suman los 30 primeros números pares? **Completa y encuentra** la regularidad.

- a) Comprender el problema.
b) Plantear la estrategia.
c) Aplicar la estrategia.

$$2 =$$

$$2 + 4 =$$

$$2 + 4 + 6 =$$

$$2 + 4 + 6 + 8 =$$

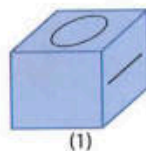
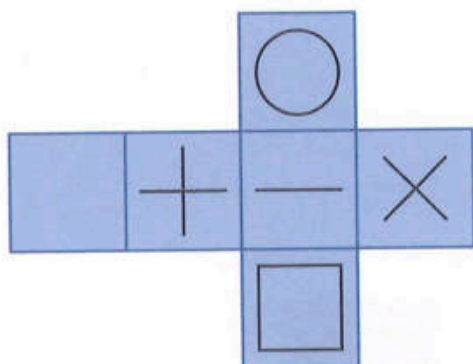
$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 =$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 \dots + 60 =$$

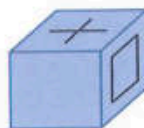
- d) Responder.

Desarrollo de cubos

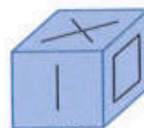
La figura de la izquierda representa el desarrollo de un cubo. ¿Qué figuras representan el cubo armado?



(1)



(2)



(3)

a) Solo 2

b) 1 y 2

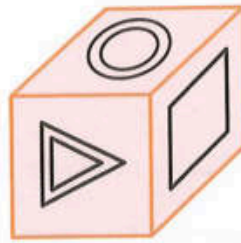
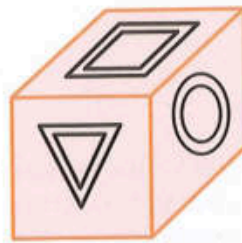
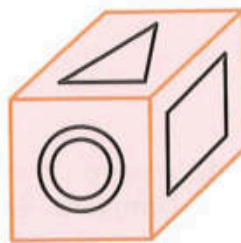
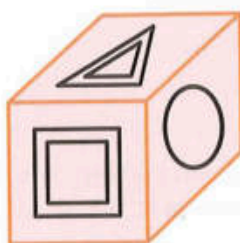
c) 2 y 3

d) 1 y 3

e) Las tres

f) Solo 1

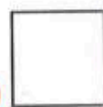
Observa las cuatro vistas del cubo. Luego, selecciona la figura que se opone a



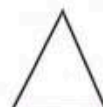
a)



b)



c)



d)



Cálculo mental

Cuadrado de un número que termina en 5

Estrategia:

- Quitar la cifra de la unidad del número.
- Multiplicar el número que queda por su consecutivo.
- Agregar 25 al número obtenido en el paso anterior.

Ejemplo:

Calcular el cuadrado de 35.

Al retirar la cifra de las unidades, tenemos 3.

Multiplicamos por su consecutivo: $3 \times 4 = 12$

Agregamos al 12 el número 25: 1 225

Ahora, hazlo tú.

a) $15^2 =$

b) $25^2 =$

c) $45^2 =$

d) $65^2 =$

e) $75^2 =$

f) $55^2 =$

g) $95^2 =$

h) $85^2 =$

i) $105^2 =$

j) $205^2 =$

k) $305^2 =$

l) $605^2 =$

m) $505^2 =$

n) $705^2 =$

o) $405^2 =$

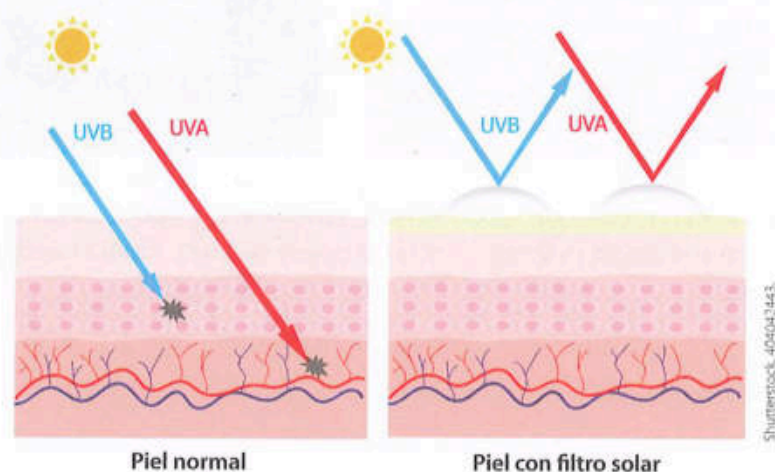
p) $805^2 =$

¡A cuidarse de los rayos solares!

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y Ciencias Naturales

Justificación / problemática

Los rayos UV emitidos por el Sol (debido al agujero que se ha producido en la capa de ozono) llegan a la superficie terrestre, pues no son absorbidos adecuadamente por la atmósfera. De acuerdo con los índices de radiación de estos rayos, las personas debemos tomar precauciones para evitar los daños que se pueden producir en la piel.



En la ilustración podemos observar cómo el uso de protector solar nos protege de los rayos UVB y UVA.

Objetivo

Informar sobre los niveles de radiación que ha experimentado la ciudad o localidad donde habitan los estudiantes y sobre las precauciones que deben tomarse en cada nivel de emisión de rayos UV.

Recursos

- Cartulinas
- Marcadores
- Recortes de imágenes

Actividad

- **Investiga** sobre los niveles de radiación que la ciudad o localidad donde habitas tú y tus compañeros ha experimentado en los últimos 30 días.



Evaluación

1. **Elabora** dos tipos de carteles informativos sobre los niveles de radiación de los rayos ultravioleta y las precauciones que se deben tomar de acuerdo con el nivel. Para ello, **considera** que el área de los carteles está representada por el trinomio $x^2 + 10x + 25$, de manera que una vez deducidas las expresiones que representan el ancho y el largo de sus lados, los construyan para $x = 15 \text{ cm}$ y $x = 45 \text{ cm}$.
2. Con base en los datos obtenidos en la investigación, **construye** una tabla de frecuencias con datos agrupados y **calcula** las medidas de tendencia central de dichos datos.

Tema: Conozco las dimensiones de mi aula

Factorización

Situación cotidiana

Por lo general, cuando compramos una vivienda, un terreno o un local comercial, nos indican la superficie; pero, a través de la aplicación de la factorización, podemos conocer sus dimensiones si tenemos ciertas especificaciones.



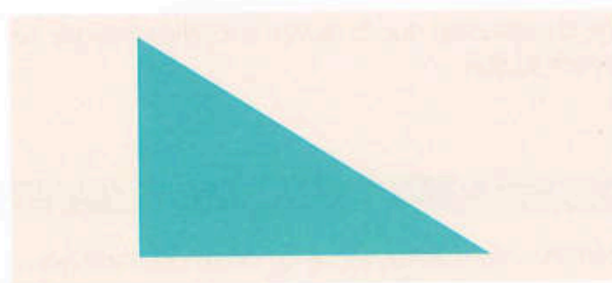
Luciana compra un local comercial que tiene 400 m de superficie. Cuando lo adquirió le comunicaron que tiene forma rectangular y que el ancho es 9 metros más corto que su largo. ¿Cómo puede conocer las dimensiones del local?

Reflexiona

- ¿Qué caso de factorización te puede ayudar a encontrar la medida de sus lados?
- **Comprueba** la respuesta.
- Si la superficie del terreno fuera 630 m² y las condiciones de los lados fueran las mismas, ¿cuáles serían las dimensiones del local?

Resuelve la situación

- Cristina compra un terreno en forma de un triángulo rectángulo y necesita conocer sus dimensiones. Ella solo posee la siguiente información: un lado es 3 metros más largo que el otro lado. El lado que está frente al ángulo recto mide 15 m. ¿Cuáles son las medidas del terreno? ¿Cuál será la superficie?



- **Completa** el esquema con los datos.

Tema: Medidas de tendencia central con datos agrupados

Situación cotidiana

Las medidas de tendencia central se utilizan para conocer el promedio de notas de estudiantes en una materia, el promedio de visitantes a un evento o el producto más representativo de ventas.

En el aula de noveno año, el profesor de Educación Física pide a los estudiantes que, con la utilización de una balanza, midan su masa corporal. Los datos obtenidos se organizan de la siguiente manera.

Masa (kg)	Marca (x_i)	f_i	F_i
[50; 55[	52,5	3	3
[55; 60[	57,5	8	11
[60; 65[	62,5	12	23
[65; 70[	67,5	7	30
[70; 75[	72,5	3	33
[75; 80[	77,5	2	35
Total		35	



¿Cuál es el valor más representativo de los valores obtenidos?

Reflexiona

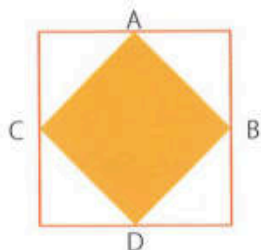
- ¿Qué medida de tendencia central te ayuda a obtener el valor más representativo?
- A simple vista, ¿cuál crees que sería el valor más representativo?
- **Comprueba** la respuesta.
- ¿Con qué conclusiones puedes aportar sobre los resultados obtenidos?

Resuelve la situación

- En un banco de la localidad, debido al reclamo de los clientes por la demora en la atención, se decide tomar nota del tiempo que se emplea en atender a un cliente. Los datos se muestran en la tabla.
- ¿Cuál de las medidas de tendencia central es la más adecuada para representar el tiempo que el banco demora en atender a los clientes? **Calcula.**

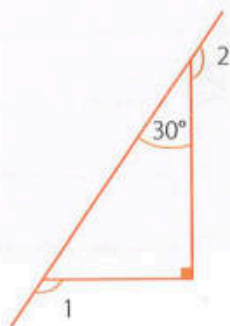
Tiempo (minutos)	Marca (x_i)	f_i	F_i
[1; 5[	3	6	6
[5; 10[	7,5	12	18
[10; 15[	12,5	15	33
[15; 20[	17,5	26	59
[20; 25[	22,5	8	67
[25; 30[	27,5	3	70
Total		70	

1. Si cada lado del cuadrado blanco mide 10 cm y A, B, C, D son puntos medios de cada lado, ¿cuál es el área del cuadrado azul?



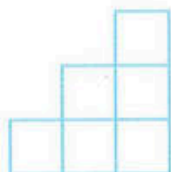
Argumenta la solución:

2. ¿Cuál es la suma de los ángulos marcados con 1 y 2 en la figura?



Argumenta la solución:

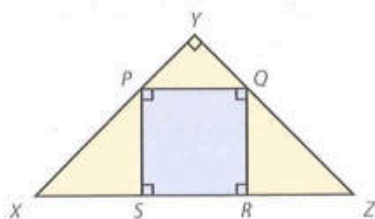
3. La figura que se muestra consta de 6 cuadrados, con lado de 3 cm. ¿Cuál es su perímetro?



Argumenta la solución:

4. Juan Carlos desea comprar un terreno de forma rectangular. Una inmobiliaria le ofrece un lote cuyo largo es tres veces más que el ancho y de perímetro tiene 240 m. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? Si el costo del metro cuadrado es de \$ 120, ¿cuánto tendrá que pagar Juan Carlos por el terreno?

5. El diagrama muestra un triángulo rectángulo isósceles XYZ con un cuadrado PQRS en su interior. Si el área del triángulo XYZ es 1, ¿cuál es el área del cuadrado PQRS?



Argumenta la solución:

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

Lucía quiere medir una pancarta de 12 m. Para esto, tiene tres sogas que miden: $2\frac{3}{4}$ m, $5\frac{5}{8}$ m y $3\frac{1}{12}$. ¿Le alcanzan las tres sogas para medir?

Escoge la respuesta correcta.

- a) Sí, y le sobra $\frac{10}{24}$ c) Sí, es el largo exacto
b) No, le falta $\frac{13}{24}$ d) Utiliza un pedazo extra de $\frac{1}{12}$

2. Lee y analiza.

¿Cuál es el valor de la incógnita?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 10 c) 12
b) 11 d) 13

3. Lee y analiza.

¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo, cuyos lados miden x ; $x + 2$; $2x + 1$?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $4x + 3$ c) $2x^3 + 3x^2 + 2x$
b) $2x^2 + 2x + 3$ d) $x^2 + 2x + 3$

4. Lee y analiza.

Si $4x + 12 = 84$, determina a qué es igual $\sqrt{3x + 10}$

Escoge la respuesta correcta.

- a) 5 c) 7
b) 6 d) 8

5. Lee y analiza.

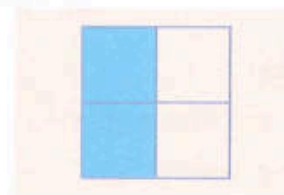
La suma de dos números enteros impares consecutivos es 64. **Determina** el impar mayor.

Escoge la respuesta correcta.

- a) 31 c) 34
b) 33 d) 38

6. Lee y analiza.

El perímetro del cuadrado mide 60 cm. ¿Cuánto mide el área sombreada?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 30 cm^2 c) 225 cm^2
b) $112,5 \text{ cm}^2$ d) 60 cm^2

7. Lee y analiza.

Determina los siguientes dos números en la siguiente secuencia:

1, 3, 3, 7, 5, 11, 7, 15,

Escoge la respuesta correcta.

- a) 15 y 17 c) 21 y 23
b) 9 y 19 d) 9 y 21

8. Lee y analiza.

El largo de un rectángulo se incrementa 15 % y el ancho, en 20 %. **Determina** el porcentaje en que aumenta el área.

Escoge la respuesta correcta.

- a) 10 % c) 20 %
b) 15 % d) 38 %

9. Lee y analiza.

Una copiadora puede sacar copias de 3 libros iguales en 4 horas. ¿Qué tiempo le llevará a la misma copiadora realizar 5 libros de la misma extensión?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 7h. 30 min c) 6h. 20 min
b) 7h. 45 min d) 6h. 40 min

10. Lee y analiza.

El precio de una motocicleta es de \$ 3 060, una vez que se ha efectuado un descuento de 15 %. ¿Cuál es el precio original de la moto?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 2 601 c) 3 600
b) 3 519 d) 3 825

11. Lee y analiza.

Si $a + 3 = m$, entonces $a + 6 =$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $m + 3$ c) $m + 6$
b) 2^m d) $2m + 3$

12. Lee y analiza.

Julio y su amigo acuden al médico de la siguiente manera: Julio cada 18 días y su amigo cada 15 días. Si el día de hoy coincidieron, ¿cuántos días deben transcurrir para que vuelvan a coincidir?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 15 c) 30
b) 18 d) 90

13. Lee y analiza.

Determina el valor de x en la siguiente expresión:

$$\frac{2x+3}{2} = \frac{x+5}{3}$$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $x = 4$ c) $x = \frac{1}{4}$
b) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 1$

14. Lee y analiza.

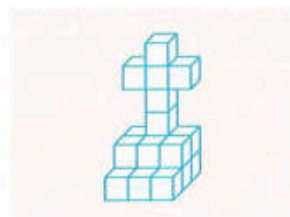
En una oficina de 40 empleados, 14 tienen tableta y 30, celular. ¿Cuántos empleados tienen ambos aparatos, si se sabe que todos tienen, al menos, uno de los dos?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 4 empleados c) 7 empleados
b) 6 empleados d) 11 empleados

15. Lee y analiza.

Si cada cubo tiene 2 cm de arista, ¿cuál es el volumen de la figura?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 21 cm^3 c) 126 cm^3
b) 84 cm^3 d) 168 cm^3

16. Lee y analiza.

Tres amigos fueron a la dulcería. Miguel gastó 2,9 dólares y compró 1 caramelo y 2 paletas. Humberto gastó 4,3 dólares y compró 1 caramelo y 2 chocolates. ¿Cuánto gastó David si compró 1 caramelo, 1 paleta y 1 chocolate?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 3,1 dólares c) 36 dólares
b) 33 dólares d) 38 dólares

17. Lee y analiza.

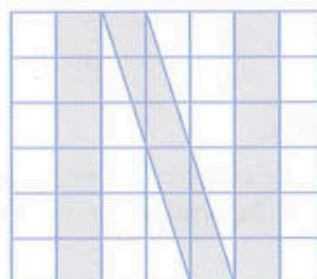
¿Cuál de las siguientes expresiones es impar para cualquier entero n ?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $2003n$ c) n^3
b) $n^2 + 2003$ d) $2n^2 + 2003$

18. Lee y analiza.

Si la longitud del lado de cada cuadrado es 1 cm, ¿cuál es el área de la letra N?

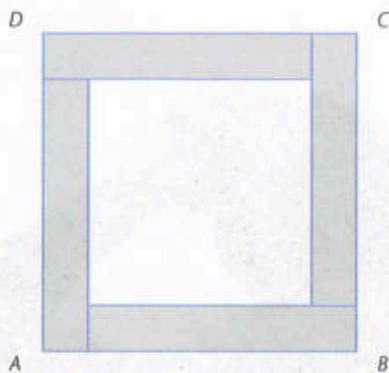


Escoge la respuesta correcta.

- a) 14
- b) 15
- c) 16
- d) 18

19. Lee y analiza.

El cuadrado de la figura ABCD está formado por 4 rectángulos grises y un cuadrado blanco. Si el perímetro de cada uno de los rectángulos mide 40 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado ABCD?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 14
- b) 15
- c) 16
- d) 18

20. Lee y analiza.

Isabel compró peras, manzanas y piñas (al menos una de cada una). Una pera cuesta una moneda, una manzana cuesta dos y una piña cuesta cuatro (todas las monedas tienen el mismo valor). Si compró 10 frutas y pagó con 16 monedas, ¿cuántas piñas compró?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |

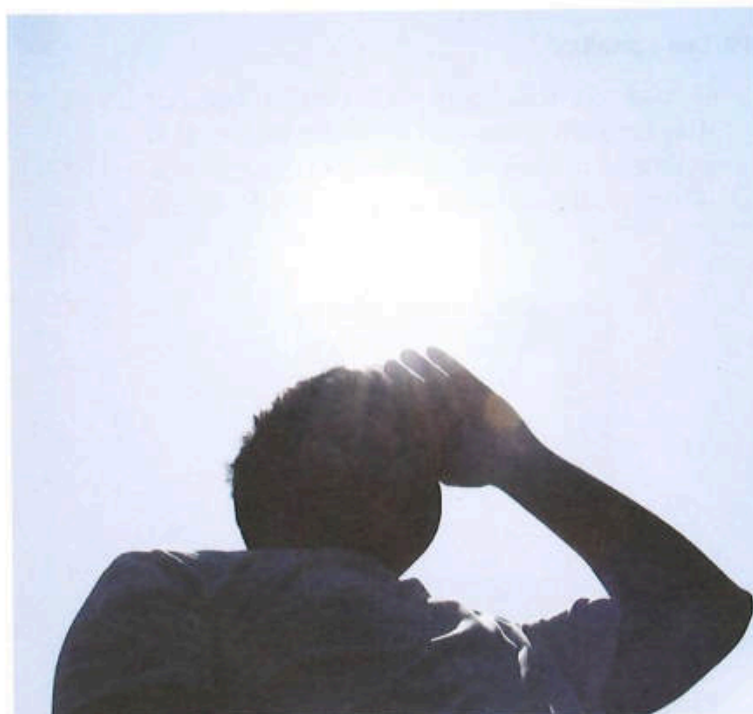


Radiación solar: ¿cuál es su impacto sobre el planeta y el ser humano?

"La radiación solar es la energía emitida por el Sol, la cual se propaga en todas direcciones a través del espacio mediante ondas electromagnéticas. Esta energía, emitida por la superficie solar, determina la dinámica de los procesos atmosféricos y climatológicos. Además, es directa o indirectamente responsable de circunstancias de nuestro día a día, como la fotosíntesis de las plantas, el mantenimiento de una temperatura compatible con la vida y de la formación del viento.

La radiación solar es imprescindible para la vida en la Tierra, pero también tiene efectos negativos para el ser humano, como los daños que provoca en la piel.

La radiación solar se mide en superficie horizontal mediante un sensor de radiación o piranómetro, que se sitúa orientado al sur y en un lugar libre de sombras. Los datos se recogen en unidades de potencia, vatios por metro cuadrado (W/m^2).



Shutterstock, 768916185

El ser humano está expuesto a la radiación UV, que sin protección puede ser peligrosa para su piel.

El ser humano está expuesto a la radiación UV, especialmente a la UVA y la UVB, que puede ser peligrosa para su piel. Una de las formas que tiene para medir las consecuencias negativas que tiene este tipo de radiación sobre las personas es el índice UV solar mundial (IUV). Este índice se mueve entre los valores del uno al once y cuanto más alto sea mayor será la probabilidad de sufrir lesiones cutáneas y oculares.

Entre otras consecuencias, aumenta las posibilidades de sufrir quemaduras solares, envejecimiento prematuro e, incluso, cáncer en la piel, sobre todo en aquellas personas con un fototipo más claro. Por esta razón, el IUV es un elemento importante y diferencial a la hora de concienciar a la población sobre los riesgos de una exposición excesiva, al advertir sobre la inminente necesidad de adoptar medidas de protección que reduzcan al mínimo los riesgos. Entre ellas, destacan: reducir la exposición al sol en las horas centrales del día y, en caso de no poderlo evitar, buscar las sombras y beber mucha agua. Usar prendas de protección, como sombreros, gorras o sombrillas, para resguardar ojos, cara y cuello, y prendas ligeras. Usar gafas de sol de calidad, es decir, correctamente homologadas, y, si es posible, con un diseño envolvente o con paneles laterales. Usar crema de protección solar con un factor superior a 15".

Fuente: <http://www.ideam.gov.co/web/tiempo-y-clima/radiacion-solar-ultravioleta>



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Cuál es el tema central de la lectura?
2. ¿Cómo se propaga la radiación solar?
3. **Menciona** dos efectos de la radiación solar sobre nuestro planeta e **indica** cuál consideras que es más importante. **Justifica**.
4. ¿Por qué la radiación solar puede ser nociva para los seres humanos?
5. **Indica** al menos tres medidas de prevención que se deben tomar para evitar daños en la piel causados por la radiación solar.



Shutterstock, 332701286



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** acerca de la radiación solar y los rayos UV, así como los factores de protección de los bloqueadores solares. **Haz** un informe con cuadros explicativos.
2. **Ingresa** a Internet y **busca** imágenes sobre el tema. **Realiza** un collage con estas imágenes.
3. **Elabora** una infografía sobre cómo debemos protegernos de la radiación solar. **Expón** tu trabajo en clase.



Shutterstock, 1116751745

Trabajo colaborativo

4. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior. **Presenten** su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:
 - Debe haber un organizador gráfico.
 - Hay que incluir imágenes.
 - Los textos deben ser sintéticos y precisos.
 - Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 645682786

1. **Divide** y luego **selecciona** el grupo de cocientes obtenidos.

$\div$	$3ab$	$9a^2b$	a^3b^4	$3a^2b^2$
$27a^3b^4$				

- a) $9a^2b^3$; $3ab^3$; $27a$; $9ab^2$
- b) $9a^2b^3$; $3ab^3$; 27 ; $9ab^2$
- c) $27a^3b^4$; $3ab^3$; $9a^3b^3$; $9ab^2$
- d) $9a^3b^2$; $3ab^2$; 27 ; $3ab^2$
2. **Realiza** la división de $\frac{1}{3}x^{n+2} - \frac{1}{6}x^{n+1} + \frac{2}{9}x^n$ por $\frac{1}{3}x^n$. Luego **selecciona** el polinomio resultado.

- a) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$
- b) $\frac{1}{3}x^{2n+2} - \frac{1}{18}x^{2n+1} + \frac{2}{27}x^{2n}$
- c) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{2}{9}$
- d) $x^{2n-2} - \frac{1}{2}x^{2n-1} + \frac{2}{3}x^{2n}$
3. Al dividir el polinomio, se obtiene como cociente y residuo:

$$(2x^3 - 7x^2 + 11x - 8) : (x - 2)$$

- a) $2x^2 - 3x - 5$ $R = 0$
- b) $2x^2 + 3x - 5$ $R = 2$
- c) $2x^2 - 3x + 5$ $R = 0$
- d) $2x^2 - 3x + 5$ $R = 2$

4. **Relaciona** cada división con su cociente. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

1. $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ A) $x - y$
2. $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ B) $x^2 - xy + y^2$
3. $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$ C) $x^2 + xy + y^2$
4. $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ D) $x + y$

- a) 1C; 2A; 3D; 4B
- b) 1B; 2A; 3D; 4C
- c) 1C; 2D; 3A; 4B
- d) 1B; 2D; 3A; 4C

5. Al factorizar la expresión $8a^3 - 4ab - 20a^2b + 10b^2$, se obtiene:

- a) $(4a^2 - 2b)(2a - 5b)$
- b) $(2a - 5b)(4a^2 + 2b)$
- c) $(a + 5b)(4a + 2b)$
- d) $(4a^2 + 2b)(2a - 5b)$

6. **Relaciona** cada trinomio con su factorización. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

1. $2a^2 + ab - 21b^2$ A) $(2a + 7b)^2$
2. $4a^2 + 28ab + 49b^2$ B) $(a + 8b)(a - 3b)$
3. $a^2 + 5ab - 24b^2$ C) $(2a + 7b)(2a - 3b)$
4. $4a^2 + 8ab - 21b^2$ D) $(2a + 7b)(a - 3b)$

- a) 1A; 2A; 3B; 4C
- b) 1D; 2A; 3C; 4B
- c) 1D; 2A; 3B; 4C
- d) 1D; 3B; 2A; 4C

7. Sobre el trinomio $m^4 - 2m^2n^2 + 49n^4$ **selecciona** las afirmaciones verdaderas.

Se debe factorizar como:

- a) Un trinomio cuadrado perfecto
- b) No es factorizable
- c) Un trinomio cuadrado incompleto
- d) Un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Al factorizarlo se obtiene:

- a) $(m^2 + 7n^2 + 4mn)(m^2 + 7n^2 - 4mn)$
- b) $(m^2 + 7n + 4mn)(m^2 + 7n - 4mn)$
- c) $(m + 7n + 4mn)(m + 7n - 4mn)$
- d) $(m^2 + 7n^2 - 4mn)(m^2 + 7n^2 - 4mn)$

8. **Comprueba** la veracidad de cada igualdad. Luego **selecciona** la respuesta correcta.

- 1. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- 2. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)$
- 3. $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

4. $x^6 - y^6 = (x + y)(x - y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

5. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

- a) 1F; 2F; 3F; 4V; 5V
- b) 1V; 2F; 3F; 4V; 5F
- c) 1F; 2F; 3V; 4F; 5V
- d) 1V; 2F; 3F; 4V; 5V

Coevaluación

9. **Seleccionen** las medidas de tendencia central que se obtienen de los datos agrupados.

Edad de los empleados de una fábrica				
Edad	x	f_i	F_i	$x \cdot f_i$
[54 - 60]	57	8	8	456
[60 - 66]	63	10	18	630
[66 - 72]	69	5	23	345
[72 - 78]	75	7	30	525

- a) 15; 64; 2; 10
- b) 60,72; 65; 87; 64,2
- c) 65,87; 64,2; 60; 71
- d) 65; 87; 18; 10

10. **Expreso mis emociones. Reflexiona** sobre la solidaridad. **Indica** alguna actividad en la que hayas sido solidario con un compañero de clase.

Autoevaluación

11. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

Estoy en proceso

Contenidos	Divido entre monomios y polinomios.	
	Divido por división sintética.	
	Extraigo el factor común de expresiones algebraicas.	
	Factorizo binomios.	
	Obtengo medidas de tendencia central en datos agrupados.	

Metacognición

- ¿Aclaré todas mis dudas con el docente?
- ¿Observé situaciones de mi entorno donde se aplican los nuevos conocimientos adquiridos?
- ¿Mi participación activa en los grupos de trabajo contribuyó en mi aprendizaje?

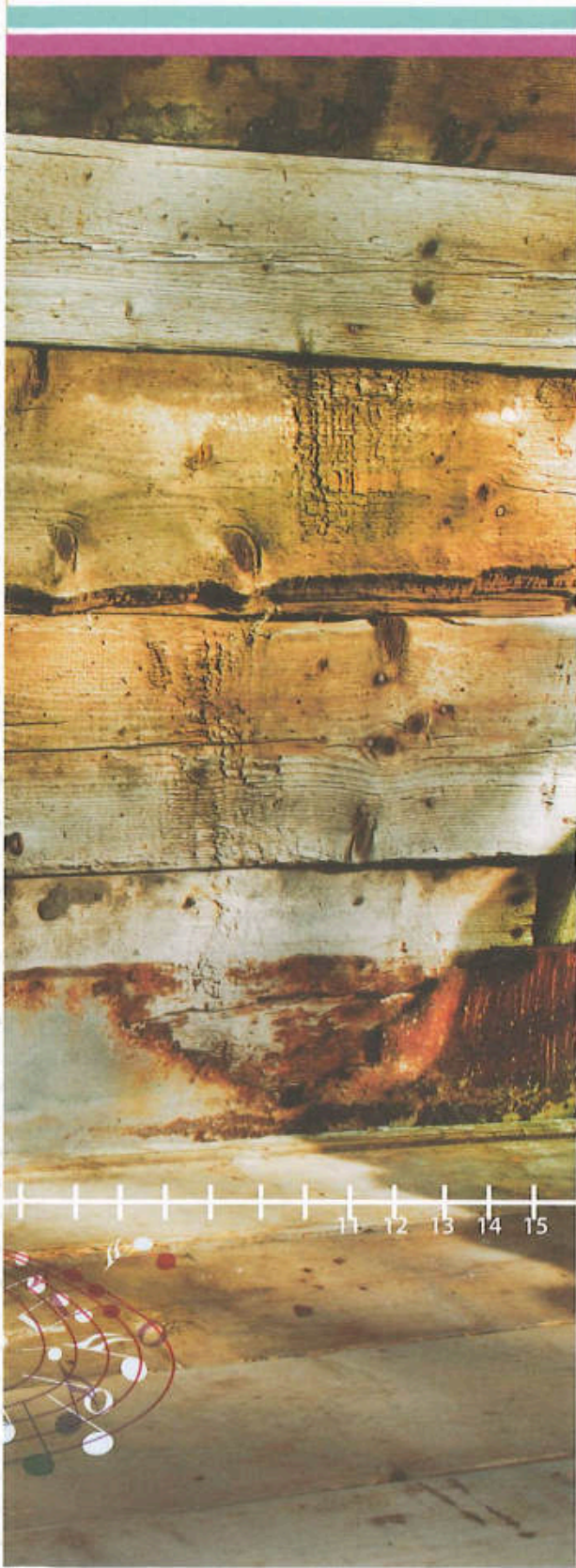
unidad 5

Ecuaciones de primer grado. Medidas de dispersión

Tanto egipcios como chinos y mesopotámicos estudiaron el sonido bajo los principios matemáticos. Los pitagóricos de la antigua Grecia, bajo el principio de que toda la naturaleza consiste en armonía que brota de los números, analizaron las escalas musicales en términos de la proporcionalidad.

Leibniz, el gran matemático alemán, consideró que la música posee una irrefutable estructura matemática. El tiempo le dio la razón, pues en la actualidad la música no solo usa la matemática para medir y contar, sino que además, las nuevas formas de componer la han llevado a apoyarse en conceptos matemáticos más complejos, como la teoría de conjuntos, el álgebra abstracta y la teoría de números. Incluso algunos compositores han utilizado la proporción áurea y los números de Fibonacci.





Preguntas generadoras

- **Investiga.** ¿Cuál es el valor exacto de los dos tercios del número áureo?
- Junto a tu docente **investiga** en qué consiste la serie de Fibonacci.

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$ y $ax = b$
- Ecuaciones de primer grado de la forma $ax + c = b$ (en más de un término y con signos de agrupación)
- Planteamiento y resolución de problemas con ecuaciones de primer grado
- Ecuaciones lineales con coeficiente fraccionario
- Fracciones algebraicas, operaciones, fracciones algebraicas complejas
- Desigualdades e intervalos. Inecuaciones lineales con una incógnita

Geometría y medida

- Medidas de dispersión para datos agrupados

Objetivos

O.M.4.7. / O.M.4.2. / O.M.4.3.



Shutterstock, 250576867



Desequilibrio cognitivo

¿Cuál es el valor de x en cada igualdad para que se cumplan?

$$3 + x = 7$$

$$6x = 12$$

$$4 - x = 10$$

$$2x = -10$$

Recordemos que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en la que figura uno o varios valores desconocidos, llamados incógnitas, además de ciertos datos conocidos.

En este tema estudiaremos las ecuaciones lineales o de primer grado.

Si x es la longitud de una cuerda de guitarra medida desde la cejilla superior hasta el puente, y una octava se encuentra a 32 cm desde la cejilla superior, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

Lo primero que hacemos es plantear una ecuación, tomando en cuenta el concepto musical de octava.

$$\frac{x}{2} = 32 \text{ cm}$$

La longitud de la cuerda dividida por 2 corresponde a los 32 cm.

Para resolver la ecuación aplicamos las reglas de resolución de ecuaciones.



Competencia comunicacional

En la mitad de una cuerda, el sonido producido en su inicio es el mismo, pero en diferente frecuencia. En música, a este intervalo se lo denomina octava.



Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad que contiene una incógnita representada por una variable, en este caso x .

$$\underbrace{x + 6}_{\text{Primer miembro}} - \underbrace{5}_{\text{Segundo miembro}} = \underbrace{8 + 3}_{\text{Segundo miembro}}$$



Competencia socioemocional

En economía y finanzas, los números negativos expresan pérdidas o saldos en contra. Mantener el control de los gastos ayuda a tener una economía sana.

Expresa tu opinión en la clase.

Una ecuación tiene dos miembros, el primero antes del signo igual y el segundo después de este. Para resolverla usamos el principio de transposición de términos.

1. Un término que está sumando en el primer miembro de una ecuación pasa al segundo miembro a restar.
2. Un término que está restando en el primer miembro de una ecuación pasa al segundo miembro a sumar.
3. Un término que está multiplicando en el primer miembro de una ecuación pasa al segundo miembro a dividir.
4. Un término que está dividiendo en el primer miembro de una ecuación pasa al segundo miembro a multiplicar.

En nuestra ecuación, que tiene la forma $\frac{x}{a} = b$, pasamos el término que está dividiendo a multiplicar. Así:

$$\frac{x}{2} = 32 \quad x = 2 \times 32 \quad x = 64$$

Por lo tanto, la longitud de la cuerda es 64 cm.

Ejemplo 1

Resolver las ecuaciones

a) $x + 8 = -9$

b) $4x = -20$

c) $3x - 6 = 21$

Solución

- a) Esta ecuación es de la forma $x + a = b$. Pasamos al segundo miembro, el 8, con operación contraria es decir con -8 .

$$x + 8 = -9$$

$$x = -9 - 8$$

$$x = -17$$

- b) Esta ecuación tiene la forma $ax = b$. En este caso, el término a está multiplicando a la incógnita. Por lo tanto, debe pasar al segundo miembro a dividir.

$$4x = -20; \quad x = -\frac{20}{4}; \quad x = -5$$

- c) Esta ecuación tiene la forma $ax + b = c$. En este caso, primero pasamos el término que no tiene la incógnita al segundo miembro, para luego pasar el término que multiplica a la incógnita. Así:

$$3x - 6 = 21; \quad 3x = 21 + 6; \quad 3x = 27; \quad x = \frac{27}{3}; \quad x = 9$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $(x-3)(x+2) - 6x = (x-1)^2 - 17$

Solución

$$x^2 - x - 6 - 6x = x^2 - 2x + 1 - 17$$

Desarrollamos los productos notables.

$$x^2 - x - 6x - x^2 + 2x = 1 - 17 + 6$$

Trasponemos los términos que contienen a la incógnita.

$$-5x = -10$$

Reducimos términos semejantes.

$$-x = -\frac{10}{5}$$

Pasamos 5 a dividir.

$$x = 2$$

Multiplicamos los dos miembros por -1 .

Cuando la ecuación tiene términos fraccionarios, se busca el m.c.m. de los denominadores; lo dividimos para cada denominador y multiplicamos por el numerador. Al pasar el m.c.m. del primer miembro al segundo miembro, este se simplifica. De este modo, la ecuación deja de tener denominadores y se resuelve siguiendo las reglas anteriores.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} = \frac{2}{5} - 4x$.

Solución

$$\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} = \frac{2}{5} - 4x$$

Determinamos el m.c.m.; en este caso es 30.

$$\frac{15x - 40}{30} = \frac{12 - 120x}{30}$$

Dividimos el m.c.m. para cada denominador y multiplicamos por los numeradores.

$$15x - 40 = \frac{12 - 120x}{30} \times 30$$

Pasamos el m.c.m. del primer miembro al segundo.

$$15x - 40 = 12 - 120x$$

Simplificamos.

$$15x + 120x = 12 + 40$$

Trasponemos los términos que contienen la incógnita al primer miembro y los números al segundo.

$$x = \frac{52}{135}$$



Competencia digital

Ingresa al enlace:

lynk.ec/9m18

y practica sobre ecuaciones lineales.



Recuerda que...

Para verificar si la solución de la ecuación es correcta se reemplaza el valor obtenido de la incógnita en la ecuación y se verifica la veracidad de la igualdad.

$$6x - 13 = 23$$

$$6x = 23 + 13$$

$$6x = 36$$

$$x = \frac{36}{6}$$

$$x = 6$$

Comprobación

$$6(6) - 13 = 23$$

$$36 - 13 = 23$$

$$23 = 23$$

I.M.4.2.4.

1. Encuentra el valor de x .

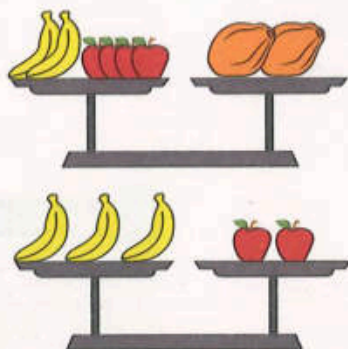
a)



b)



2. Observa las imágenes y luego responde.



¿Cuántos plátanos equilibran a una papaya?

3. Escriba verdadero (V) o falso (F).

- a) Si $4t - 8 = 0$ entonces $t = 5$
- b) Si $3x + 9 = 21$ entonces $x = 4$
- c) Si $6x - 5 = 43$ entonces $x = 8$
- d) Si $16 - 3a = -5$ entonces $a = 7$
- e) Si $-5 = 7 - 4s$ entonces $s = 2$

4. Problema-decisión. Decide y selecciona las afirmaciones correctas.

- a) Una ecuación es una igualdad.
- b) Una ecuación tiene tres miembros.
- c) Un término que está sumando en un miembro de una ecuación pasa al otro a dividir.
- d) En la ecuación $3y = 4$, al trasponer 3 al otro miembro, obtenemos $y = 4 \times 3$.

5. El valor de x que satisface a la ecuación es: $-6x = 2$

6. Resuelve las ecuaciones.

- a) $x + 10 = 29$
- b) $6x = 48$
- c) $10x - 2 = 28$
- d) $\frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{3}{10}y$
- e) $16 - 3(x + 2) = 4(x - 1)$
- f) $-6(x + 1) = -2(x - 1) + 4$
- g) $2(-3x + 2) - 16 = 2(x - 1) - 2$
- h) $3(-x + 2) = -5(x - 1) + 1$
- i) $2x - 5(-3x + 2) = 5x - 9x + 11$
- j) $-(-3x + 2) = 5[2(x - 1)] - 13$
- k) $2x - 3 - 2(3x + 12) + 43 = 0$
- l) $2x - 5x + 11 - 13 = 5x + 3x + 20$
- m) $-[(-3x + 2) - 6] = -x$
- n) $2[-x + 10] = 5(x - 1) - 10$

7. Resuelve las ecuaciones y luego comprueba.

- a) $x - 8 = 36$
- b) $16 + 13x = 20 - x$
- c) $x + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$

d) $9x = 27$

e) $14x = -56$

f) $-62x = 31$

g) $\frac{x}{4} = 3$

h) $\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)$

i) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{5}{6} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\left(x + \frac{5}{8}\right)$

j) $-\frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}x + \frac{5}{2} - \frac{6}{5}\right) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{2}x$

k) $\frac{2}{5}\left(\frac{9}{4}x - \frac{1}{3}\right) - \frac{x}{5} = \frac{5}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right)$

l) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{x}{6}\right) = \frac{9}{10} - \frac{1}{5}(x - 2)$

m) $\frac{3}{8}\left[\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}x\right)\right] = \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

n) $\left(\frac{11}{2}x - \frac{5}{4}\right)\frac{4}{5} = \frac{3}{10}x + \frac{1}{20}$

o) $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5}$

p) $\frac{5}{18}\left(\frac{9}{10}x - \frac{3}{5}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{9}\right) + \frac{1}{3}$

q) $\frac{3}{4} + \frac{8}{9}\left(\frac{3}{4}x - \frac{6}{5}\right) = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{5}$

8. Desarrolla los productos y luego **resuelve**.

a) $(2x - 1)(x + 3) - 1 = 2x^2 + 1$

b) $3(x + 4)^2 - 3(x - 6) = 36$

9. **Resuelve** las ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{14}$

b) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{3}x - 1 = \frac{x}{6} + \frac{7}{15}$

c) $\frac{3}{8}x + \frac{5}{4} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}x$

10. **Resuelve** las ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

a) $\frac{2}{3}(1 - x) + 2x = \frac{3}{5}(x + 2)$

b) $\frac{x}{3} - \left[x - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right] = 3\left(\frac{x}{2} + 5\right)$

c) $7x - \left[2x - \left(\frac{3x}{5} + 1\right)\right] = 5x - \left(\frac{x}{6} - 2\right)$

d) $\frac{x - 2}{3} = \frac{x + 1}{2}$

e) $\frac{2x - 1}{4} - 2 = \frac{x - 3}{5}$

f) $3x - \frac{5 - x}{2} = \frac{-2x - 8}{3} + 6$

Trabajo colaborativo

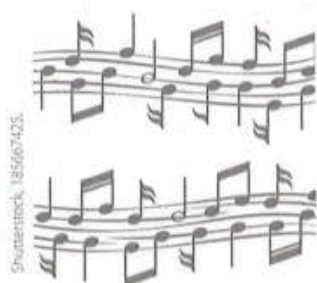
11. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Formulen una ecuación de la forma $x + a = b$ y $ax = b$. Luego, **intercambien** con otra pareja para su resolución.

Actividad indagatoria

12. **Investiga** sobre la propiedad de uniformidad que se cumple en las ecuaciones, **aplicala** en la resolución de una ecuación y **expón** y expón en la clase.

Puedes revisar el siguiente enlace: lynk.ec/9m19



Figuras musicales en el pentagrama



Interdisciplinariedad

Matemática y Música

Las figuras musicales indican la duración del sonido. Colocadas en el pentagrama, indican la altura.

Las figuras musicales son redonda ,

blanca , negra ,

corchea ,

semicorchea ,

fusa  y semifusa .

El tiempo musical de estas figuras se mide en pulsos.



Interculturalidad

La etnomatemática es el área de la educación que busca reflexionar sobre el conocimiento matemático que se genera a partir de la interacción en un grupo cultural en particular.



Saberes previos

Resuelve las ecuaciones:

$$-7 + 2x = 11$$

$$14x - 6 = 8x + 18$$

$$\frac{1}{4}x - 5 = \frac{7}{2} + \frac{3}{8}x$$

Una ecuación de primer grado es polinómica y su grado es 1; por lo tanto, existirá a lo sumo una solución o raíz o puede no tener solución.

En este tema vamos a resolver problemas de ecuaciones de primer grado relacionados con nuestra vida cotidiana.

El tiempo musical de una fusa más el tiempo de una semicorchea es $\frac{3}{8}$. Si el tiempo de la semicorchea es el doble del de la fusa, ¿cuáles son los tiempos de las dos figuras musicales?

Este problema se puede resolver por medio de una ecuación. Para poder plantearla, es necesario traducir el lenguaje común a lenguaje algebraico, observando la asignación adecuada de la incógnita.

De la condición de que el tiempo de la semicorchea es el doble del de la fusa, concluimos que:

Tiempo musical de la fusa x .

Tiempo musical de la semicorchea $2x$.

Ahora, tomemos la condición de la suma de los tiempos musicales, la cual nos permite plantear la ecuación.

$$x + 2x = \frac{3}{8}$$

Una vez planteada la ecuación resolvemos.

$$3x = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{8 \cdot 3}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

Es conveniente comprobar el valor obtenido de la incógnita.

$$x + 2x = \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{8} + 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}; \quad \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Como el valor satisface a la ecuación, interpretamos la solución.

x representa el tiempo de la fusa.

Entonces, el tiempo de la fusa es $\frac{1}{8}$.

El tiempo de la semicorchea se obtiene al reemplazar el valor de x en $2x$.

$$2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el tiempo musical de la semicorchea es $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 1

Traducir las expresiones a lenguaje algebraico.

- a) Tres números consecutivos c) Números impares
- b) Números pares d) La mitad de un número

Solución

- a) Asignamos a x como el primer número. $x; x + 1; x + 2$.
- b) Cualquier número que tenga x al multiplicar por 2. $2x$
- c) La expresión $2x$ permite tener un número par. Al sumarle la unidad, la nueva expresión permitirá obtener un número impar. Por lo tanto, la expresión que representa a un número impar es: $2x + 1$.
- d) Si asignamos con x al número, obtenemos la mitad al dividir por 2. Entonces, la expresión es $\frac{x}{2}$.

Ejemplo 2

Las dos terceras partes de la edad de un padre exceden en 12 años a la edad de su hijo. Hace 3 años la edad del padre era el doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

Solución

Edades	Hace 3 años	Actualidad
Hijo	x	$x + 3$
Padre	$2x$	$2x + 3$

Planteamiento de la ecuación

Expresamos las dos terceras partes de la edad actual del padre y le restamos 12 años, de manera que se equilibre con la edad actual del hijo.

$$\frac{2}{3}(2x + 3) - 12 = x + 3$$

Resolución de la ecuación

$$\frac{2}{3}(2x + 3) - 12 = x + 3; \frac{4}{3}x + \frac{6}{3} - 12 = x + 3; 4x + 6 - 36 = 3x + 9$$

$$4x - 3x = 36 + 12 - 9; x = 39$$

Comprobación

$$\frac{2}{3}(2 \cdot 39 + 3) - 12 = 39 + 3; \frac{162}{3} - 12 = 42; 54 - 12 = 42; 42 = 42$$

Interpretación

Edad del hijo: $39 + 3 = 42$ años

Edad del padre: $2(39) + 3 = 81$ años



Recuerda que...

Para resolver un problema se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- Leer detenidamente el problema.
- Identificar los datos y representarlos usando lenguaje algebraico.
- Plantear la ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Comprobar la ecuación.
- Interpretar la solución.



Competencia digital

Refuerza tu conocimiento y practica sobre problemas con ecuaciones de primer grado, ingresando al siguiente enlace:

lynk.ec/9m20



I.M.4.2.4.

1. Traduce a lenguaje algebraico.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
El triple de un número	
Un número aumentado en cinco	
La cuarta parte de un número	
El cuadrado de un número	
El cuádruplo del cubo de un número	
El doble de la suma de un número con cuatro	
Tres números consecutivos pares	
Un múltiplo de seis	
Dos números múltiplos consecutivos de once	
El resultado de restar un número de veintitrés	
El cuadrado de la suma del triple de un número con el cuádruplo de otro	
El cuadrado de un número menos el cubo del mismo número	
La mitad de un número más el doble del mismo número	
Un número aumentado en dos más otro disminuido en tres	
La suma de los cuadrados de dos números consecutivos	
La quinta parte de una cantidad menos la tercera parte de otro	
Dos tercios de una cantidad menos cuatro quintos de otra cantidad	
El cuadrado de la diferencia de los cubos de dos números	

2. Completa en tu cuaderno la tabla.

Lenguaje algebraico	Lenguaje común
$\frac{x}{3}$	
$x - 1$	
$4x$	
$\frac{2}{5}x$	
$2x + 1, 2x + 3$	
$4 - x$	
$x; x + 1$	
$2x - x^2$	

3. Plantea ecuaciones para cada situación.

- El doble de un número sumado con 4 es 22.
- La suma de 4 números múltiplos consecutivos de 5 es 70.
- Al restar de 15 la mitad de un número, se obtiene 6.
- El exceso de un número sobre 100 es 46.
- La suma de un número con su anterior y posterior es 84.

4. Resuelve las siguientes situaciones.

- El doble de un número es 120. ¿Cuál es el número?
- Si al capital que tengo en el banco le aumento 350 dólares, tendría 1 050 dólares. ¿Cuál es mi capital?
- Pablo tiene el cuádruplo de la edad de su hija Paola. Si Pablo tiene 40 años, ¿cuántos años tiene Paola?
- La edad de Iván aumentada en dos es igual a la edad de su hermano Javier, que tiene 54 años. ¿Cuál es la edad de Iván?
- Si en un colegio aumentan 12 alumnos nuevos, habrá 738 alumnos en total. ¿Cuántos alumnos hay actualmente?

- f) Si un auto recorre 36 km más, completará un viaje de 444 km.
¿Cuántos kilómetros ha recorrido?
- g) Una empresa repartió las utilidades entre 120 trabajadores; a cada uno le tocó \$ 440. ¿Cuál fue la utilidad de la empresa?
- h) Si Miguel bajara 16 kg, tendría el peso de su hermana María, que es 55 kg. ¿Cuál es el peso de Miguel?
- i) Luis compró chocolates y en el camino de regreso a casa se comió 17. Si al llegar a casa tiene 35 chocolates, ¿cuántos chocolates compró?
- j) Si Pedro ahorra 150 dólares más cada mes podría reunir en un año para comprar un auto que cuesta 15 000 dólares. ¿Cuánto ahorra actualmente cada mes?

5. Desarrolla los siguientes problemas.

- a) Entre tres hermanos se reparten \$ 260. El menor recibe el doble que el mediano y este el cuádruplo del mayor. ¿Cuántos dólares recibe cada uno?
- b) **Determina** cuatro números múltiplos de 4 y consecutivos cuya suma es igual al doble del menor de los cuatro números.
- c) Si a la edad de Susana se le suma su tercera parte, se obtiene la edad de Alberto. ¿Cuál es la edad de Susana si Alberto tiene 36 años?
- d) Una madre tiene 26 años y su hijo 5. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea cuatro veces la edad del hijo?
- e) La edad de Roberto es tres veces la edad de su hermana Martha. En cuatro años, la suma de sus edades será igual a la mitad de la de su padre. Si el padre tiene en la actualidad 44 años, ¿cuál es la edad actual de Roberto y de Martha?
- f) De un tanque de reserva de gasolina se han consumido las $\frac{13}{16}$. Si se añaden 12 galones y $\frac{1}{4}$, el tanque se llena hasta las $\frac{4}{5}$ partes de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del tanque?
- g) En un rectángulo la base mide 12 cm más que la altura y el perímetro mide 48 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

- h) La diferencia de dos números es 30. Cuando al mayor de ellos le disminuimos en 14, obtenemos el triple del menor. ¿Cuáles son los números?
- i) Para pintar una casa, Marcelo trabajó el doble de horas que su compañero Javier. Si entre los dos trabajaron 42 horas, ¿cuántas horas trabajó cada uno?
- j) Si al cuádruplo de la edad de Cristóbal se aumenta 3 años, resulta la edad de su tío, que es 31 años. ¿Cuántos años tiene Cristóbal?

6. Plantea y resuelve los siguientes problemas.

- a) La base de un terreno en forma rectangular mide el cuádruplo de la altura. Si el perímetro del terreno es 100 metros, ¿cuánto mide la base y cuánto mide la altura?
- b) La edad de Érika es el triple de la edad de su hermana Helen y Helen tiene dos años más que su hermana menor Karla. Si la suma de las edades de las tres hermanas es 23 años, ¿cuántos años tiene cada hermana?
- c) Un número multiplicado por doce y sumado el mismo número multiplicado por 5, da 680. ¿Cuál es el número?
- d) La suma de tres números consecutivos es 192. ¿Cuáles son los números?
- e) Alfonso tiene 28 años menos que su madre y esta tiene 5 veces la edad de Alfonso. ¿Cuáles son las edades de Alfonso y su madre?

- 7. Problema-decisión. Analiza** la siguiente situación y **decide** cuáles son los números. La suma de cuatro números es 240. El segundo número es el triple del primero, el tercero es el cuádruplo del segundo y el cuarto es el doble del tercero.

Trabajo colaborativo

8. Trabajen en parejas y resuelvan.

Formulen un problema que se resuelva con el planteamiento de la ecuación $3x - 6 = 39$. **Resuévanlo y expónganlo.**

Actividad indagatoria

- 9. Investiga** los tiempos de las otras figuras musicales y **formula** un problema similar al presentado al inicio. **Expón** en clase.



Notas musicales.



Desequilibrio cognitivo

¿Es correcto decir que: $-\frac{5}{-4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$?

Las operaciones con fracciones algebraicas son similares a las fracciones numéricas. Si se multiplica o divide el numerador y el denominador por una misma cantidad, la expresión final no se altera. Sin embargo, toma en cuenta que la cantidad por la que se divide o multiplica debe ser distinta de cero.

En una evaluación de música, la docente a cargo ha solicitado que se determine el valor de x de la cifra de compás. ¿Qué tipo de expresión algebraica utilizó la docente? ¿Cuál es el valor de la incógnita que los estudiantes debieron asignar?

Como en el denominador la docente usó la letra x , la expresión es una expresión algebraica racional.

El valor de la incógnita es 8, porque el tiempo de la corchea es $\frac{1}{2}$ y el de la redonda es 4. Por lo tanto, el tiempo de la corchea está 8 veces en el tiempo de la redonda.

Competencia comunicacional

En el pentagrama, después de la clave se ubica la denominada cifra o fórmula de compás, que es una fracción sin línea. El denominador indica las veces que la figura musical tomada de referencia está contenida dentro de la redonda, en tanto que el numerador indica el número de veces que ese tiempo tomado está dentro de un compás.



Recuerda que...

Toda fracción algebraica tiene tres signos: uno en el numerador, otro en el denominador y el tercero que es propio de la fracción, ubicado en la línea de fracción.

$$-\frac{-y}{+x^2z} + \frac{-a^3}{-b^2c^5}$$

Las fracciones algebraicas son expresiones que se pueden representar como el cociente de dos polinomios, es decir, como la división entre dos expresiones algebraicas que contienen variables y constantes.

Una fracción algebraica puede ser simplificada. En el caso de que las expresiones algebraicas que la conforman no sean monomios, previamente serán factorizadas.

Ejemplo 1

Realizar cambios en los signos de la fracción $-\frac{ab^4}{c}$ sin alterarla.

Solución

$$-\frac{ab^4}{c} = \frac{-ab^4}{-c}; \text{ aplicar la ley de los signos } (-)(-)(-), \text{ da menos } (-).$$

Ejemplo 2

Simplificar las fracciones algebraicas:

$$\text{a) } -\frac{2y^2z^5}{8wy^3z^4} \quad \text{b) } \frac{x^2+xb}{x^2-b^2}$$

Solución

a) Aplicamos la propiedad de la potenciación de bases iguales.

$$-\frac{2y^2z^5}{8wy^3z^4} = -\frac{2y^{2-3}z^{5-4}}{8w} = -\frac{y^{-1}z}{4w} = \frac{z}{4wy}$$

b) Factorizamos la expresión del numerador y la del denominador y simplificamos.

$$\frac{x^2+xb}{x^2-b^2} = \frac{x(x+b)}{(x+b)(x-b)} = \frac{x}{x-b}$$



Me refuerzo

Ingresa al siguiente enlace: lynk.ec/9m21

Realiza ejercicios interactivos y evalúa tu aprendizaje de factorización.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas, debemos determinar el m.c.m. de las expresiones algebraicas que se encuentran en el denominador. Luego, dividimos el m.c.m. para cada denominador y a ese resultado lo multiplicamos por cada numerador. Reducimos términos semejantes y simplificamos si es posible.

Ejemplo 3

Realizar la operación $\frac{3}{y-2} + \frac{2y+1}{y^2+4y+4} - \frac{6y}{y^2-4}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{3}{y-2} + \frac{2y+1}{y^2+4y+4} - \frac{6y}{y^2-4} &= \frac{3}{y-2} + \frac{2y+1}{(y+2)^2} - \frac{6y}{(y+2)(y-2)} \\&= \frac{3(y+2)^2 + (y-2)(2y+1) - 6y(y+2)}{(y+2)^2(y-2)} \\&= \frac{3(y^2+4y+4) + 2y^2+y-4y-2-6y^2-12y}{(y+2)^2(y-2)} \\&= \frac{3y^2+12y+12+2y^2+y-4y-2-6y^2-12y}{(y+2)^2(y-2)} \\&= \frac{-y^2-3y+10}{(y+2)^2(y-2)} = \frac{-(y+5)(y-2)}{(y+2)^2(y-2)} = -\frac{y+5}{(y+2)^2}\end{aligned}$$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Factorizamos las expresiones del numerador y del denominador de cada fracción y simplificamos los factores comunes en cruz.

Si se trata de una división, invertimos la fracción y convertimos a la división en multiplicación.

Ejemplo 4

Realizar la operación $\frac{x^2-2x-15}{x^2-25} \cdot \frac{3x^2-15x}{x^2+x-6} \div \frac{x}{x^2-4x+4}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-15}{x^2-25} \cdot \frac{3x^2-15x}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x} &\quad \text{Convertimos la división en multiplicación.} \\ \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x+5)} \cdot \frac{3x(x-5)}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x} &= \frac{3(x-5)(x-2)}{(x+5)} \quad \text{Factorizamos y simplificamos.}\end{aligned}$$



Recuerda que...

El m.c.m. de expresiones algebraicas se obtiene al multiplicar los factores comunes con el mayor exponente por los factores no comunes. Por lo tanto, es necesario que las expresiones hayan sido factorizadas previamente.

El m.c.m. entre $x^2-2x-15$ y $2x^3-20x^2+50x$, toda vez que:

$$\begin{aligned}x^2-2x-15 &= \\(x+3)(x-5)\end{aligned}$$

$$2x^3-20x^2+50x =$$

$$2x(x-5)^2, \text{ es}$$

$$2x(x-5)^2(x+3).$$



Competencia socioemocional

Si existen conflictos entre tus compañeros, aporta con soluciones positivas y concilia las diferencias que puedan existir, siempre considerando la perspectiva y los sentimientos de los demás.

Escribe ejemplos de acciones a realizar para solucionar conflictos entre tus compañeros. **Preséntalo** en clase.

I.M.4.2.1.

1. **Escribe** en tu cuaderno (V) si la igualdad es verdadera y (F) si es falsa.

a) $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y}$

b) $-\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

c) $\frac{ab}{cd} = \frac{a(-b)}{(-c)(-d)}$

d) $-\frac{m}{n-r} = \frac{m}{r-n}$

e) $\frac{x}{x-y} = \frac{x}{y-x}$

f) $\frac{x}{x-y} = \frac{-x}{y-x}$

g) $\frac{a}{a+b} = \frac{x}{b+a}$

h) $\frac{m-n}{m+n} = \frac{n-m}{n+m}$

i) $-\frac{x-y}{x+y} = \frac{y-x}{y+x}$

2. **Simplifica** los monomios.

a) $\frac{90x^2y^4z^2}{9xy^2z} =$

b) $\frac{14a^2b^3c^4}{42abc^3} =$

c) $\frac{8x^2y^5z^3}{64x^5y^7z} =$

d) $\frac{81x^{m+1}y^{n-1}}{27x^{m-1}y^{n+1}} =$

e) $\frac{21a^2b^3}{28a^4b} =$

f) $\frac{35m^2n^3p}{15mnp} =$

g) $\frac{16x^3y^3z^{-2}}{20x^{-2}y^2z} =$

h) $\frac{12a^{-2}b^{-3}c^4}{18a^{-2}b^4c^{-1}} =$

i) $\frac{27m^{-7}n^{x-3}p^{x+2}}{45m^x n^2 p} =$

j) $\frac{(2x-5)^{n-3}}{(2x-5)^{n+2}} =$

3. **Factoriza** y luego **simplifica**.

a) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9} =$

b) $\frac{x^2-25}{x^2+2x-15} =$

c) $\frac{x^2-y^2}{zy+y+xz+x} =$

d) $\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^2+xy-y^2} =$

e) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} =$

f) $\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1} =$

g) $\frac{2x^2+x-6}{x^2-4x-12} =$

h) $\frac{6x^2-7x-5}{8x^2+2x-1} =$

4. **Encuentra** el m.c.m. de cada grupo de expresiones monómicas.

a) $20x^3y^4z^5; 30x^2y^3z^5; 70x^3y^6z^9$

b) $7x^2y^5z^8; 49x^3y^2z^5; 21xyz^7$

c) $12x^2y; 24xy^2; 30x^3y^3$

d) $16m^2np^2; 20mn^2p^3; 40m^3n^3p$

5. Encuentra el m.c.m. por factorización.

- a) $x^2 + 6xy + 8y^2$; $x^2 - 16y^2$; $x^2 + 7xy + 12y^2$
 b) $(x-3)^2$; (x^3-27) ; $x^2 + 5x - 24$
 c) $15x^2 + 13x - 6$; $6x^2 + 19x - 7$; $9x^2 - 6x + 1$
 d) $b^2 - a^2$; $a^3 - b^3$; $a^4 - b^4$

6. Realiza las operaciones indicadas.

- a) $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{a-2} + \frac{1}{a}$
 b) $\frac{x-7}{(x-7)(x-1)} \cdot \frac{x-7}{7+6x-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{2(x-1)}$
 c) $\frac{1}{m^2+5m-14} \cdot \frac{m-2}{m^3-8} \cdot \frac{m^2+5m-14}{m^2+2m+4}$
 d) $\frac{y}{x^2-xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
 e) $\frac{2x}{x+3} + \frac{3x}{x-3} + \frac{2x}{9-x^2}$
 f) $\frac{a^2-a-12}{a^2-49} \times \frac{a^2-a-56}{a^2+a-20} + \frac{a^2-5a-24}{a+5}$
 g) $\frac{x^2-5x}{y+y^2} \div \left(\frac{x^2+6x-55}{y^2-1} \times \frac{xz+3x}{xy^2+11y^2} \right)$
 h) $\frac{(x^2-3x)^2}{9-x^2} \times \frac{27-x^3}{(x+3)^2-3x} \div \frac{x^4-9x^2}{(x^2+3x)^2}$
 i) $\left(n-1 - \frac{5}{n+3} \right) \div \left(n+5 - \frac{35}{n+3} \right)$
 j) $\left(x+2 - \frac{7x+9}{x+3} \right) \div \left(x-4 + \frac{5x-11}{x+1} \right)$
 k) $\left(1 + \frac{a+1}{a-1} \right) \div \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} \right)$
 l) $\frac{\frac{a+3}{a+4} - \frac{a+1}{a-1}}{\frac{a+2}{a+2} - \frac{a-3}{a+4}}$

7. Desarrolla los productos y cocientes.

- a) $\frac{x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+x}{x+2}$
 b) $\frac{x^2-4xy-5y^2}{28x^2+11xy+y^2} \div \frac{x^2-5xy}{4x+y}$
 c) $\frac{a^2+a-2}{a+4} \cdot \frac{a+4}{a^2-4a+3} \cdot \frac{a-4}{a^2-a-6}$
 d) $\frac{6m^2-11m-21}{3m^2+11m-4} \cdot \frac{9m^2+3m-2}{30m^2+41m+7} + \frac{m-3}{5m+1}$

8. Resuelve los ejercicios.

- a) $\frac{x^2-1}{x}$ entre $\frac{x^2+x}{x^3}$
 b) $\frac{a^2-2a-15}{a^2-3a-10}$ entre $\frac{a^2+a-6}{a^2-a-2}$

9. Resuelve los ejercicios.

- a) $\frac{xy - \frac{1}{xy}}{1 - \frac{1}{xy}} = \frac{\frac{x^2y^2-1}{xy}}{\frac{xy-1}{xy}}$
 b) $\frac{m - \frac{m-1}{m+1}}{\frac{m^2-1}{m-1}} = \frac{\frac{m^2+m-m+1}{m+1}}{\frac{(m+1)(m-1)}{m-1}}$

Trabajo colaborativo

10. Trabajen en parejas y resuelvan.

Simplifiquen la fracción compleja:

$$\frac{x + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^3+x^2}{x-1}}$$

Actividad indagatoria

11. Investiga el proceso que se debe seguir para resolver la potenciación de fracciones algebraicas. **Expón** un ejemplo en clase.

Shutterstock 43865181



Partitura



¿Sabías que?

Los compases son unidades de medición de tiempo. Son segmentos rítmicos de una obra musical que están conformados por una cantidad de figuras musicales.

Para separar los compases se usa una línea vertical que atraviesa el pentagrama.



Saberes previos

Ubica los signos $>$ o $<$, según corresponda.

5 8 -7 -10 12 - 14 100 - 94

Las imágenes muestran una parte de las partituras de dos obras musicales. Cada imagen corresponde a compases diferentes; los dos compases usan la negra como figura musical de referencia. ¿Cuál es la fórmula de compás de cada una de las partituras? Al comparar las dos fórmulas de compás, ¿qué conclusión podemos emitir?

Para el primero y segundo compás, la fracción de compás tendrá como denominador el 4, pues ese es el número de veces que la negra está contenida en la redonda.

En el primer compás, el tiempo 1 de la negra se repite 4 veces, por tanto, la fracción sería $\frac{4}{4}$. En el segundo compás se observa que ese tiempo se repite 6 veces. Entonces, la fracción es $\frac{6}{4}$.

Al comparar las dos fórmulas de compás, concluimos que la primera es menor a la segunda. Matemáticamente es: $\frac{4}{4} < \frac{6}{4}$

Una desigualdad es un enunciado en el que dos cantidades o expresiones no son iguales: $a > b$ (a y $b \in \mathbb{R}$)

La desigualdad que contiene una incógnita se llama *inecuación*: $2x - 1 < 7$

La solución de una inecuación se expresa en forma de intervalo.



Interculturalidad

Nuestros ancestros indígenas utilizaban varias herramientas para realizar cálculos matemáticos. Una de ellas es la taptana, una tabla similar a un ábaco.

Indaga en internet acerca de cómo se usa la taptana.

Intervalo	Inecuación	Representación gráfica
$\cdot (a, b)$	$a < x < b$	
$\cdot [a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$\cdot [a, b)$	$a \leq x < b$	
$\cdot (a, b]$	$a < x \leq b$	
$\cdot (a, \infty)$	$x > a$	
$\cdot [a, \infty)$	$x \geq a$	
$\cdot (-\infty, b)$	$x < b$	
$\cdot (-\infty, b]$	$x \leq b$	
$\cdot (-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

M.4.1.11. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en $\mathbb{Z}$, de manera analítica, en la solución de ejercicios numéricos y problemas.

M.4.1.39. Representar un intervalo en $\mathbb{R}$ de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en $\mathbb{R}$.

En la resolución de una inecuación es necesario aplicar las propiedades de las desigualdades.

Propiedades	
Si $a < b < c$, entonces $a < c$.	Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 1

Resolver la inecuación aplicando propiedades. Expresar la respuesta en forma de intervalo.

$$-2x - 5 \geq -4x + 3$$

Solución

$$-2x - 5 \geq -4x + 3$$

$$-2x - 5 + 5 + 4x \geq -4x + 3 + 5 + 4x$$

$$2x \geq 8$$

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2}$$

$$x \geq 4 \quad \text{Solución } [4; \infty[$$

Ejemplo 2

Resolver la inecuación $-\frac{x}{2} - 3 < \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ por trasposición de términos.

Solución

$$-\frac{x}{2} - 3 < \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

Pasamos $\frac{3}{2}x$ con signo negativo y -3 con signo positivo.

$$-\frac{x}{2} - \frac{3}{2}x < \frac{1}{4} + 3$$

Reducimos términos semejantes.

$$-2x < \frac{13}{4}$$

Multiplicamos por -2 .

$$\left(-\frac{1}{2}\right) - 2x < \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{13}{4}$$

$$x < -\frac{13}{8} \quad \text{Solución }]-\infty; -\frac{13}{8}]$$



Recuerda que...

- Al igual que las ecuaciones, en las inecuaciones podemos trasponer términos en la resolución. Lo que no debemos olvidar es la propiedad de multiplicación por un número negativo.
- Inecuaciones de la forma

$$-6 > 2x + 4 \geq -10$$

se denominan inecuaciones

continuas y se

pueden resolver

simultáneamente.

$$-6 - 4 > 2x + 4 - 4 \geq$$

$$-10 - 4$$

$$-10 > 2x \geq -14$$

$$-\frac{10}{2} > \frac{2}{2}x \geq -\frac{14}{2}$$

$$-5 > x \geq -7$$

$$\text{Solución } [-7; -5[$$



Competencia digital

Imprime la página

4 del siguiente

enlace y refuerza

tu conocimiento

resolviendo inecuaciones.

lynk.ec/9m22

I.M.4.1.4. / I.M.4.2.4.

1. **Determina** la desigualdad que se obtiene si $-10 < -6$.

- a) Se le suma 5 a ambos lados.
- b) Se le resta 8 a ambos lados.
- c) Se le resta -2 a ambos lados.
- d) Se le multiplica por 4.
- e) Se le multiplica por -3 .
- f) Se le multiplica por -1 .
- g) Se le divide por 2.

2. **Escribe** tres números racionales que sean solución de las siguientes desigualdades.

- a) $x \leq \frac{16}{5}$
- b) $x > \frac{35}{7}$
- c) $x < \frac{47}{6}$
- d) $x < -\frac{23}{4}$
- e) $x > -\frac{1}{3}$
- f) $-x > -\frac{3}{4}$

3. **Selecciona** el número que no satisface a las siguientes inecuaciones.

- a) $2x \leq \frac{3}{4}$
 - A) 0
 - B) $\frac{1}{4}$
 - C) $\frac{1}{2}$
- b) $2x \leq \frac{3}{4}$
 - A) 0
 - B) $\frac{25}{6}$
 - C) 9,5

c) $-\frac{2x}{5} > \frac{4}{9}$

- A) $-\frac{3}{2}$
- B) -1
- C) $-\frac{5}{2}$

d) $-\frac{8x}{11} > -\frac{16}{33}$

- A) $\frac{4}{3}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $-\frac{1}{3}$

4. **Expresa** cada desigualdad como un intervalo y **haz** su gráfica.

- a) $x \geq 4$
- b) $x \leq -2$
- c) $x > -8$
- d) $x < 6$
- e) $-2 \leq x \leq 5$
- f) $6 \geq x \geq -10$
- g) $-4 \leq x < 8$
- h) $-6 > x \geq -12$

5. **Determina** la desigualdad que representa cada intervalo.

- a) $[-2, 5]$
- b) $] -4, -1]$
- c) $] -2, 5[$
- d) $[-80, -20[$

e) $]-\infty, \frac{1}{2}]$

f) $]-\infty, -8[$

g) $]0, 3; \infty^+[$

6. **Resuelve** las inecuaciones y **expresa** la solución en forma de intervalo.

a) $x + 2 \geq 7$

b) $x - 5 \geq -3$

c) $x - 10 \leq 5$

d) $2x \geq 10$

e) $x < -1$

f) $-4x < 6$

g) $2x - 7 \leq -x + 14$

h) $6x - 10 \leq -2 - 10x$

i) $2x + 7 - x > 4x + 16$

7. **Desarrolla** los productos. Luego, **soluciona** la inecuación y **representa** la solución en forma gráfica.

a) $(x+6)(x+3) \geq (x+1)(x-1)$

b) $(2x+1)(x+4) < (x+5)^2 + x^2$

8. **Resuelve** las inecuaciones continuas.

a) $5 - \left(\frac{x}{4} - 1\right) > 3\left(x - \frac{1}{6}\right)$

b) $\frac{3x}{4} - \left(x - \frac{3}{10}\right) + 2\left(\frac{x}{2} - 1\right) \geq 5\left(x - \frac{1}{5}\right)$

c) $3\left(x - \frac{2}{9}\right) + \frac{x}{3} \leq -\left(\frac{2x}{27} - 6\right)$

d) $\frac{x}{10} - \frac{2x}{5} \leq \frac{3x}{2} - 8$

e) $\frac{x-1}{2} - 3 \leq \frac{x}{3} + 9$

f) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x > \frac{4}{5}x - \frac{7}{3}$

g) $\frac{3}{4} - 7x - \frac{9}{2} \geq \frac{5}{3} - 8x + \frac{11}{4}x + 5$

9. **Resuelve** las inecuaciones continuas.

a) $4x + 1 \geq 3x - 5 > 10 - 7x$

b) $5 > \frac{2-3x}{7} > -1$

c) $2 > 4 - \frac{1}{2}x > 0$

d) $2(x-5) \geq 3(x-2)$

e) $-\frac{x}{2} - (6x-1) \leq x + \frac{1}{4}$

f) $4 - \frac{3x}{10} + \frac{1}{4} \leq 3 + \frac{x}{8} - \frac{5}{4}$

g) $-9 \leq 5 + \frac{x}{6} < \frac{1}{6}$

Trabajo colaborativo

10. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Ejemplifiquen las propiedades 2, 3 y 4 de las desigualdades en la resolución de inecuaciones continuas de tres ejemplos. **Expongan** en clase.

Actividad indagatoria

11. **Investiga** tres enunciados que pueden ser representados por una desigualdad. **Comparte** tu investigación con la clase.



Examen de una partitura



Desequilibrio cognitivo

De los valores que se muestran a continuación, ¿cuál está más alejado y cuál es el más cercano a 62?

120 211 56 112 209 68 115 70 46

Los resultados de un examen de música, calificado sobre 80 puntos, se muestran organizados en la siguiente tabla de frecuencias. Analizar la variabilidad de los datos.

Calificaciones del examen de música

Calificaciones	fi
[43 – 47)	6
[47 – 51)	10
[51 – 55)	2
[55 – 59)	16
[59 – 63)	12
[63 – 67)	20
[67 – 71)	24
[71 – 75)	6
[75 – 78]	4

Para analizar, es necesario definir las medidas de dispersión de datos agrupados.



¿Sabías que?

La dispersión es una medida que reporta cuánto se extienden los datos alrededor de un valor medio.



Glosario

rango. Es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo en nuestros datos.

varianza. Es el promedio de los cuadrados de las distancias de cada marca de clase a la media.

Las más utilizadas son:

Rango: $R = x_n - x_1$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x - \bar{x})^2}{N}$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x - \bar{x})^2}{N}}$

Desviación media: $DM = \frac{\sum f_i|x - \bar{x}|}{N}$

Coefficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \%$

Coefficiente de variación de DM: $CVM = \frac{DM}{\bar{x}} \cdot 100 \%$

M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

De acuerdo con los requerimientos de las fórmulas se crea en la tabla de frecuencia una columna para registrar f_i , que servirá para calcular la media aritmética. Además, se agregan columnas para registrar los otros requerimientos.

Calificaciones	x	f_i	$x \cdot f_i$	$x - \bar{x}$	$f_i(x - \bar{x})^2$	$f_i x - \bar{x} $
[43 – 47)	45	6	270	-17,12	1 758,57	102,72
[47 – 51)	49	10	490	-13,12	1 721,34	131,2
[51 – 55)	53	2	106	-9,12	166,35	18,24
[55 – 59)	57	16	912	-5,12	419,43	81,92
[59 – 63)	61	12	732	-1,12	15,05	13,44
[63 – 67)	65	20	1 300	2,88	165,88	57,6
[67 – 71)	69	24	1 656	6,88	1 136,03	165,12
[71 – 75)	73	6	438	10,88	710,25	65,28
[75 – 79]	77	4	308	14,88	885,66	59,52
Σ		100	6 212		6 978,56	695,04

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f_i}{N}; \bar{x} = \frac{6\,212}{100}; \bar{x} = 62,12$$

$$\text{Rango } R = x_n - x_1; R = 79 - 43; R = 36$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x - \bar{x})^2}{N}; \sigma^2 = \frac{6\,978,56}{100}; \sigma^2 = 69,79$$

Al comparar con la media aritmética, se observa que no es un valor tan alejado.

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x - \bar{x})^2}{N}}; \sigma = \sqrt{69,79}; \sigma = 8,35$$

Desviación media

$$DM = \frac{\sum f_i|x - \bar{x}|}{N}; DM = \frac{695,04}{100}; DM = 6,95$$

Coefficiente de variación

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%; CV = \frac{8,35}{62,12} \cdot 100\% = 13,44\%$$

Coefficiente de variación de la desviación media

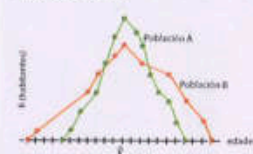
$$CVM = \frac{DM}{\bar{x}} \cdot 100\%; CVM = \frac{6,95}{62,12} \cdot 100\%; CVM = 11,19\%$$



Interdisciplinariedad

Matemática y Demografía

El gráfico muestra la comparación entre dos poblaciones que tienen una misma media aritmética.



La población A muestra menos dispersión en sus datos en relación con la población B.



Competencia digital

Amplía tu conocimiento sobre medidas de dispersión revisando el siguiente enlace:

lynk.ec/9m23



Competencia matemática

Desviación estándar.

Es la raíz cuadrada de la varianza; también se conoce como desviación típica.

Desviación media. Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones con respecto a la media aritmética.

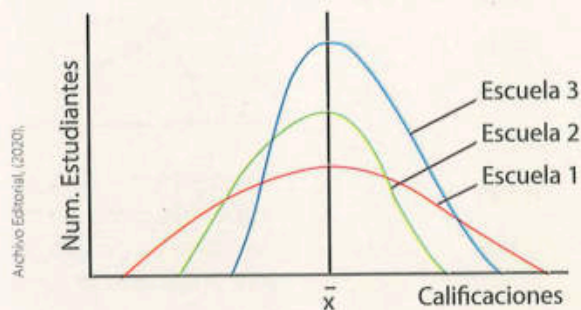
Coefficiente de variación. Es la razón entre la desviación estándar y la media.

I.M.4.8.1.

1. **Selecciona** las unidades que indican la variabilidad en un grupo de datos.

- a) Media b) Desviación típica c) Rango
d) Moda e) Varianza f) Mediana

2. **Selecciona** la gráfica que muestra mayor dispersión.



3. **Empareja**, en tu cuaderno, la columna de la derecha con la de la izquierda.

a) CV

1. $\frac{\sum f_i |x - \bar{x}|}{N}$

b) σ^2

2. $\sqrt{\frac{\sum f_i (x - \bar{x})^2}{N}}$

c) DM

3. $x_n - x_1$

d) CVM

4. $\frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$

e) σ

5. $\frac{DM}{\bar{x}} \cdot 100\%$

f) R

6. $\frac{\sum f_i (x - \bar{x})^2}{N}$

4. **Calcula** el rango del grupo de datos recolectados sobre la edad por un grupo de personas.

20	14	30	70	12	15
18	24	48	10	52	46
72	34	40	25	8	34
28	66	31	45	31	48

5. **Completa** en tu cuaderno la tabla. Luego, **calcula** las medidas de dispersión propuestas y **emite** una conclusión.

Edades de los miembros de una familia

Edades	x	f _i	x · f _i	x - $\bar{x}$	f _i (x - $\bar{x}$) ²	f _i x - $\bar{x}$
[0 - 10)	5	8	40	-25	5 000	200
[10 - 20)	15	6	90	-15	1 350	90
[20 - 30)	25	8		-5	200	40
[30 - 40)	35	6		5	150	30
[40 - 50)		9		15	2 025	135
[50 - 60)		2		25	1 250	50
[60 - 70)		2		35	2 450	70
[70 - 80)		1		45	2 025	45
Σ					14 450	660

$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f_i}{N}$; $\bar{x} =$; $\bar{x} =$

R =

R =

R =

$\sigma^2 =$

$\sigma^2 =$

$\sigma^2 =$

$\sigma =$

$\sigma =$

$\sigma =$

DM =

DM =

DM =

CV =

CV =

· 100 % =

CVM =

CVM =

CVM =

Conclusión:

Estrategia: hacer un esquema y plantear una ecuación

Problema resuelto

Dos ciclistas avanzan uno hacia el otro por una misma carretera. Sus velocidades son de 15 km/h y de 20 km/h. Si les separan 105 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Con qué velocidades viajan los ciclistas?

Primero: 15 km/h Segundo: 20 km/h

¿Qué distancia los separa? 105 km

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Elaboramos un esquema que nos permita visualizar la relación entre las distancias que recorrerán los ciclistas y planteamos una ecuación, tomando en cuenta la fórmula $t = \frac{e}{v}$ que permite calcular el tiempo que se tarda un móvil cuando mantiene velocidad constante.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?



$$\text{Tiempo primer ciclista: } t = \frac{x}{15}$$

$$\text{Tiempo segundo ciclista: } t = \frac{105 - x}{20}$$

$$\text{Como los tiempos son iguales, tenemos: } \frac{x}{15} = \frac{105 - x}{20}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{15} = \frac{105 - x}{20}; 20x = 15(105 - x); 20x = 1575 - 15x$$

$$20x + 15x = 1575; 35x = 1575; x = \frac{1575}{35}; x = 45$$

Reemplazamos x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$t = \frac{x}{15}; t = \frac{45}{15}; t = 3 \text{ h}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

Los ciclistas se encontrarán 3 horas después de su partida.

Problema resuelto

Dos autos avanzan uno hacia el otro por una misma carretera. Sus velocidades son de 45 km/h y de 30 km/h. Si los separan 200 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Con qué velocidades viajan los autos?

Auto 1: 45 km/h Auto 2: 30 km/h

¿Qué distancia los separa? 200 km

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Elaboramos un esquema que nos permita visualizar la relación entre las distancias que recorrerán los autos y planteamos una ecuación tomando en cuenta la fórmula $t = \frac{e}{v}$ que permite calcular el tiempo que se tarda un móvil cuando mantiene velocidad constante.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?



$$\text{Tiempo auto 1: } t = \frac{x}{45}$$

$$\text{Tiempo auto 2: } t = \frac{200 - x}{30}$$

Como se demoran el mismo tiempo, tenemos:

$$\frac{x}{45} = \frac{200 - x}{30}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{45} = \frac{200 - x}{30}; 30x = 45(200 - x); 30x = 9000 - 45x$$

$$30x + 45x = 9000; 75x = 9000; x = \frac{9000}{75}; x = 120$$

Reemplazamos x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$t = \frac{x}{45}; t = \frac{120}{45}; t = 2,67 \text{ h}$$

4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

Los autos se encontrarán 2,67 horas después de su partida.

Problemas propuestos

1. Un móvil se traslada de este a oeste con una velocidad de 20 km/h; otro móvil se traslada de oeste a este a una velocidad de 30 km/h. Si los separan 250 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
2. Dos vehículos salen al encuentro desde dos ciudades diferentes, que distan 750 km. El primer vehículo va a una velocidad de 90 km/h, mientras el segundo lo hace a una velocidad de 60 km/h. **Calcula** el tiempo en que se encontrarán.
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
3. Un auto se dirige de una ciudad A hacia otra ciudad B y se desplaza a una velocidad promedio de 70 km/h, mientras que al mismo tiempo sale desde B hacia A otro auto, que se desplaza a una velocidad promedio de 80 km/h. Si la distancia que separa a estas ciudades es de 120 km, ¿a qué distancia de la ciudad B se cruzan los dos vehículos?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
4. Dos buses van a su encuentro. Para esto, se desplazan en diferentes velocidades y en diferentes sentidos. Sus velocidades son de 50 km/h y de 70 km/h. Si los separan 280 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
5. Luis sale de su casa y camina a 6 km/h, mientras Mateo sale de su casa y va en bicicleta a 24 km/h. Si los dos se tienen que encontrar y lo hacen a una distancia de 8 km, ¿en qué tiempo se encuentran?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.
6. Dos móviles A y B salen al mismo tiempo en direcciones opuestas, de manera que en un determinado momento se cruzarán. El móvil A recorre el trayecto a una velocidad promedio de 10 m/s y el móvil B lleva una velocidad promedio de 15 m/s. Si la distancia que los separaba al iniciar su recorrido era de 60 metros, ¿luego de qué tiempo se cruzarán?
 - a) Comprender el problema.
 - b) Plantear la estrategia.
 - c) Aplicar la estrategia.
 - d) Responder.

Cuadros mágicos

Fotocopia esta página, completa los cuadros mágicos.

- **Completa** los cuadros con números del 1 al 9, de manera que al sumarse en sentido horizontal, vertical y diagonal haya correspondencia con el número indicado.

			11
			19
	1		17
			9
19	9	17	11

			9
			12
			18
			15
15	12	18	15

- **Completa** los cuadros con números del 11 al 19, de manera que al sumarse en sentido horizontal, vertical y diagonal haya correspondencia con el número indicado.

			50
			42
	17		50
			43
44	44	47	42

			43
			45
			45
			45
43	40	52	40



Cálculo mental

Multiplicar por 5 y 25

Como $5 = \frac{10}{2}$, multiplicar un número por 5 es lo mismo que dividirlo por 2 y multiplicarlo por 10.

$$34 \times 5 = 34 \times \frac{10}{2} = \frac{34}{2} \times 10 = 17 \times 10 = 170$$

Siguiendo el esquema, tenemos que $25 = \frac{100}{4}$. Por lo tanto, podemos decir que para multiplicar un número por 25, basta con dividirlo por 4 y multiplicar por 100.

$$28 \times 25 = 28 \times \frac{100}{4} = \frac{28}{4} \times 100 = 7 \times 100 = 700$$

Ahora, hazlo tú.

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $48 \times 5 =$ | i) $16 \times 25 =$ |
| b) $76 \times 5 =$ | j) $32 \times 25 =$ |
| c) $21 \times 5 =$ | k) $42 \times 25 =$ |
| d) $64 \times 5 =$ | l) $68 \times 25 =$ |
| e) $82 \times 5 =$ | m) $24 \times 25 =$ |
| f) $38 \times 5 =$ | n) $48 \times 25 =$ |
| g) $27 \times 5 =$ | o) $74 \times 25 =$ |
| h) $55 \times 5 =$ | p) $86 \times 25 =$ |

Nuestra riqueza musical

Áreas asociadas al proyecto: Matemática y ECA

Justificación / problemática

Los ecuatorianos poseemos una riqueza musical inmensa, que data desde los tiempos precolombinos; así lo demuestran los instrumentos musicales que se exhiben en los museos.

Poseemos muchos ritmos autóctonos, como el capishca que es el más original y auténtico por sus raíces indígenas, los afinados de guitarra característicos de las fiestas del solsticio de junio, la marimba esmeraldeña, entre otros que, con el pasar del tiempo, se han dejado de tocar.

Es nuestra responsabilidad mantener vivas las tradiciones musicales. Aun cuando vivamos en un mundo globalizado que nos ofrece un sinfín de géneros musicales de los cuales podemos gustar, es importante fortalecer nuestra identidad y evitar que se olvide nuestro legado musical.



Shutterstock, 126336095.



Shutterstock, 101125598.



Shutterstock, 162957101.

Objetivo

Informar sobre los instrumentos y géneros musicales ecuatorianos a través de una exposición para fortalecer nuestra identidad.

Recursos

- Imágenes
- Grabadora con puerto USB
- Memoria flash
- Investigación sobre los instrumentos y géneros musicales ecuatorianos.

Actividades

- **Realiza** una investigación sobre los instrumentos y géneros musicales ecuatorianos.
- **Elabora** carteles con las imágenes de los instrumentos musicales.
- **Crea** un archivo con, por lo menos, cinco ritmos musicales ecuatorianos.
- **Expón** frente a un grupo de estudiantes de otro paralelo la descripción de los cinco géneros musicales (a medida que expongan, **permitan** que el público los escuche) y de los instrumentos cuyas imágenes se elaboraron.



Evaluación

1. **Elabora** con anticipación una prueba con ítems de selección de los géneros musicales y de identificación de los nombres de los instrumentos autóctonos del Ecuador, de manera que se obtenga una calificación de 10 puntos.
2. **Aplica** la evaluación, **tabula** los datos obtenidos, **organízalos** en una tabla de frecuencia de datos agrupados y **calcula** las medidas de dispersión.

Tema: Inventario de papelería

Ecuaciones

Situación cotidiana

Durante la época de inicio de clases, las papelerías se surten de productos y siempre tienen una persona encargada de llevar un inventario de las ventas. Para tener las cuentas claras de los productos y sus ventas diarias, se utilizan ecuaciones.

El miércoles pasado, el encargado de la papelería “El buen papel” surtió el exhibidor con 90 cajas de marcadores. Al final del día, ya habían sido vendidas algunas. El jueves por la mañana, el encargado de la papelería decidió reponer tantas cajas de marcadores como las que habían quedado el día anterior. Al final del jueves, se había vendido el mismo número de cajas de marcadores que el miércoles. Si quedaron 30, ¿cuántas cajas de marcadores se vendieron el día miércoles?



Shutterstock, 43932645

Reflexiona

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuál es la expresión que representa la cantidad de cajas vendidas el miércoles antes de cerrar la papelería?
- **Comprueba** la respuesta.
¿Qué expresión representa las cajas de marcadores el jueves por la mañana?
- ¿Qué otra estrategia de solución puedes aplicar?

Resuelve la situación

- A un partido de fútbol asistieron 2 000 personas entre adultos y niños. Se llegó a recaudar, por concepto de entradas, un monto de \$ 13 600. Si el precio de la entrada era de \$ 8 para los estudiantes y de \$ 5 para niños, ¿cuántos adultos y cuántos niños acudieron ese día?



Shutterstock, 438200817

Tema: Límites de velocidad

Inecuaciones

Situación cotidiana

Para evitar accidentes de tránsito, es importante respetar los límites de velocidad establecidos en la ley de nuestro país. Los conductores y peatones debemos informarnos para no cometer infracciones que puedan costar nuestra vida o la de otra persona.

Vehículos	Tipo de vía	Límite máximo	Rango moderado	Fuera de rango moderado
	Urbana	50 km/h	50 km/h a 60 km/h	Más de 60 km/h
	Perimetral	90 km/h	90 km/h a 120 km/h	Más de 120 km/h
	Rectas en carretera	100 km/h	100 km/h a 135 km/h	Más de 135 km/h
	Curvas en carretera	60 km/h	60 km/h a 75 km/h	Más de 75 km/h
 	Urbana	40 km/h	40 km/h a 50 km/h	Más de 50 km/h
	Perimetral	70 km/h	70 km/h a 100 km/h	Más de 100 km/h
	Rectas en carretera	90 km/h	90 km/h a 115 km/h	Más de 115 km/h
	Curvas en carretera	50 km/h	50 km/h a 65 km/h	Más de 65 km/h
	Urbana	40 km/h	40 km/h a 50 km/h	Más de 50 km/h
	Perimetral	70 km/h	70 km/h a 95 km/h	Más de 95 km/h
	Rectas en carretera	70 km/h	70 km/h a 100 km/h	Más de 100 km/h
	Curvas en carretera	40 km/h	40 km/h a 60 km/h	Más de 60 km/h

Shutterstock, 2020/79462

Rosa iba en su auto por la vía Perimetral con su amiga Julia, cuando esta le dice: "Si duplicas la velocidad y aumentas en 20 km/h, estarías, aun así, dentro del límite de la velocidad permitida".

¿Cuál es la velocidad máxima a la que se encontraba manejando Rosa?

Reflexiona

- ¿Cuáles son las velocidades máximas en la vía Perimetral?
- **Comprueba** la respuesta.
- Si se considera que Rosa conducía con una velocidad de 75 km/h y que, dentro de poco, tomaría una curva en carretera, ¿cuánto es lo mínimo que debería reducir su velocidad para cumplir con los límites legales establecidos?
- **Crea** un problema en el que utilices las velocidades de un camión en zona urbana.
- ¿Crees que se respetan los límites de velocidad en nuestro país?

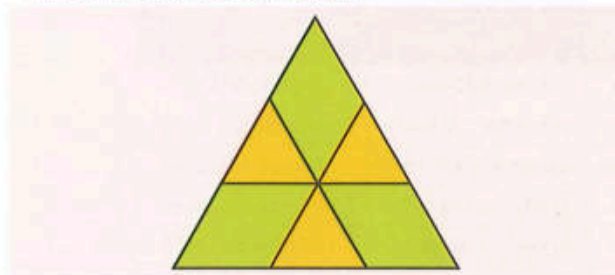
Resuelve la situación

- Las edades de dos hermanos suman 24 años. ¿Cuál es la edad mínima que puede tener el hermano mayor?

1. Cuatro amigos se repartieron una bolsa de dulces. Los tres más grandes se quedaron con $\frac{2}{3}$ de lo que les debía corresponder si la repartición hubiera sido equitativa, ¿qué porcentaje de la bolsa de dulces le quedó al amigo menor?

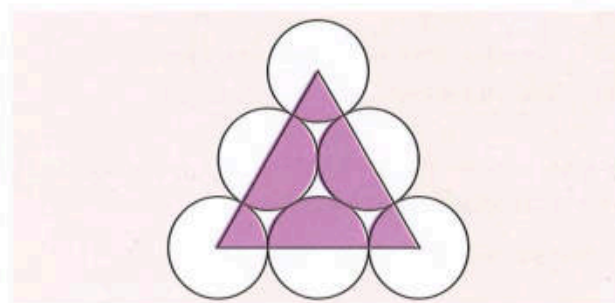
Argumenta la solución:

2. En la figura se muestra un triángulo equilátero que tiene 9 cm^2 de área. Dentro de él se han dibujado líneas paralelas en sus lados, que lo dividen en tres partes iguales. ¿Cuál es el área de los 3 cuadriláteros que aparecen dentro del triángulo?



Argumenta la solución:

3. En la siguiente figura, los círculos son tangentes (se tocan en un solo punto). Todos estos son del mismo tamaño y tienen radio igual a 2 cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

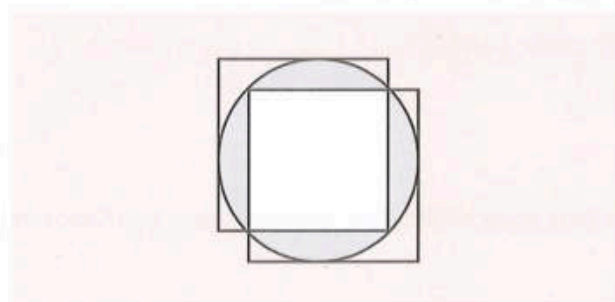


Argumenta la solución:

4. Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se forman enteros de dos cifras que sean múltiplos de 3 y de 5. ¿Cuántos enteros distintos se pueden formar?

Argumenta la solución:

5. Dos cuadrados del mismo tamaño cubren a un círculo de radio 3, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Argumenta la solución:

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

En una encuesta realizada a 300 estudiantes, se obtuvieron los siguientes resultados:

180 prefieren clases en inglés; 130 prefieren clases en español; y 40 prefieren clases en ambos idiomas. Si se elige a uno de los estudiantes al azar, ¿cuál es el porcentaje de probabilidad de que haya preferido solamente las clases en español?

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------------|------------|
| a) 60 % | c) 30 % |
| b) 43,34 % | d) 46,67 % |

2. Lee y analiza.

Si $(m - 3)^2 = 0$, **determina** el valor de $(m + 4)(m - 1)$

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|-------|-------|
| a) -4 | c) 3 |
| b) 1 | d) 14 |

3. Lee y analiza.

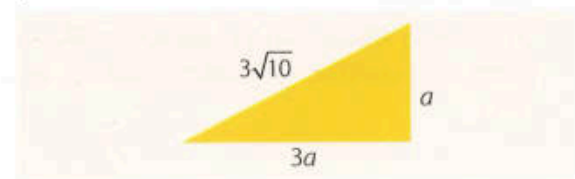
Si $x^2 = 3$, ¿a qué número es igual x^6 ?

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|-------|
| a) 3 | c) 9 |
| b) 6 | d) 27 |

4. Lee y analiza.

¿Cuál es el valor de a ?



Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|---------------|
| a) 6 | c) 9 |
| b) 3 | d) $\sqrt{3}$ |

5. Lee y analiza.

Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, ¿cuál es el valor de $\frac{4a}{3b}$?

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|-------|
| a) 1 | c) 12 |
| b) 4 | d) 15 |

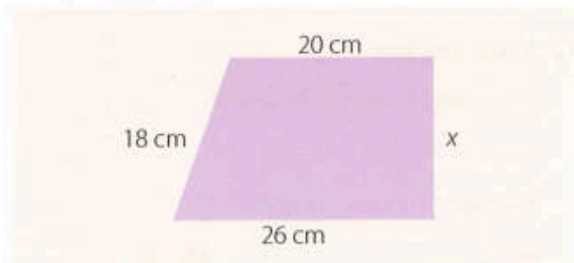
6. Lee y analiza.

Determina el valor de: $\frac{a+4}{a+3} = \frac{2}{4}$

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|-------|
| a) 5 | c) -5 |
| b) 4 | d) 10 |

7. Lee y analiza.



Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|-----------------|-------|
| a) $\sqrt{12}$ | c) 12 |
| b) $12\sqrt{2}$ | d) 18 |

8. Lee y analiza.

¿Qué números continúan la serie?

2, 4, 1, 3, 0,

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|---------|----------|
| a) 3, 2 | c) -1, 2 |
| b) 1, 2 | d) 2, -1 |

9. Lee y analiza.

¿Qué número completa la serie?

8, 1, 3, 9, 2, 4, 10, 3, 5, 11, ...

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|------|
| a) 5 | c) 3 |
| b) 4 | d) 2 |

10. Lee y analiza.

¿Cuál es el número que multiplicado por 2 es 4 unidades menos que 3 veces 6?

Escoge la respuesta correcta.

- | | |
|------|------|
| a) 6 | c) 8 |
| b) 7 | d) 9 |

11. Lee y analiza.

La suma de dos números consecutivos es 81. **Hall**a la diferencia del triple del mayor y el doble del menor.

Escoge la respuesta correcta.

- a) 43 c) 54
b) 44 d) 72

12. Lee y analiza.

¿Qué letra continúa la serie?

A, E, I, M, P, T, ...

Escoge la respuesta correcta.

- a) V c) W
b) X d) Y

13. Lee y analiza.

¿Qué figura continúa la serie gráfica?



Escoge la respuesta correcta.

- a) c)
b) d)

14. Lee y analiza.

¿Qué figura continúa la serie gráfica?



Escoge la respuesta correcta.

- a) c)
b) d)

15. Lee y analiza.

¿Qué número continúa la serie?

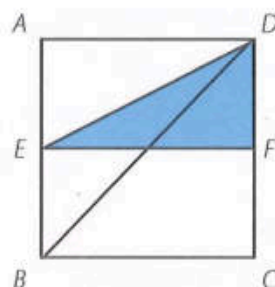
1, 54, 5, 18, 25, 6, 225, ...

Escoge la respuesta correcta.

- a) 5 c) 2
b) 3 d) 1

16. Lee y analiza.

En la figura ABCD es un cuadrado, E y F son los puntos medios de AB y CD, respectivamente, y $AB = 1$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

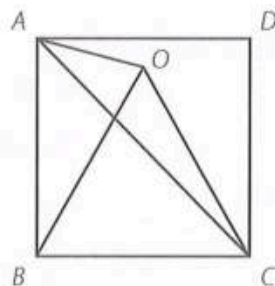


Escoge la respuesta correcta.

- a) $1/4$ c) $1/8$
b) $1/2$ d) 1

17. Lee y analiza.

En la figura ABCD es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 30° c) 60°
b) 45° d) 75°

18. Lee y analiza.

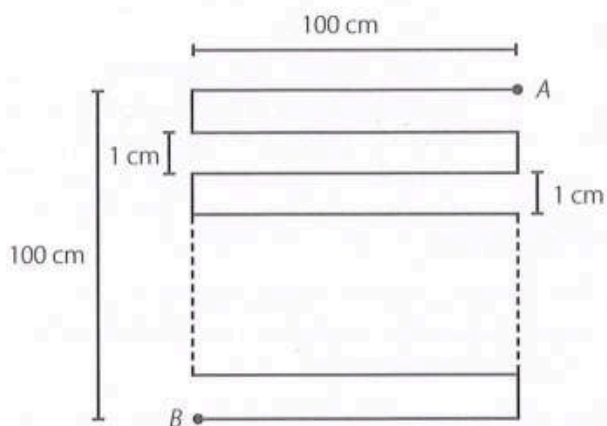
En un jardín del zoológico hay jirafas y avestruces. Si en total hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántas avestruces hay en el zoológico?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 12
- b) 37
- c) 28
- d) 18

19. Lee y analiza.

Una hormiga recorre el camino de A a B que se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia recorrida?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 2 500 cm
- b) 9900 cm
- c) 10 200 cm
- d) 909 cm

20. Lee y analiza.

¿Por cuál de los siguientes números debo multiplicar a 768 para que el resultado tenga la mayor cantidad de ceros al final?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 2 500
- b) 3 125
- c) 5 000
- d) 10 000

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |



Relación entre matemática y la música



Valores de nota estándar. Todo, medio, cuarto y octavo a sesenta y cuatro

media distancia; seguidamente, a un cuarto de esta, y así sucesivamente. Pitágoras descubrió que, al tocar la cuerda en cada longitud, el sonido resultante despedía un tono más alto.

La relación descubierta resultó ser de 2:1. Las notas musicales surgieron como el resultado matemático de fraccionar tal proporción en 7 partes: do, re, mi, fa, sol, la y si. En la octava posición, se repite el do. De esta manera, los intervalos se repiten en las octavas, una característica compartida con cada nota.

A las octavas se unen los intervalos de las terceras, cuartas y quintas, cuyas combinaciones dan como resultado acordes armónicos. Esto enriquece la composición musical.

La duración de cada sonido también está matemáticamente establecida en la música. Toda nota musical expresa la mitad del tiempo de su antecesora. Primero está la redonda, que equivale a 4 tiempos; le sigue la blanca, con 2 tiempos; luego, la negra, de 1 tiempo; la corchea, 1/2 tiempo; la semicorchea, 1/4; la fusa, 1/8; y la semifusa, de 1/16. Si combinas estas figuras y sus tiempos, obtienes una infinidad de estilos y ritmos musicales.

En toda actividad musical se entrelazan los modelos matemáticos. Por eso, hoy en día se relaciona la enseñanza de las matemáticas para niños con el estudio de la música.

Como conclusión, podemos afirmar que la relación entre ambas disciplinas, música y matemáticas, es tan estrecha que sin la matemática no podría expresarse la música. Y sin la música, sería más difícil comprender la practicidad de las matemáticas".

"Entre las matemáticas y la música existe una conexión tan estrecha que esta última no podría existir sin la aplicación de la primera. Los valores de cada nota, la afinación, la escala musical, el pentagrama y hasta la composición rítmica de toda canción se fundamentan sobre bases numéricas.

Fue en la escuela de Pitágoras, alrededor del siglo V a. C., donde se inició el estudio de las conexiones entre la música y la matemática.

Todo comenzó con la longitud de una cuerda tensada y el sonido que esta emitía al pulsarla. Primero, la cuerda se pulsaba en toda su extensión; luego, a



Fuente: <https://alohaecuador.com/relacion-matematicas-musica/>



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Cuál es el tema central de la lectura?
2. **Indica** tres elementos de la música en los que estén presentes las matemáticas.
3. ¿Cómo resumirías la relación entre la matemática y la música?
4. ¿Qué descubrió Pitágoras con respecto a la música y las matemáticas?
5. ¿Estás de acuerdo con el punto de vista del autor? **Justifica.**



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. **Investiga** acerca de Johann Sebastian Bach y otros compositores que mostraron fascinación por aplicar las matemáticas en la música. **Haz** un ensayo sobre este tema.
2. **Ingresa** a Internet y **busca** imágenes sobre el tema. **Realiza** un collage con esas imágenes.
3. **Elabora** un cartel sobre el uso de las fracciones en la música. **Expón** tu trabajo en clase.



Shutterstock, 1116751745

Trabajo colaborativo

4. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen en cuenta** las siguientes recomendaciones:

- Debe haber un organizador gráfico.
- Hay que incluir imágenes.
- Los textos deben ser sintéticos y precisos.
- Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 507995624

1. **Relaciona** cada ecuación con su solución. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 1. $-2x+4=6$ | A) $x=-\frac{2}{3}$ |
| 2. $x+6=10$ | B) $x=7$ |
| 3. $3x-1=2x+6$ | C) $x=-1$ |
| 4. $\frac{4}{3}-7x=6$ | D) $x=4$ |

- a) 1D; 2C; 3B; 4A
b) 1D; 2C; 4A; 3B
c) 1C; 2D; 4A; 3B
d) 1C; 2D; 3B; 4A

2. **Resuelve** las ecuaciones. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

a) $(x+6)(x-1)+5=x^2-6$

- A) $\frac{7}{5}$ B) -1 C) 1 D) $-\frac{7}{5}$

b) $0,5+\frac{3}{4}x=0,25x-\frac{3}{2}$

- A) -4 B) -1 C) 1 D) -1

3. **Determina** el valor de x para que el perímetro de un cuadrado sea 40 cm. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

- a) 12 b) 6 c) 14 d) 10

4. **Traduce** al lenguaje algebraico y luego selecciona la respuesta correcta.

1. El triple de un número
2. Un número aumentado en 3
3. Un número disminuido en 3
4. Restar de 3 un número
- a) $2x$; $x+3$; $\frac{x}{3}$; $3-x$; $x-3$
b) $3x$; $x-3$; $\frac{1}{3}x$; $3-x$; $x+3$
c) $3x$; $x+3$; $\frac{x}{3}$; $x-3$; $3-x$
d) $2x$; $x+3$; $\frac{x}{3}$; $3-x$; $x-3$

5. **Lee** detenidamente el enunciado del problema. Luego, **selecciona** las respuestas correctas.

Una madre tiene 36 años y su hijo 15. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el doble de la edad del hijo?

- Se usa x para representar:

- a) La edad actual de la madre
b) Los años que deben transcurrir
c) La edad actual del hijo
d) El doble de la edad de la madre

- La ecuación planteada para resolver el problema es:

a) $2(36+x)=15+x$ c) $36+x=2(15+x)$

b) $36+x=\frac{15+x}{2}$ d) $\frac{36+x}{2}=15-x$

- Los años que deben transcurrir son:

- a) 42 b) 21 c) 8 d) 6

6. **Determina** el m.c.m. y **selecciona** la respuesta correcta.

a) $9a^2+6a+1 = (3a-1)^2$

b) $9a^2-1 = (3a+1)(3a-1)$

c) $3a^2+2a-1 = (3a-1)(a+1)$

d) $a^2+a = a(a+1)$

A) $a(3a-1)(3a+1)(a+1)$

B) $a(3a-1)^2(3a+1)(a+1)$

C) $(3a-1)^2(3a+1)$

D) $(3a-1)^2(3a+1)(a+1)$

7. **Expreso mis emociones.** Enfrenta con optimismo los problemas y contrariedades que se puedan presentar en tus actividades escolares.

Coevaluación

8. Con las fracciones algebraicas

$$F_1: \frac{x}{x^2-1}; F_2: \frac{1-x}{-x^2-x+2}; F_3: \frac{1}{x^2-x}$$

realicen las operaciones indicadas y seleccionen la respuesta correcta.

• $F_1 - F_2 + F_3$

a) $\frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{4x+2}{x(x+1)(x-1)}$

c) $\frac{3x^2+4x+2}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

d) $\frac{4x+2}{(x+2)(x^2-1)}$

• $F_1 \cdot F_2 \cdot \frac{1}{F_3}$

a) $\frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x+2)}$

c) $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x-1)}$

d) x^2-1

9. Analiza la veracidad de cada afirmación y selecciona la respuesta correcta.

1.  equivale a $[a, \infty[$

2.  equivale a $]a, b]$

3.  equivale a $[-\infty, a]$

4.  equivale a $] -\infty, \infty[$

a) 1 y 2 b) 1 y 4 c) 2 y 3 d) 3 y 4

10. Relaciona cada inecuación con su solución.

1. $x+11 \leq 6$ A) $[5; \infty[$

2. $-3x \geq 15$ B) $] -\infty; -5]$

3. $-2x+1,5 < 11,5$ C) $(-\infty; -5)$

4. $x+6 \leq 4x-9$ D) $[-5; \infty[$

a) 1A; 2A; 3C; 4D

b) 1B; 2D; 3A; 4C

c) 1B; 2C; 3D; 4A

d) 1B; 2D; 3C; 4A

11. ¿Cuál es el intervalo, solución de la inecuación $x+2 \leq 2x-6 < 8+x$?

a) $[-4; 2[$ b) $[-4; 2]$ c) $[8; 14[$ d) $]8; 14[$

Autoevaluación

12. Pinta según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

Estoy en proceso

Contenidos	Resuelvo ecuaciones de primer grado con una incógnita.	
	Traduzco lenguaje gramatical a lenguaje algebraico.	
	Resuelvo problemas con ecuaciones de primer grado.	
	Realizo operaciones con fracciones algebraicas.	
	Represento intervalos en la recta numérica.	
	Resuelvo inecuaciones de primer grado.	

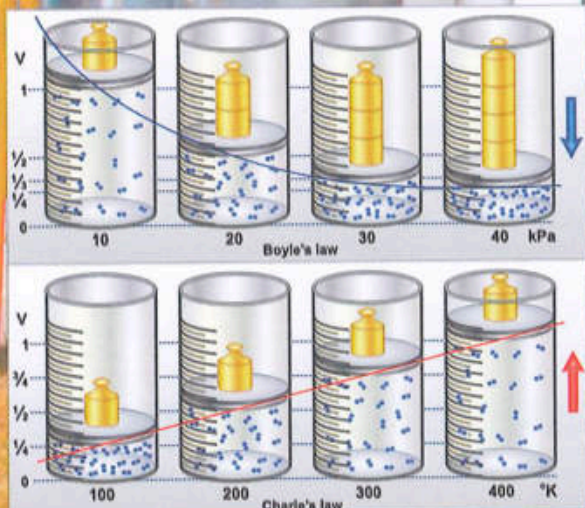
Metacognición

- ¿Indagué con mi maestro o maestra cuando tuve dudas?
- ¿Encontré aplicabilidad de los conocimientos adquiridos?
- ¿Colaboré en los trabajos grupales?

Funciones lineales. Técnicas de conteo

Desde tiempos antiguos se han observado fenómenos en los que ciertas magnitudes se relacionan entre sí. Está, por ejemplo, la fuerza de atracción entre dos cuerpos, que se relaciona con la masa de los cuerpos y la distancia que los separa. Asimismo, está el volumen de un gas a temperatura constante, que se relaciona con la presión que se ejerce sobre ese gas. El capital final de una inversión es el resultado de la relación entre el capital invertido y el tiempo que dure la inversión.

Esta relación entre magnitudes puede ser representada mediante un gráfico matemático.





Preguntas generadoras

Observa la gráfica y responde.

- ¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan?
- A mayor presión, ¿qué sucede con el volumen?

Lo que vamos a aprender

Álgebra y funciones

- Producto cartesiano
- Relaciones y funciones
- Funciones crecientes, decrecientes y constantes
- Función lineal y afín

Estadística y probabilidad

- Técnicas de conteo: diagrama de árbol, probabilidad de eventos o sucesos compuestos
- Combinaciones y permutaciones

Objetivos

O.M.4.1. / O.M.4.7.



Desequilibrio cognitivo

¿Qué condición debe cumplirse para que los pares ordenados $A(x, y)$ y $B(z, w)$ sean iguales?



Para elegir el nombre de un hijo o una hija, buscamos varias combinaciones.

La noción de producto cartesiano se utiliza ampliamente en álgebra. La idea medular consiste en la relación que se establece entre dos conjuntos no vacíos para dar lugar a un tercer conjunto, formado por pares ordenados. En este tema vamos a estudiar sobre el producto cartesiano y las relaciones entre dos conjuntos no vacíos.

Tres amigas embarazadas de niñas consideran que Paola y Sol son nombres apropiados para sus hijas. El apellido que llevaría una de las niñas es Salas, otro es Cándor y el tercero es Gualpa. ¿Cuáles serían las posibilidades de nominación de las niñas?

Consideremos a A como el conjunto formado por los nombres y B el conjunto formado por los apellidos.

$$A = \{Paola, Sol\} \quad B = \{Salas, Cándor, Gualpa\}$$

Consideremos al producto cartesiano de dos conjuntos como la vía de solución, por lo tanto, definámoslo.

El producto cartesiano $A \times B$ efectuado entre dos conjuntos no vacíos, uno A y otro B , es el conjunto formado por todos los pares ordenados $(a; b)$ de manera que la primera componente " a " pertenece al conjunto A y la segunda componente " b " pertenece al conjunto B .

$$A \times B = \{(a; b) \in A \times B / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

El cardinal de un conjunto indica el número o la cantidad de los elementos de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita.

Aplicando esta definición, tenemos las siguientes posibilidades de nominación.

$$A \times B = \{(Paola; Salas), (Paola; Cándor), (Paola; Gualpa), (Sol; Salas), (Sol; Cándor), (Sol; Gualpa)\}$$

Ejemplo 1

Con los conjuntos $Q = \{1, 3, 5\}$ y $R = \{x, y, z\}$, obtener los productos cartesianos $Q \times R$ y $R \times Q$.

Solución

Como la cardinalidad de los conjuntos es $n_Q = 3$ y $n_R = 3$, la cardinalidad de los productos será: $n_{Q \times R} = n_{R \times Q} = 3 \times 3 = 9$

$$Q \times R = \{(1, x), (1, y), (1, z), (3, x), (3, y), (3, z), (5, x), (5, y), (5, z)\}$$

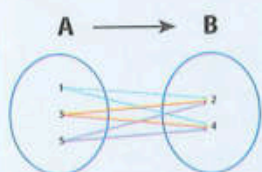
$$R \times Q = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1), (x, 3), (y, 3), (z, 3), (x, 5), (y, 5), (z, 5)\}$$

Estos resultados muestran que $Q \times R \neq R \times Q$; por lo tanto, concluimos que el producto cartesiano no es conmutativo.

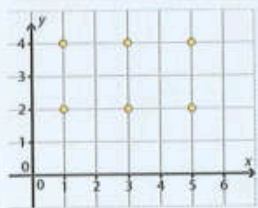


Recuerda que...

Los conjuntos pueden ser representados en forma sagital. El producto cartesiano se visualiza a través de flechas que relacionan los elementos de un conjunto con los del otro.



Los elementos también pueden ser representados en los ejes de un sistema de coordenadas.



Relación

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$. En este contexto, al conjunto A se lo denomina conjunto de salida y a B , conjunto de llegada.

Una relación R es representada por el conjunto R que, determinado por comprensión, se expresa así:

$$R = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\} \subset A \times B$$

Una relación queda totalmente definida si cumple una condición expresada en forma gramatical o con una fórmula.

Ejemplo 2

Determinar por extensión:

- La relación R_1 definida de $A = \{6, 9\}$ en $B = \{3, 4, 10\}$ que cumpla con la condición "ser mayor que".
- La relación $R_2 = \{(x, y) / y = x^3\}$ definida de $X = \{0, 1, 2, 3\}$ en $Y = \{0, 1, 3, 8, 27, 81\}$.
- La relación $R_3 = \{(q, s) / q = \sqrt{s}\}$ definida de $Q = \{0, -1, 2, -5\}$ en $S = \{1, 3, 4, 16, 25, 36\}$.

Solución

- Comparamos los elementos de A con los de B ; escogemos los que permiten formar los pares ordenados que cumplen con la condición de que la primera componente sea mayor a la segunda.
 $R_1 = \{(6, 3), (6, 4), (9, 3), (9, 4)\}$
- Formamos los pares ordenados en los que se evidencie que la segunda componente sea el cubo de la primera.
 $R_2 = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$
- Recordamos que al extraer la raíz cuadrada a un número positivo, tenemos dos respuestas: una positiva y otra negativa.
 $R_3 = \{(-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (-5, 25)\}$

Ejemplo 3

Considerar los conjuntos $M = \{0, 1, 2, 4\}$ y $N = \{0, 5, 8, 9, 12, 16\}$, y la relación

$R = \{(0, 0), (2, 8), (4, 16)\}$; enunciar cuál es la relación.

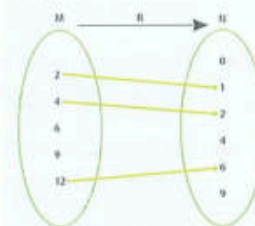
Solución

Comparamos las primeras componentes con las segundas de cada par ordenado para determinar la relación que existe entre ellas. 0 es la cuarta parte de 0, así como lo es 2 de 8, y 4 de 16. Además, verificamos que de 1 no exista su cuádruplo en el conjunto N . Verificado esto, decimos que la condición es "ser la cuarta parte".



Recuerda que...

Las relaciones también se representan mediante diagramas sagitales.



Las relaciones cumplen con propiedades:

R es **reflexiva** si para todo $a \in A$ se verifica que $(a, a) \in R$.

R es **simétrica** si para todo par ordenado $(a, b) \in R$, también el par ordenado $(b, a) \in R$.

R es **transitiva** si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.



Competencia digital

Revisa las propiedades de las relaciones en:
lynk.ec/9m24



Competencia socioemocional

En ocasiones al realizar nuestras compras, la persona que nos cobra, entrega por error una cantidad superior. Es necesario, ser honesto y devolver el efectivo en exceso.

I.M.4.3.1.

1. Escribe V (verdadero) o F (falso).

- a) Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, entonces $A \times B$ tiene $m + n$ elementos.
- b) En el producto cartesiano, el orden no importa; es decir, $A \times B = B \times A$.
- c) El dominio está formado por los primeros elementos de los pares ordenados de la relación.
- d) El producto cartesiano se puede resolver realizando un diagrama de árbol.
- e) El recorrido se obtiene del conjunto de partida.
- f) Una relación es un subconjunto del producto cartesiano.
- g) Siempre el dominio es el mismo conjunto de llegada.

2. Analiza cada uno de los siguientes ejemplos expresados por comprensión. Luego, **realiza** las actividades.

$$N = \{x / x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

$$P = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ pares, } x < 6\}$$

$$Q = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ impares, } x < 5\}$$

$$R = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 2\}$$

- b) **Determina** la cardinalidad de $N \times P$, $N \times Q$, $P \times Q$, $N \times R$.

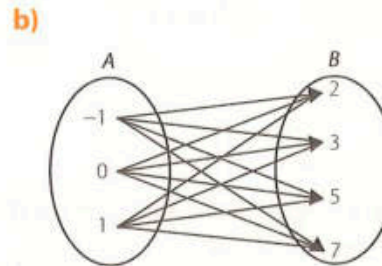
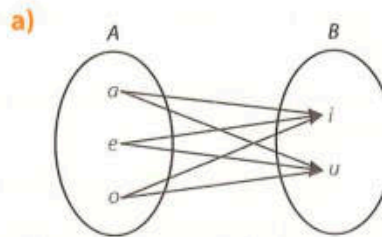
c) Determina $N \times P, N \times Q, P \times Q, N \times R$.

d) Determina $Q \times N$. Luego, compara con $N \times Q$ y escribe una conclusión.

$$Q \times N = \left\{ (1,0); (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); \right. \\ \left. (3,0); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4) \right\}$$

Conclusión:

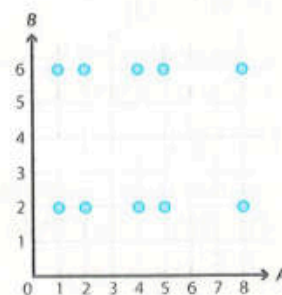
3. Escribe por comprensión los conjuntos de cada diagrama.



4. **Representa** en tu cuaderno los productos cartesianos $M \times N$ y $N \times M$ en el sistema de coordenadas, si

$$M = \{2, 4, 6\} \quad N = \{1, 3\}.$$

5. Observa la representación gráfica del producto cartesiano $A \times B$. Luego, **forma** en tu cuaderno los conjuntos A , B y $A \times B$.



6. Completa lo solicitado, si $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 5\}$

- a) Escribe el conjunto A por extensión:
- b) Escribe el conjunto B por extensión:
- c) $A \times B = \{(\quad); (\quad); (\quad); (\quad);$
 $(\quad); (\quad); (\quad); (\quad); (\quad);$
 $(\quad); (\quad); (\quad)\}$
- d) $R = \{(x, y) \in A \times B / x = y\} = \{(2, 2); (3, 3)\}$

7. **Determina** los conjuntos relación R , a partir de los siguientes conjuntos:

$$P = \{1, 2, 3, 11\} \text{ y } Q = \{6, 9, 10, 16\}$$

R_1 **determina** de Q a P que cumple la condición "ser menor que".

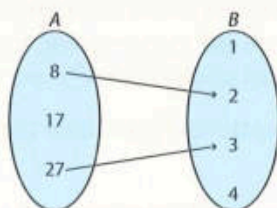
a) R_2 **define** de P a Q que cumple la condición "ser la mitad".

b) $R_3 = \{(p, q) / q = p^2\}$

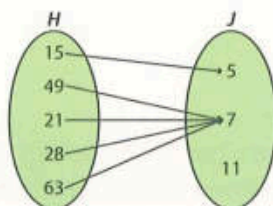
c) $R_4 = \{q, p / qp < 20\}$

8. **Escribe** en palabras una relación que represente a cada imagen.

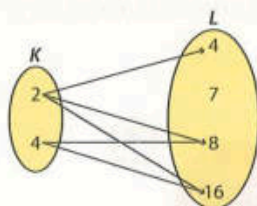
a)



b)



c)



9. Dados $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $T = \{-3, 0, 3\}$ y la relación $R = \{(x, y) \in S \times T / y = x^2 - 1\}$

a) Realiza el diagrama sagital de la relación.

b) Escribe los pares ordenados de la relación:

c) El conjunto de partida es:

d) El conjunto de llegada es:

e) El dominio es: $dom =$

f) El rango o recorrido es: $rec =$

10. Dados $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $Q = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ y la relación $R = \{(x, y) \in P \times Q / y = 2x - 3\}$

a) Escribe los elementos de R .

b) Halla el dominio de la relación.

$$dom =$$

c) Halla el recorrido de la relación.

$$rec =$$

11. **Analiza** las propiedades de las relaciones establecidas en el producto cartesiano de $A \times A$, si $A = \{1, 2, 3\}$. **Explica**:

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Reflexividad:

Simetría:

Transitividad:

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

Reflexividad:

Simetría:

Transitividad:

c) $R_3 = \{(1, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 2); (3, 3)\}$

Reflexividad:

Simetría:

Transitividad:

12. Se denomina relación de equivalencia por relación de dependencia. De acuerdo con esto, **analiza** si la siguiente relación es equivalente. **Explica**.

$$Q \times Q, \text{ si } Q = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (c, c)\}$$

Trabajo colaborativo

13. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Verifiquen si la relación R que cumple la condición "ser divisor de" es equivalente.

Actividad indagatoria

14. **Investiga** el proceso para determinar el producto cartesiano entre intervalos. **Consulta** un ejemplo y **expón** en clase.



Saberes previos

Escribe la condición que describe la relación y **anota** el conjunto por extensión.

$$R = \{(x, y) / x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \wedge x \cdot y < 0\}$$

En el tema anterior, analizamos sobre el producto cartesiano y las relaciones que se pueden establecer. En este tema veremos que algunas relaciones, si cumplen con una regla de correspondencia, se llaman funciones.

En una empresa de telefonía fija, la forma de facturación del servicio depende del número de minutos que cada cliente habla. La empresa cobra una pensión básica de \$ 6,50 y cobra el 15 % de los minutos utilizados por concepto de impuestos. ¿La expresión matemática que representa el costo del servicio define a una relación?

Llamemos y al costo que un abonado de este tipo de telefonía debe pagar y x al número de minutos.

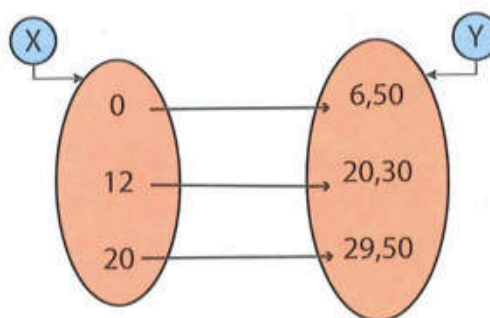
El 15 % de los minutos hablados (x) se calcula convirtiendo el porcentaje a número decimal 0,15x.

Por lo tanto, la expresión matemática es:

$$y = x + 0,15x + 6,50; y = 1,15x + 6,50$$

Si llamamos X al conjunto de partida que contiene a todos los posibles valores de los minutos (x) y Y al conjunto de llegada que contiene a todos los posibles valores del costo y , la expresión obtenida define una relación en donde tanto el conjunto de partida como el de llegada corresponden a los números reales positivos.

Su representación sagital sería:



En esta relación observamos que a un elemento del conjunto de partida le corresponde únicamente un elemento del conjunto de llegada. Cuando se observa esta correspondencia, la relación toma el nombre de **función**.

Una función se denota con las letras f, g, h , así:

$$f: X \rightarrow Y \text{ se lee "f de X en Y".}$$

Para expresar la fórmula que la define se usa $f(x)=$, lo cual se lee como: "f de x es igual a".



La facturación depende del tiempo de uso del teléfono.



¿Sabías que?

Existen dos tipos de telefonía: la fija y la móvil. La primera usa una línea telefónica con alambre de cobre o fibra óptica, en tanto que la segunda utiliza las ondas de radio.

El uso de la telefonía fija ha bajado notablemente debido a los avances tecnológicos de los teléfonos móviles y las aplicaciones de Internet.

Para la facturación de este servicio, ingenieras e ingenieros en sistemas utilizan expresiones matemáticas en sus programas.



Recuerda que...

Toda función es una relación, pero no toda relación es función.



Recuerda que...

Para determinar el dominio de una función definida por una fórmula, observamos las siguientes restricciones:

1. La división por cero no está definida. Es decir, si x está en el denominador, excluirémos los valores que convierten en cero a ese denominador.

$$\text{En } y = \frac{1}{2x-3};$$

$$2x-3 \neq 0$$

$$x \neq \frac{3}{2}$$

2. Las cantidades subradicales de radicales con índice par deben ser mayores o iguales a cero, ya que no podemos extraer la raíz de índice par de una cantidad negativa.

$$\text{En } y = \sqrt{3x+1};$$

$$3x+1 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

Estas restricciones también se consideran al determinar el recorrido.

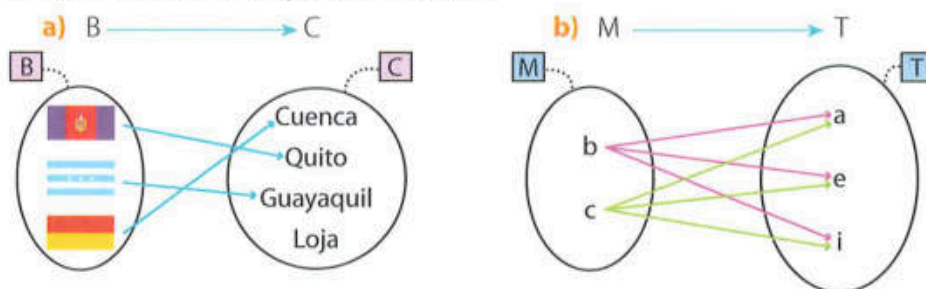


Interculturalidad

El sistema de numeración secoya, en su proceso oral, utiliza los dedos de las manos y de los pies. Para contar los números del 1 al 5, comienzan por el dedo meñique de la mano izquierda con la palma arriba.

Ejemplo 1

Identificar las relaciones que son funciones.



c) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \pm \sqrt{x}$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2$

Solución

- a) Es función porque a cada elemento de B le corresponde un elemento de C.
- b) No es función porque al elemento b del conjunto M le corresponden tres elementos de T al igual que al elemento c.
- c) No es función, pues al extraer la raíz cuadrada de un número real positivo tenemos dos respuestas: una positiva y otra negativa. Es decir, a un elemento de $\mathbb{R}^+$ le corresponden dos imágenes en $\mathbb{R}$.
- d) Sí es función; a cada número real $\mathbb{R}$ le corresponde únicamente un número real $\mathbb{R}$.

Dominio y rango de una función

El dominio de una función $f: X \rightarrow Y$ es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a f . Se simboliza $\text{Dom } f = \{x / (x, y) \in f\}$. Para que una relación sea función, a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del recorrido o rango.

El rango o recorrido de una función $f: X \rightarrow Y$ es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a f . Se simboliza $\text{Ran } f = \{y / (x, y) \in f\}$. El rango está contenido en el conjunto de llegada o codominio.

Ejemplo 2

Determinar el dominio y el rango de la función $f: \mathbb{N} < 4 \rightarrow \mathbb{N} / f(x) = x + 1$.

Solución

Estructuramos la función $f = \{(0, 1); (1, 2); (2, 3); (3, 4)\}$.

Formamos el dominio con las primeras componentes $\text{Dom } f = \{0, 1, 2, 3\}$.

El rango se estructura con las segundas componentes: $\text{Ran } f = \{1, 2, 3, 4\}$.

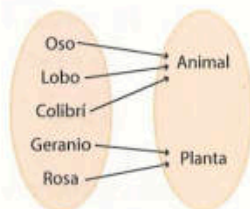
I.M.4.3.2.

1. Escribe V (verdadero) o F (falso).

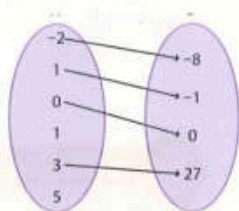
- Toda relación es una función.
- Si sobran elementos en el conjunto de salida, una relación ya no puede ser función.
- Una función es un subconjunto del producto cartesiano.
- Una función se la puede graficar en el plano cartesiano.
- Toda función es una relación.
- Si sobran elementos en el conjunto de llegada, una relación ya no puede ser función.
- Si de un elemento del conjunto de salida salen dos flechas esa relación sí puede ser función.
- Una relación es función cuando el dominio es igual al conjunto de salida y cada elemento del dominio tiene una sola imagen.
- Dos o más elementos del dominio pueden tener la misma imagen.

2. Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y **justifica** tus respuestas.

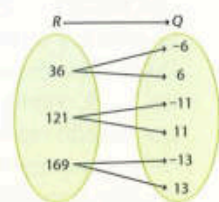
a)



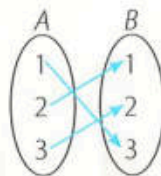
b)



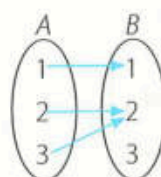
c)



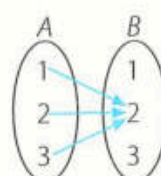
d)



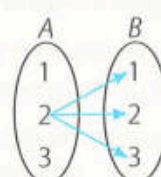
e)



f)



g)



h) $R = \{(4, 1); (5, 1); (7, 2); (7, 3)\}$

i) $R = \{(0, 4); (1, 6); (2, 9); (3, 9); (4, 12)\}$

j) R "ser el doble de", siendo $L = \{1, 2, 4, 16\}$ y $M = \{1, 2, 3, 8\}$

k) R "ser la cuarta potencia de", siendo $A = \{0, 1, 16, 81\}$ y $B = \{0, 1, 2, -2, 3, -3, 5\}$

3. Determina el dominio y el rango de cada función.

a) $f = \{(1, 3); (3, 5); (5, 7); (7, 9)\}$

b) $f = \{x / x \in \mathbb{N}, x < 12, y = 3x + 1\}$
 $f = \{(2, 7); (4, 13); (6, 19); (8, 25); (10, 31)\}$

c) $f = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ primos}, x < 19, y = x^2\}$
 $f = \{(2, 4); (3, 9); (5, 25); (7, 49); (11, 121); (13, 169); (17, 289)\}$

4. **Observa** la determinación del dominio de las siguientes funciones reales definidas por una expresión algebraica. Luego, **calcula** el dominio de las funciones propuestas.

a) $g(x) = \frac{2}{x+4}$

El denominador debe ser diferente de 0, entonces decimos que: $x+4 \neq 0 \quad x \neq -4$

Por lo tanto:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4\} \text{ o } \text{Dom } f:]-\infty; -4[\cup]-4; \infty[$$

b) $f(x) = x^2 + 3x$

No hay ninguna restricción por aplicar, por lo tanto:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \text{ o } \text{Dom } f:]-\infty; \infty[$$

c) $h(x) = \sqrt{2x-2}$

La cantidad subradical debe ser mayor o igual a 0, entonces:

$$2x-2 \geq 0$$

$$2x \geq 2$$

$$x \geq 1$$

Por lo tanto:

Calcula el dominio de las funciones.

$$\text{Dom } f = [1; \infty[$$

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$

b) $g(x) = -\frac{3}{x-7}$

c) $h(x) = \frac{2x^2}{3x+11}$

d) $f(x) = \sqrt{2x-0,5}$

e) $h(x) = \sqrt{5x+9}$

f) $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$

g) $h(x) = \frac{1}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

i) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

5. **Observa** la determinación del rango o recorrido de las funciones. Luego, **determina** el rango de las funciones propuestas.

a) $f(x) = 6x + 4$

Sustituimos $f(x)$ por y : $y = 6x + 4$

$$\text{Despejamos } x: x = \frac{y-4}{6}$$

En este caso, ninguna restricción es aplicable, por lo tanto:

$$\text{Ran } f:]-\infty; \infty[$$

b) $h(x) = \frac{2}{x-5}$

$$y = \frac{2}{x-5}$$

$$xy - 5y = 2$$

$$x = \frac{2+5y}{y}$$

El denominador no puede ser cero, entonces, $y \neq 0$.

$$\text{Por lo tanto: } \text{Ran } h = \mathbb{R} - \{0\}$$

Determina el rango de las funciones.

a) $f(x) = \frac{4}{6x+1} - 2$

b) $h(x) = 2(3x-4)$

c) $g(x) = \frac{x}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

e) $f(x) = x^2 + 1$

Trabajo colaborativo

6. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Formulen, en grupos de tres integrantes, dos relaciones en $\mathbb{Z}$, una de ellas deberá ser función. **Intercambien** con otro trío para que descubran cuál es función y **encuentren** su dominio y rango.

Actividad indagatoria

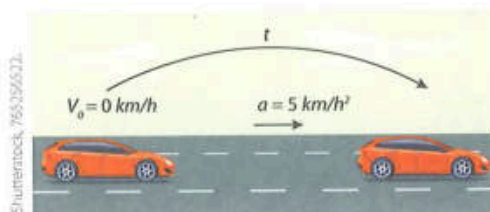
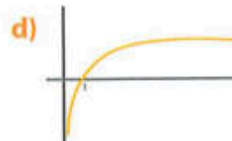
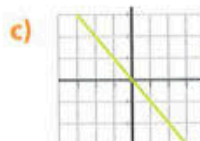
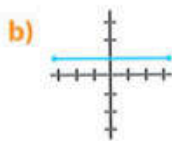
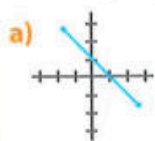
7. **Investiga** cómo determinar el dominio de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. **Expón** en clase.

Funciones crecientes, decrecientes y constantes



Desequilibrio cognitivo

Analiza: ¿qué gráfica corresponde a la función $f(x) = -x$?



El automóvil acelera 5 km/s^2 .

Un automóvil se dispone a transitar por una carretera recta. Parte del reposo e imprime una aceleración constante de 5 km/s^2 . La fórmula que modela este tipo de movimiento es $d = \frac{1}{2}at^2$. ¿Cuál es la representación gráfica de esta relación? ¿Es una relación o una función? ¿Cuál es su dominio y rango?

Competencia comunicacional

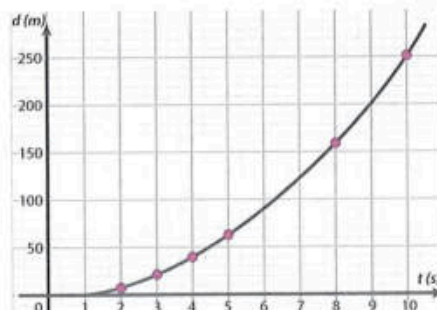
Cuando un móvil se mueve y describe una trayectoria rectilínea con una aceleración constante, el movimiento se denomina rectilíneo uniformemente variado.

Dibuja la gráfica de la aceleración vs. tiempo para este movimiento y determina si corresponde a una función.

El tiempo (t) puede ser cero o cualquier otro valor positivo dentro de los $\mathbb{R}$; por lo tanto, la distancia también podrá ser cero o cualquier valor dentro de los $\mathbb{R}^+$. Esto significa que la representación gráfica corresponderá a una línea continua.

Para definir la forma de la curva que corresponde a la función, elaboramos una tabla de valores y ubicamos los pares ordenados en un plano cartesiano. El tiempo, que es la variable independiente, se representa en el eje x y la distancia que es la variable dependiente, en el eje y .

t (s)	d (m)
1	2,5
2	10
3	22,5
4	40
5	62,5
8	160
10	250



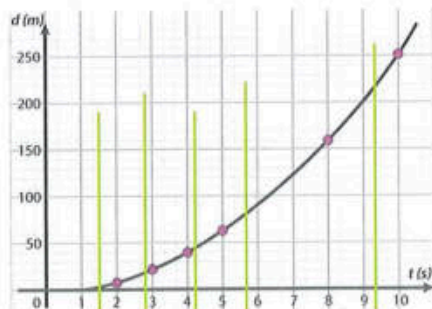
Recuerda que...

Una variable dependiente representa una cantidad cuyo valor depende de cómo se modifica la variable independiente.

Normalmente, y es la variable que se utiliza para representar la variable dependiente en una ecuación, y x es la variable independiente.

Cuando una relación es una función, al trazar líneas verticales a lo largo de todo la curva, cada recta únicamente interseca a la curva en un punto.

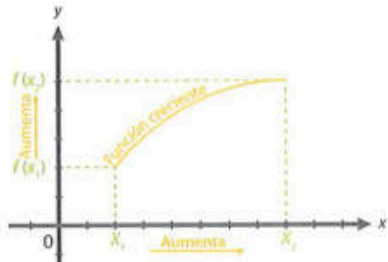
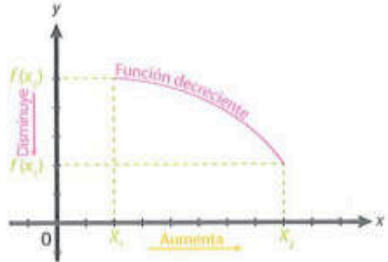
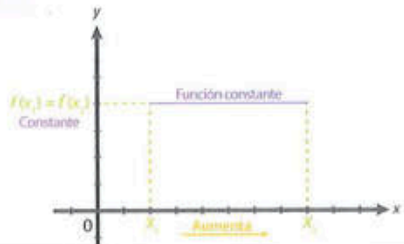
Al aplicar esta prueba de la línea vertical en la curva de nuestra situación, observamos que cada línea se interseca con la curva en un solo punto.



Por otra parte, al analizar la gráfica, en el eje de las abscisas observamos que x toma valores desde cero hasta el infinito positivo. Lo mismo sucede al analizar los valores de las ordenadas, por lo tanto:

$$\text{Dom } f: [0; \infty[\text{ y } \text{Ran } f: [0; \infty[.$$

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Función creciente	Función decreciente
Una función es creciente en un intervalo si a medida que aumenta el valor de x, aumenta el valor de y. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 	Una función es decreciente en un intervalo si a medida que aumenta el valor de x, disminuye el valor de y. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ 
Función constante	
Una función es constante en un intervalo si a medida que aumenta el valor de x, se mantiene el mismo valor en y. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ 	

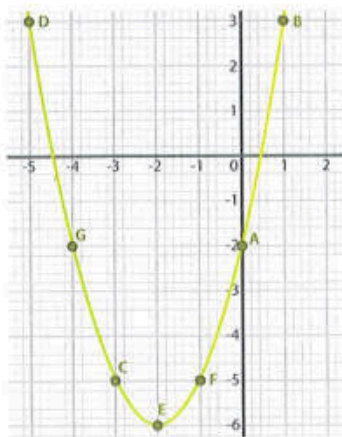
Ejemplo 1

Graficar la función $f(x) = x^2 + 4x - 2$ y analizar su monotonía.

Construimos su tabla de valores

x	-5	-4	-2	-1	0	1
y	3	-2	-6	-5	-2	3

Ubicamos los pares ordenados en el plano cartesiano y obtenemos la gráfica.



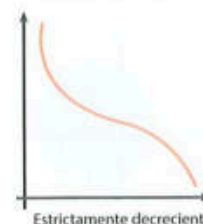
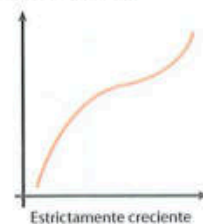
Observamos en la función que en el intervalo $]-\infty; -2]$ mientras x aumenta, y disminuye; por lo tanto, es decreciente. En tanto que en el intervalo $]-2; \infty[$ x aumenta y también lo hace y ; en consecuencia, es creciente en ese intervalo.

Como la función es creciente y decreciente no es monótona.



Recuerda que...

Una función que en todo su dominio se mantiene creciente o decreciente se denomina estrictamente creciente o estrictamente decreciente.



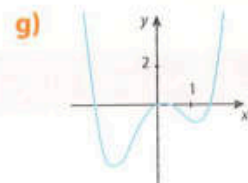
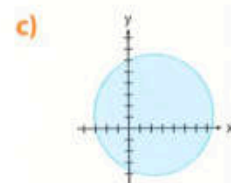
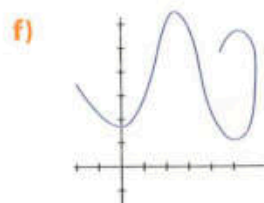
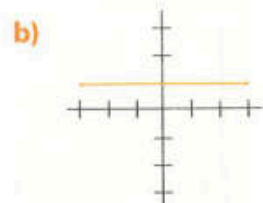
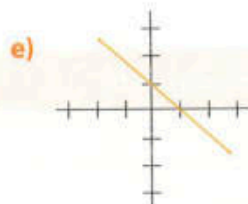
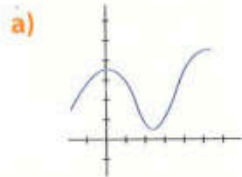
Competencia socioemocional

Si algún tema de clase no te quedó claro, pregunta a tu profesor; no te quedes con la duda.

Escribe tu criterio a partir de tus experiencias y preséntalo en clase.

I.M.4.3.2.

1. **Determina** si las siguientes gráficas corresponden a funciones.



2. **Determina** si las siguientes tablas de valores corresponden a funciones.

a)

x	1	3	1	4	5	12
y	3	5	7	9	11	9

b)

x	1	3	7	10	20	61
y	4	6	10	13	23	64

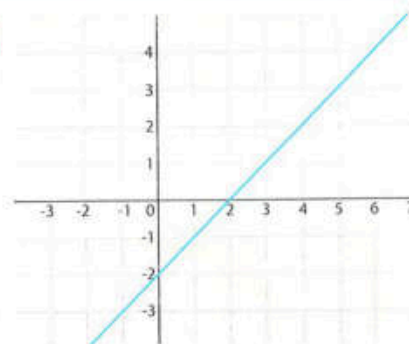
c)

x	16	1	0	16	10	14
y	-2	-1	0	2	3	14

3. **Elabora** en tu cuaderno tablas de valores y **analiza** las siguientes funciones. Luego, **determina** el dominio y rango de cada una.

a) $f(x) = x - 2$

x	y
---	---

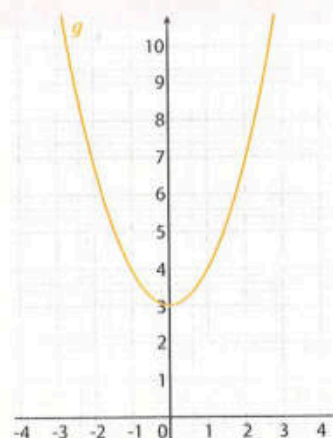


Dom f:

Ran f:

b) $f(x) = x^2 + 6$

x	y
---	---

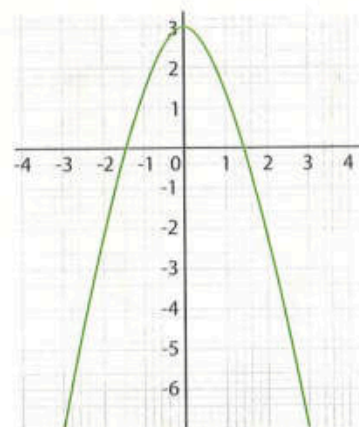


Dom f:

Ran f:

c) $f(x) = 2 - x^2$

x	y
---	---

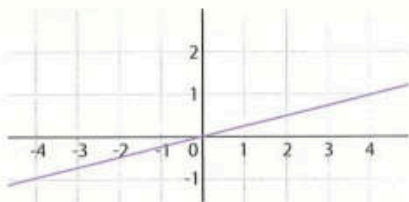


Dom f:

Ran f:

d) $f(x) = \frac{x}{4}$

x	y
---	---

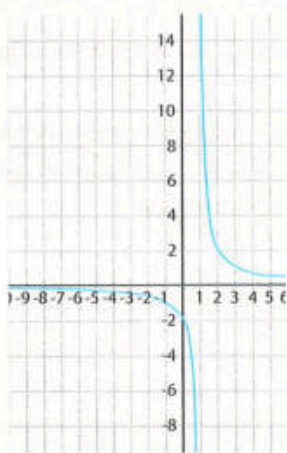


Dom f :

Ran f:

e) $f(x) = -\frac{2}{1-x}$

x	y
---	---

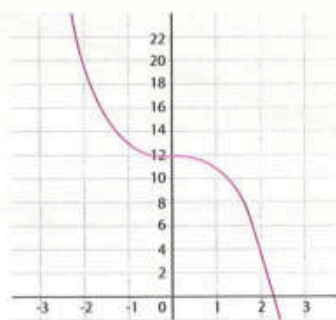


Dom f :

Ran f:

f) $h(x) = 12 - x^3$

x	y
-----	-----



Dom f:

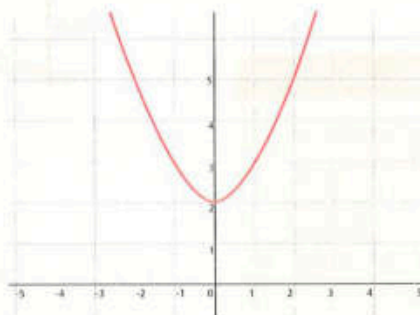
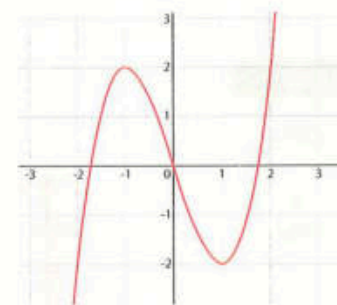
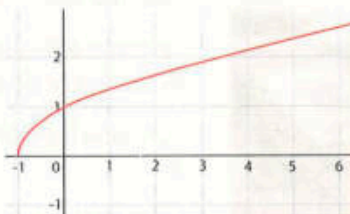
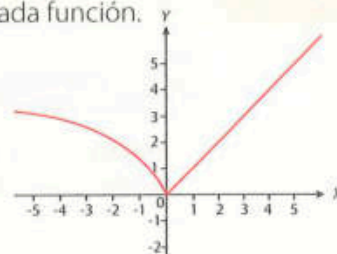
Ran f:

Trabajo colaborativo

4. Trabajen en parejas y resuelvan.

Grafiquen la función definida por la fórmula $f(x) = -x^3 - 3$, **determinen** su dominio y rango, y **analicen** su monotonía.

5. **Determina** los intervalos de crecimiento y decrecimiento y **concluye** sobre la monotonía de cada función. γ



6. Investiga cuándo una función es continua; **expón** con un ejemplo y con un contraejemplo.



Saberes previos

Grafica en tu cuaderno las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = 2x + 1$ y **establece** semejanzas y diferencias.



En una fotocopidora cobran 5 centavos por cada copia. ¿Cuál es la expresión matemática que determina el costo de cierto número de copias? ¿Es esta expresión una función? Si lo es, ¿qué tipo de función es?

La expresión que permite obtener el costo de un número desconocido de copias es $C = 0,05x$, donde C representa el costo y x el número de copias.

Sí, es una función porque a cada elemento de x le corresponderá un solo elemento de C .

Se trata de una función lineal porque la variable independiente x es de grado 1. Además, si elaboramos una tabla de valores y graficamos reemplazando C por y , obtenemos una línea recta que pasa por el origen.



Recuerda que...

Cuando dos variables son directamente proporcionales, obtenemos una línea recta.

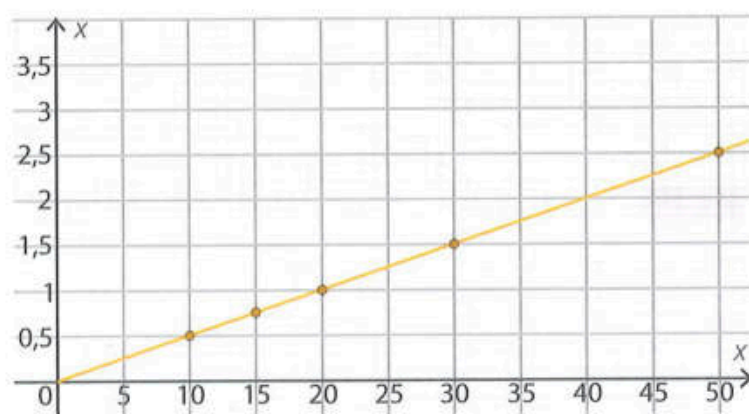
Para graficar una función lineal es suficiente determinar dos puntos de la misma.



Interculturalidad

Los quipus fueron el principal sistema de registro de información de los incas. Mediante cordeles anudados de distintos colores se registraba información contable, basada en un ordenamiento decimal que les permitía representar cantidades, desde las unidades hasta las decenas de millares.

x	10	15	20	30	50
y	0,5	0,75	1	1,5	2,5



Se denomina **función lineal** a la función cuya expresión algebraica es del tipo $y = mx$, siendo m un número cualquiera distinto de cero. Este valor m se llama pendiente.

Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen: $(0, 0)$.

La **función** es creciente si $m > 0$ y decreciente si $m < 0$.

El dominio de la función lineal son todos los $\mathbb{R}$ y su rango también son todos los $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Graficar las funciones lineales $f(x) = -3x$; $g(x) = -8x$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x$ en un mismo plano cartesiano. Luego, emitir conclusiones.

Solución

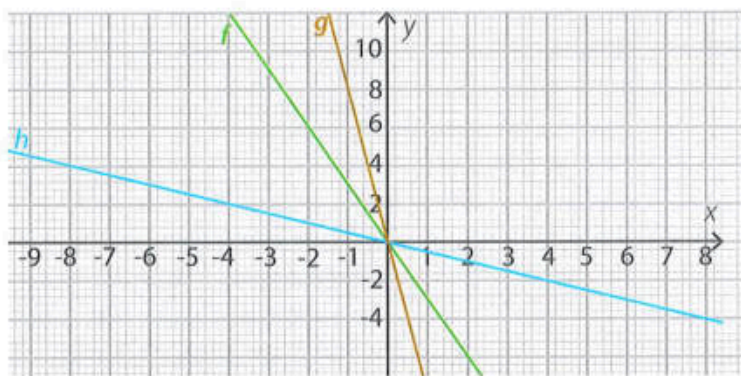
Elaboramos para cada función una tabla de valores.

$f(x) = -3x$	
x	y
-2	6
2	-6

$g(x) = -8x$	
x	y
-1	8
1	-8

$h(x) = -\frac{1}{2}x$	
x	y
-8	4
4	-2

A las tres funciones les corresponde la gráfica de una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Las tres son funciones decrecientes. Su inclinación depende del valor de la pendiente (m): mientras mayor es, más se inclina hacia la izquierda.



Función afín

Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica es del tipo $y = mx + b$, siendo m y b números distintos de 0.

Su gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas.

El valor m es la **pendiente**, el número b es la **ordenada en el origen**. La recta corta al eje y en el punto $(0, b)$.

Ejemplo 2

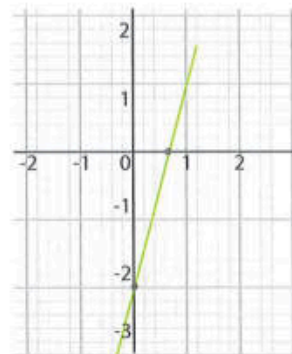
Obtener y analizar la gráfica de la función $f(x) = 3x - 2$.

Solución

Elaboramos una tabla de valores y graficamos.

$f(x) = 3x - 2$	
x	y
-2	-8
4	10

La gráfica corresponde a una función afín porque es una recta que no pasa por el origen; como la pendiente es positiva, es creciente.



Interdisciplinariedad

Matemática y Física

En el movimiento rectilíneo uniforme descrito por un móvil, la distancia recorrida (d) se relaciona con el tiempo (t) de manera proporcional y directa, por medio de la fórmula $d = v \times t$. Si es así, se coloca el que va centrado donde v representa la velocidad constante que caracteriza a este movimiento.

Esta expresión corresponde a una función lineal, donde la velocidad es el valor de la pendiente.

I.M.4.3.3.

1. Lee cada enunciado y **realiza** lo solicitado.

- a) Un grifo deja caer 20 litros de agua en un minuto. Si el caudal permanece constante, calcula cuántos litros caen en 2, 5, 10 y 20 minutos. **Elabora** en tu cuaderno una tabla, **traza** la gráfica e **indica** qué tipo de función es.

Tiempo
(minutos)

Agua (l)

- b) En un almacén de ropa promocionan el 20 % de descuento en prendas de vestir cuyo costo es \$ 35. **Determina** la expresión algebraica que modela la situación. Luego, **elabora** en tu cuaderno una tabla de valores que contenga el costo que se debe pagar por 3, 6 y 12 prendas de ese tipo. **Grafica** la función e **indica** su tipo.

La expresión es:

Número de prendas

Costo con descuento

- c) En un centro de exposiciones se dispuso que la entrada tenga un costo de \$ 2. Todos los productos que se comercializan tienen un valor de \$ 25. **Determina** una expresión que modele la función que relaciona al número de productos comprados con el costo que debe pagar una persona que visita la exposición.
- d) Por ciertos productos y servicios, en nuestro país se paga un recargo del 12 %, que representa el impuesto llamado IVA. Si un docente dicta clases por \$ 450, **responde**:
- ¿A cuánto asciende el valor al incluir el IVA?
- ¿A cuánto ascendería si el valor fuera \$ 200?
- ¿Cuál es la expresión algebraica general que corresponde al precio del trabajo del docente (x) y el valor que se paga (y)?
- e) Un kg de arroz cuesta 58 centavos. **Obtén** la función que define el costo del arroz (y) en función de los kg comprados (x). Luego,

señala su dominio, **calcula** cuánto se pagará por 2,5 kg y qué cantidad de arroz se puede comprar si se cuenta con \$ 4,35.

- f) Miriam va a comprar un teléfono móvil y está estudiando la oferta de dos compañías. La compañía A cobra \$ 0,16 de tarifa fija y \$ 0,11 por cada minuto de llamada; la compañía B cobra \$ 0,10 de tarifa fija y \$ 0,15 por minuto de llamada.

A) **Escribe** la expresión algebraica que modela las ofertas de cada compañía.

B) **Representa** gráficamente en tu cuaderno la función de costo de una llamada para cada operadora.

C) Si Miriam realiza alrededor de 90 llamadas al mes y conversa aproximadamente 290 min. ¿qué compañía debe elegir? **Justifica** tu respuesta.

- g) Un sobre de aspirinas contiene 20 tabletas y cuesta \$ 1,50.

A) **Obtén** la función que describe el número de tabletas vendidas en función de la cantidad de sobres vendidos.

B) **Determina** la función que describe el ingreso por ventas en función de los sobres vendidos.

C) **Representa** gráficamente la función ingresos por ventas del inciso anterior.

D) ¿Cuántos sobres de aspirinas deben venderse para que el ingreso sea de \$ 4 000?

2. **Clasifica** las funciones en lineales y afines.

a) $f(x) = -9x - 4$

b) $g(x) = -\frac{9}{11}x$

c) $h(x) = 5x - 2$

d) $f(x) = -0,1x + 5$

e) $g(x) = 7x - 6 + 6$

3. **Grafica** en tu cuaderno las siguientes funciones y **completa** lo requerido.

a) $f(x) = -7x$

Tipo de función: $m =$ $b =$

b) $f(x) = 4x - 5$

Tipo de función: $m =$ $b =$

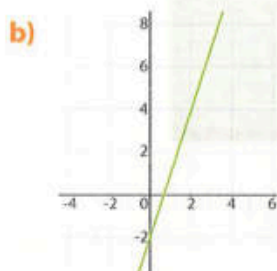
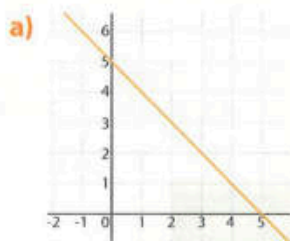
c) $f(x) = -x + 8$

Tipo de función: $m =$ $b =$

d) $f(x) = \frac{x}{4}$

Tipo de función: $m =$ $b =$

4. **Deduce** la expresión algebraica de las funciones a partir de su gráfica.



5. El costo de producción de un tamal es de \$ 0,50 y se vende a \$ 0,75. **Construye** la función que describe el beneficio que se obtiene por la venta de tamales.

- a) ¿Cuánto ganarías vendiendo 200 tamales diarios?
- b) **Grafica** la función beneficio construida.

6. El gráfico muestra los beneficios que obtiene un banco a través de dos tipos de hipotecas con intereses diferentes, en función de su duración en años (variable x).



- a) ¿Qué hipoteca selecciona el banquero si un cliente la desea por menos de 3 años?

- b) ¿Cuál escoge si solicita una hipoteca con 5 años de duración?

7. **Halla** la expresión algebraica de las funciones lineales o afines de acuerdo con las condiciones indicadas.

- a) Pasa por los puntos $P_1(-1; -5)$ y $P_2(2; 1)$.

- b) Pasa por el origen y el punto $P(-3; 1)$.

8. **Determina**, sin hacer la gráfica, si los puntos $P_1(-2; 10)$, $P_2(2; 2)$, $P_3(1; -4)$, $P_4(0; 6)$ son parte de la recta que corresponde a la función $f(x) = -2x + 6$.

9. **Señala**, sin hacer las gráficas, qué grupo de rectas son paralelas.

a) $f(x) = -5x$
 $g(x) = 5x + 3$
 $h(x) = -5x + 4$

b) $f(x) = 2x - 3$
 $g(x) = 2x$
 $h(x) = -6 + 2x$

Trabajo colaborativo

10. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Formulen las expresiones algebraicas de tres rectas que sean paralelas. **Comprueben** si cumplen la condición con la graficación.

Actividad indagatoria

11. **Investiga** cómo calcular la pendiente de una recta si se conocen dos puntos **Ejemplifica** y **expón** en clase.



Desequilibrio cognitivo

Define los siguientes conceptos: experimento aleatorio, espacio muestral, evento.



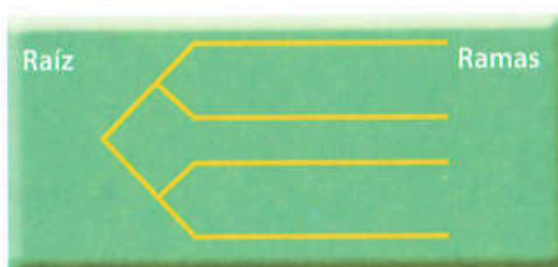
La biblioteca debe ser un lugar de mucha organización.

Existen muchas técnicas de conteo; entre ellas, podemos mencionar al diagrama de árbol, las combinaciones y permutaciones, que son procedimientos matemáticos que permiten determinar el total de resultados posibles en un evento o experimento. Por tanto, es necesario determinar la técnica apropiada a emplear, dependiendo del tipo de investigación y las condiciones para una correcta toma de decisiones.

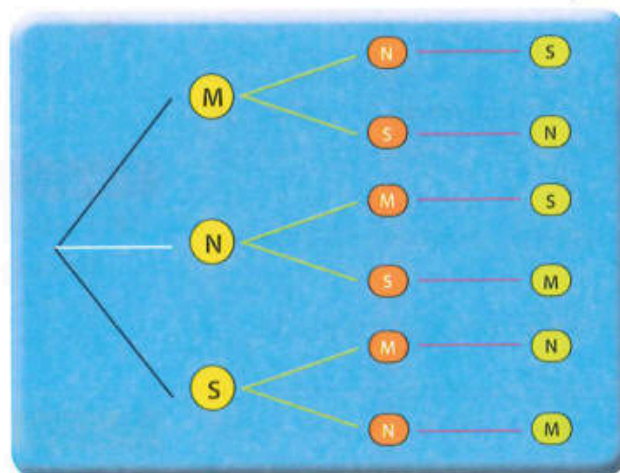
Luisa debe acomodar tres libros en un mostrador; uno de matemática, otro de ciencias naturales y un tercero de estudios sociales. ¿De cuántas formas los puede acomodar?

Para solucionar esta situación problemática, vamos a utilizar el denominado diagrama de árbol; pero antes, definámoslo.

Un diagrama de árbol es una ordenación usada para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de eventos, donde cada evento puede ocurrir en un número finito de veces.



Elaboremos el diagrama de árbol apropiado para nuestro problema. Consideremos las siglas: M para matemática, N para ciencias naturales y S para ciencias sociales.



La observación del diagrama nos permite concluir que son seis las distintas formas como Luisa podría acomodar los tres textos.



Competencia matemática

En estadística también se usa el concepto de diagrama de árbol para un conjunto de datos recopilados.

El valor mayor común de los datos se utiliza como tallo y el siguiente valor mayor de posición común se usa para formar las hojas.

15, 16, 21, 23, 26, 26, 30, 32, 41

Tallo	Hoja
1	5 6
2	1 3 3 6 6
3	0 2
4	1

Indaga y resume en el cuaderno los pasos para confeccionar un diagrama de árbol.

Probabilidad de eventos compuestos

Los eventos o sucesos compuestos son probabilidades de dos o más situaciones que pasan al mismo tiempo.

Ejemplo 1

¿Cuál es la probabilidad de que una persona gane en un sorteo un viaje de por lo menos 2 días en una de las regiones de clima cálido? Las opciones de viaje se muestran en el siguiente modelo de área.

	1 día	2 días	3 días
Costa (C)	1C	2C	3C
Sierra (S)	1S	2S	3S
Oriente (O)	1O	2O	3O

Solución

Llamaremos P a la probabilidad. Los casos posibles son 9 y los favorables son 4: 2C, 2O, 3C y 3O. Por lo tanto, la probabilidad aplicando la regla de Laplace es: $P = \frac{4}{9}$

Los sucesos compuestos pueden ser de los siguientes tipos:

Independientes: cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia de otro, bien sea porque el espacio muestral regresa a ser el mismo o porque son espacios muestrales diferentes. En este caso: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Incompatibles: cuando no tienen sucesos elementales comunes. La probabilidad se calcula con la fórmula: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

Compatibles: cuando tienen sucesos elementales comunes. La probabilidad es igual a: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$.

Ejemplo 2

Clasificar los siguientes sucesos compuestos en independientes, incompatibles y compatibles.

- Lanzar un dado y obtener un múltiplo de 3 o un divisor de 10.
- Lanzar una moneda dos veces y obtener en las dos ocasiones cara.
- Extraer de un naipe de 52 cartas un as o una carta de diamante.

Solución

- Los sucesos elementales para el suceso A son 3 y 6 y los sucesos elementales del suceso B son 1, 2 y 5. No hay sucesos elementales comunes; por lo tanto, son incompatibles.
- El primer lanzamiento no incide en el segundo lanzamiento, por lo tanto, son sucesos independientes.
- Estos dos sucesos tienen un suceso en común, extraer un as o una carta de diamante; por lo tanto, son sucesos compatibles.



Recuerda que...

- Dos eventos son **dependientes** si el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento. Ejemplos de estos sucesos son aquellos en los que, después de extraer canicas, bolas o cartas, estas no son devueltas al grupo del que se extrajeron. La probabilidad de estos sucesos es igual al producto de las probabilidades de los eventos individuales, tomando en cuenta que el número de elementos del espacio muestral disminuye.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

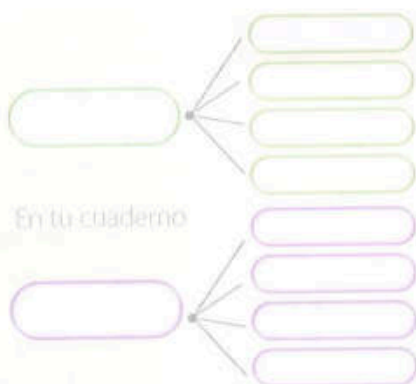
- La probabilidad puede ser expresada en forma porcentual; para ello, se multiplica su valor por 100.

$$P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 16,67 \%$$

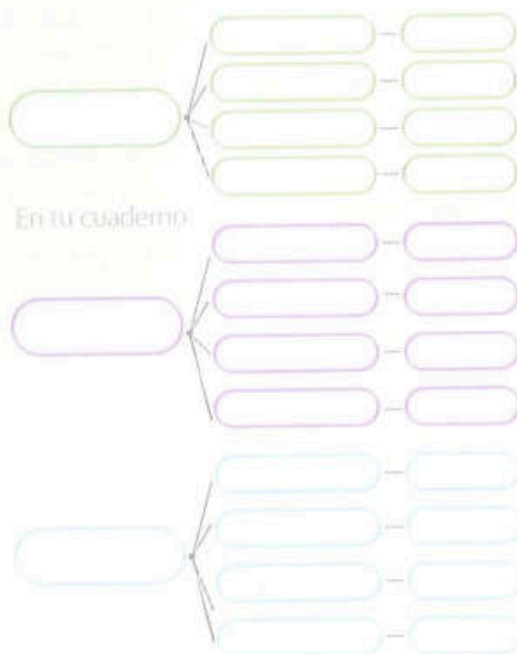
I.M.4.8.2.

1. **Completa** en tu cuaderno diagramas de árbol para resolver cada situación.

- a) Johanna empieza una rutina de actividad física. Decide que durante los días laborables trotará o hará bicicleta los 5 días, en tanto que los fines de semana jugará fútbol, básquet, vóley o tenis los 2 días. ¿De cuántas maneras puede cumplir con su rutina semanal?



- b) Fabián está armando un folleto con información ecológica. Tiene la posibilidad de colocar pastas de color verde, amarillo y tomate. El espiral puede ser blanco o negro y para la primera página tiene dos carátulas, una con animales y otra con plantas exóticas. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que puede realizar?



2. Se lanza un dado al aire. **Determina** las siguientes probabilidades.

- Que salga dos.
- Que salga cinco.
- Que salga un número par.
- Que salga un número impar.
- Que salga siete.
- Que salga dos o cuatro.

3. **Escribe** verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

- La probabilidad de sacar una canica roja de una funda que contiene cinco canicas rojas es del 20 %.
- La probabilidad de que una pareja tenga dos hijos del mismo género es $\frac{1}{4}$.
- La probabilidad de sacar una canica azul de una funda que contiene cuatro canicas azules y una roja es $\frac{4}{5}$.
- La probabilidad de que al lanzar una moneda salga cruz es del 50 %.

4. **Usa** el modelo de área para **ilustrar** los diferentes resultados posibles en cada caso y **responde**.

- a) **Escoger** dos prendas de un clóset, una falda si se cuenta con cuatro de ellas (negra, roja, blanca y café) y una blusa si se tiene blanca, beige y negra.

Faldas

	Negra	Roja	Blanca	Café
Blanca	FN-BBa	FR-BBa	FB-BBa	FC-BBa
Beige	FN-BBe	FR-BBe	FB-BBe	FC-BBe
Negra	FN-BN	FR-BN	FB-BN	FC-BN

¿Cuál es la probabilidad de escoger las dos prendas del mismo color?

- b) **Sacar** cierta carta del naípe y lanzar un dado.

	Trébol	Diamantes	Picas	Corazones

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par y una baraja roja?

¿Cuál es la probabilidad de sacar un trébol y un número menor a 5?

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar y una pica?

¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta negra y el único número primo par?

5. **Problema-decisión.** Analiza la siguiente situación. Luego, **decide** y **encierra** la respuesta correcta.

Mauricio juega cartas en solitario. Toma las 10 primeras cartas de un naípe, y las coloca boca abajo después de barajar en desorden. Él debe escoger una carta al azar y voltearla. Si la carta que obtiene es mayor a 5, debe colocarla sobre su costado derecho, donde estarán las cartas ganadoras, y si es menor que 5, la colocará a su izquierda, donde estará el grupo de cartas perdedoras. Gana el juego si logra formar un grupo de 3 cartas ganadoras antes de formar un grupo de 3 cartas perdedoras.

- a) Los sucesos son independientes, porque en cada ronda Mauricio obtiene, bien sea una carta ganadora, o bien perdedora.
- b) Los sucesos son independientes, porque el juego no elimina a ninguno de los posibles resultados.
- c) Los eventos son dependientes, porque un resultado es eliminado en cada turno y no es reemplazado.

6. **Analiza** el cálculo de la probabilidad y **resuelve**.

- a) Rosana tiene 8 pares de calcetines: 1 negro, 2 rosados, 3 blancos, 1 verde, 1 azul. Ella desea ponerse calcetines blancos al tiempo que se propone tomar aquellos que saque en el tercer intento. Si los calcetines en el primero y segundo intento no son blancos, los devolverá al cajón. ¿Cuál es la probabilidad de que en el tercer intento obtenga calcetines blancos?

- b) Felipe tiene un paquete de 18 cartas enumeradas del 1 al 18. Toma una carta al azar, observa el número y las revuelve de nuevo en el paquete. ¿Cuál es la probabilidad de que no le salga una carta menor o igual a 6 en el primer intento y que le salga una carta menor o igual a 6 en el segundo intento?

- c) Obtenemos un múltiplo de 3 o un número par al lanzar un dado.

- d) Obtenemos un número impar o un número par mayor que 3 al lanzar un dado.

- e) Rafael tiene en su billetera 3 billetes de \$ 10 y 7 billetes \$ 5, y Oscar tiene en su billetera 4 billetes de \$ 10 y 4 billetes de \$ 5. Si cada uno saca al mismo tiempo y al azar un billete, ¿cuál es la probabilidad de que obtengan juntos \$ 15?

7. **Escribe** la probabilidad mediante una fracción.

- a) La probabilidad de abrir en la página 20 un libro que tiene 100 páginas.
- b) La probabilidad de abrir en una página impar un libro de 80 páginas.
- c) La probabilidad de sacar 50 puntos en una prueba de 100 preguntas.

8. **Calcula** las siguientes probabilidades cuando se lanzan al aire dos dados.

- a) La suma de las puntuaciones sea 10.
- b) El producto de sus puntuaciones sea mayor que 8.

Trabajo colaborativo

9. **Trabajen** en parejas y **resuelvan**.

Con el siguiente grupo de datos, **elaboren** un diagrama de árbol.

Edades de un grupo de padres: 38, 42, 37, 41, 52, 48, 39, 35, 50, 43, 55, 36, 44, 51, 34, 33, 40, 49, 32.

Actividad indagatoria

10. **Investiga** con qué operaciones de conjuntos se relaciona la probabilidad de conjuntos independientes y compatibles. **Demuestra** su uso en clase con un ejemplo.

Variaciones, combinaciones y permutaciones



Saberes previos

¿Cuáles son los números que puedes formar con los números 3, 6 y 9 sin repetir cifras?



En el concurso de declamación de una institución educativa se han presentado 12 participantes, de los cuales tres serán premiados, uno será el ganador, otro ocupará el segundo lugar y se acreditará el tercer lugar. ¿De cuántas maneras se puede formar ese cuadro de premiados?

Observamos que existe un conjunto de participantes, conformado por 12 elementos; de ellos solo tres serán seleccionados para ser premiados con cierto orden, de acuerdo con su desenvolvimiento. Las características de esta situación corresponden a una variación ordinaria; por lo tanto, definamos este parámetro matemático.

Se denominan **variaciones ordinarias** de m elementos tomados de n en ($m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos, en donde se cumple que: no entran todos los elementos, importa el orden y no hay repetición de elementos. Para calcularlas usamos la fórmula:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Apliquemos la fórmula a nuestra situación

$$V_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$$

El cuadro de premiados puede formarse de 1 320 distintas formas.

Ejemplo 1

¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los dígitos: 0, 1, 3, 5, 7 y 9?

Solución

De los seis elementos con los que se dispone, debemos tomar tres. Importa el orden y las cifras deben ser distintas, por lo tanto, se trata de una variación. Sin embargo, como ningún número empieza con cero, tenemos que separar el número en dos bloques: el primer bloque lo pueden ocupar solo 1, 3, 5, 7 y 9. Ahí tenemos una variación donde $m = 5$ y $n = 1$.

El segundo bloque, de dos números, lo puede ocupar cualquier dígito, menos el inicial, resultando una variación, en la que $m = 5$ y $n = 2$.

La variación total se calcula como el producto de las dos variaciones:

$$V = V_5^1 \cdot V_5^2 = \frac{5!}{(5-1)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4!}{4!} \cdot \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 20 = 100$$

Existen otras formas de disponer los elementos de un conjunto.



Recuerda que...

El factorial de un número es el producto de los " n " factores consecutivos desde " n " hasta 1. El **factorial de un número** se denota por **$n!$**

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$0! = 1$$

M.4.3.10. Aplicar métodos de conteo (combinaciones y permutaciones) en el cálculo de probabilidades.
M.4.3.11. Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.

Permutaciones

Son variaciones en las que todos los elementos son tomados en cuenta, importa el orden y no se repiten los elementos. Se las calcula con la fórmula: $P_n = n!$

Ejemplo 2

¿Cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden formar con 1, 2, 3, 4 y 5?

Solución

Todos los elementos serán considerados para formar los números solicitados. El orden cuenta y, al decirnos cifras diferentes, se nos indica que no se deben repetir las cifras. Por lo tanto, se trata de una permutación.

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Ejemplo 3

Con las letras de la palabra *brinco*, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

Solución

La palabra que debe formarse empezará por *i* u *o* seguida de las 5 letras restantes tomadas de 5 en 5. En este caso, calculamos una permutación para las vocales y otra para las 5 letras restantes. El resultado final será el producto de las 2 permutaciones.

$$P = P_2 \cdot P_5 = 2! \times 5! = (2 \times 1) \cdot (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 240$$

Combinaciones: se llaman combinaciones de m elementos tomados de n en n ($m \geq n$) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos, de forma que: no entran todos los elementos, no importa el orden y no se repiten los elementos. Las combinaciones se calculan con la fórmula:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo 4

A una reunión asisten 20 personas que intercambian saludos entre ellas. ¿Cuántos saludos se realizaron?

Solución

Están presentes 20 personas, pero los saludos se hacen de dos en dos, no importa quién saluda primero y una misma persona no se puede saludar a sí misma. Entonces, se trata de una combinación. Al aplicar la fórmula, obtenemos:

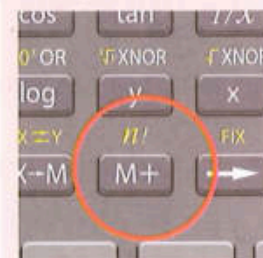
$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{2 \times 1 \times 18!} = 10 \times 19 = 190$$

Se realizaron 190 saludos.



¿Sabías que?

Puedes calcular el factorial de un número en la calculadora.



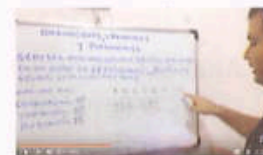
Shutterstock, 706641844



Competencia digital

Amplía tu conocimiento en sobre permutaciones, para esto puedes utilizar el siguiente enlace:

lynk.ec/9m25



Interdisciplinariedad

Matemática y Tecnología

Las combinaciones se utilizan en las contraseñas que se utilizan en correos electrónicos, cuentas bancarias y otros sitios. Estas deben tener una combinación de letras, números y símbolos que hacen difícil que alguien pueda descifrarlas.

LM.4.8.2.

1. **Escribe** frente a cada enunciado una V si es verdadero o una F si es falso.

- En una variación se toman en cuenta todos los elementos.
- En una combinación no importa el orden.
- En una permutación se consideran todos los elementos.
- En una combinación entran todos los elementos.

2. **Lee** cada enunciado y **selecciona** la semejanza correcta.

a) La semejanza entre variación y combinación:

- No importa el orden
- Se consideran todos los elementos
- No entran todos los elementos
- Importa el orden

b) La semejanza entre variación y permutación:

- Importa el orden
- No importa el orden
- Entran todos los elementos
- No entran todos los elementos

3. **Analiza** cada situación. Luego, **identificala** como varianza, permutación o combinación. **Justifica** tu respuesta.

- a) ¿De cuántas formas pueden sentarse 6 personas en los últimos 6 asientos de un bus?
- b) En un salón de clase de 30 estudiantes se va a formar una comisión de 4 estudiantes. ¿De cuántas formas se puede formar esa comisión?
- c) ¿Cuántos números distintos de 3 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 4, 8 y 9?
- d) En un barrio se va a elegir el comité promotoras, que estará conformado por presidente, vicepresidente, secretario, prosecretario y dos vocales. ¿De cuántas formas puede constituirse dicho comité?

e) ¿De cuántas maneras pueden llegar en los tres primeros lugares veinte autos en una carrera de grand prix?

f) En una tienda hay cinco pelotas de distintos colores. Si queremos comprar tres pelotas diferentes, ¿cuántas combinaciones podemos formar?

g) Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

4. **Calcula**, sin usar la calculadora, el factorial indicado.

- a) $3! =$
- b) $5! =$
- c) $7! =$
- d) $8! =$
- e) $(20 - 16)! =$
- f) $(10 - 4)! =$

5. **Obtén** el resultado sin usar la calculadora.

- a) $\frac{6!}{2!} =$
- b) $\frac{20!}{18!} =$
- c) $\frac{12!}{(20 - 12)!} =$
- d) $\frac{10!}{4!(9 - 2)!} =$
- e) $3! \cdot 2! =$
- f) $4! \cdot (2! - 2!) =$

6. **Encuentra** el resultado usando la calculadora.

- a) $9! =$
- b) $11! =$
- c) $\frac{20!}{15!} =$
- d) $\frac{9!}{(23 - 19)!} =$

$$e) \frac{11!}{10!(45-44)!} =$$

$$f) \frac{8!}{4! \cdot 2!} =$$

$$g) \frac{6! \cdot 3!}{9! \cdot 2!} =$$

$$h) \frac{5! \cdot (4! - 3!)}{4!} =$$

7. Halla el resultado de las siguientes expresiones.

$$a) \frac{6!}{2!}$$

$$b) \frac{9!}{5!}$$

$$c) \frac{10!}{(12-3)!}$$

$$d) \frac{(15-9)!}{(6-2)!}$$

$$e) \binom{8}{4}$$

$$f) C_5^{-10}$$

8. Resuelve los siguientes problemas.

- ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 8 personas en una fila de butacas?
- ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 10 personas en una fila de butacas si una de ellas siempre estará al final de la fila?
- ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
- ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol, tomando en cuenta que el arquero no puede ocupar otra posición distinta que el arco?
- ¿Cuántas claves de acceso a un sistema de computación será posible diseñar si debe estar formada de 5 letras, seguidas de 2 dígitos? Las letras y los dígitos no pueden repetirse. Considerar 26 letras y los números del 0 al 9.

f) En la mesa directiva de un colegio se han dispuesto 8 puestos para las autoridades. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar si la rectora y el secretario abogado siempre van juntos?

g) En un centro comercial hay 5 tiendas de ventas de celular, pero solo se visitarán 3 de ellas para revisar precios. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar las 3 tiendas que se visitarán?

h) En un grupo, compuesto por 5 hombres y 7 mujeres, deciden formar un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas se puede formar si:

- Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.
- Una mujer fue ya seleccionada para pertenecer al comité.
- Dos hombres seleccionados no pueden estar en el comité.

i) ¿De cuántas formas pueden sentarse 6 personas en los últimos 6 asientos de un bus?

j) ¿Cuántos números distintos de 3 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 4, 8 y 9?

k) ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

l) **Determina** de cuántas maneras pueden llegar en los tres primeros lugares 10 competidores en una carrera de 100 metros planos.

9. **Problema-decisión.** En un salón de clase de 30 estudiantes se va a formar una comisión de 4 estudiantes. ¿De cuántas formas se puede formar esa comisión?

Si tuvieras que elegir entre una cantidad par o una impar de estudiantes para formar la comisión, ¿qué decisión tomarías? **Justifica.**

Trabajo colaborativo

10. **Trabajen** en parejas y **resuelvan.**

Con la guía del docente, **organicen** la consulta de situaciones que correspondan a variaciones, permutaciones y combinaciones. **Repártanlas** indistintamente entre sí para que identifiquen a qué corresponden.

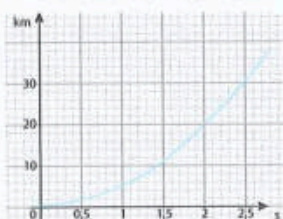
Actividad indagatoria

11. **Investiga** en qué consiste una permutación con repetición. **Explica** con un ejemplo sus características y la manera de calcularla.

Estrategias: extrapolar un gráfico

Problema resuelto

La gráfica muestra la relación que existe entre la distancia recorrida por un objeto que es arrojado desde cierta altura y que cae por efecto de la gravedad con el tiempo que transcurre. **Halla** la distancia recorrida a los 3,5 segundos.



1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Qué magnitudes se relacionan en el gráfico?

Magnitud independiente: tiempo.

Magnitud dependiente: distancia.

¿A qué tipo de función corresponde el gráfico?

Es una función de grado 2.

2. Plantear la estrategia

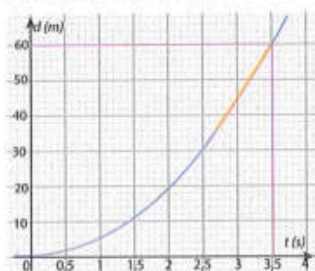
¿Cuál es la estrategia de solución?

El tiempo solicitado no se muestra en la gráfica, por lo que hay que extender los ejes y la curva. A esta acción se la conoce como interpolación.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Extendemos la curva, conservando la forma; levantamos una recta perpendicular al eje horizontal desde 3,5 segundos hasta que se interseque con la curva prolongada y desde allí trazamos una perpendicular al eje vertical. Tomamos el dato que corresponde según la escala.



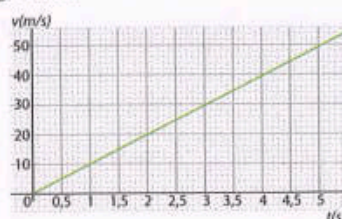
4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La distancia es 60 m.

Problema resuelto

La gráfica muestra la relación que existe entre la rapidez (v) que adquiere un objeto que es arrojado de cierta altura con el tiempo que transcurre. **Determina** la rapidez a los 10 segundos haciendo uso del gráfico.



1. Comprender el problema

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Qué magnitudes se relacionan en el gráfico?

Magnitud independiente: tiempo.

Magnitud dependiente: rapidez.

¿A qué tipo de función corresponde el gráfico?

Función lineal

2. Plantear la estrategia

¿Cuál es la estrategia de solución?

Extrapolamos el gráfico.

3. Aplicar la estrategia

¿Cómo se aplica la estrategia?

Extendemos la recta; levantamos una recta perpendicular al eje horizontal desde 10 segundos hasta que se interseque con la recta prolongada, y desde allí trazamos una perpendicular al eje vertical. Tomamos el dato que corresponde según la escala.



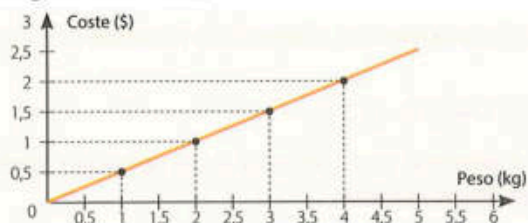
4. Responder

¿Llegaste a la solución del problema?

La rapidez es 100 m/s.

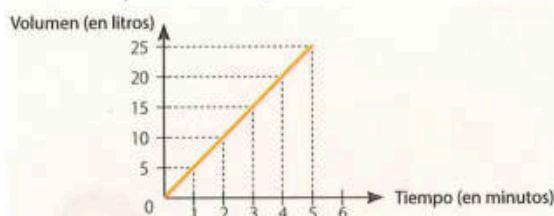
Problemas propuestos

1. La gráfica muestra la relación que existe entre el peso de manzanas y su costo. **Halla** el costo de 5,5 kg de manzanas.



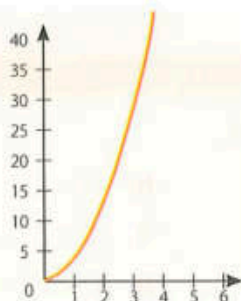
- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

2. El gráfico muestra el tiempo que demora llenar un recipiente. **Halla** el tiempo que tarda para llenar un recipiente de 22,5 litros.



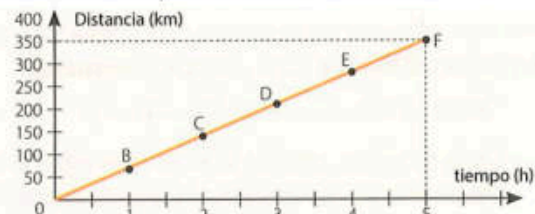
- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

3. El gráfico muestra la relación entre el área de un círculo y su radio. ¿Cuál es el área aproximada para un círculo de radio 3 unidades?



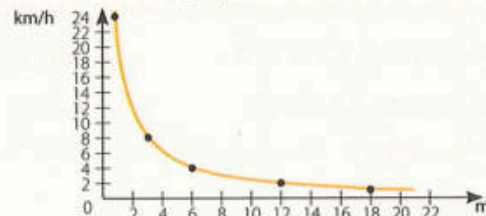
- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

4. Gina grafica la relación que existe entre la distancia que recorre y el tiempo que se demora. ¿Cuál es la distancia que recorrería en 8 horas?



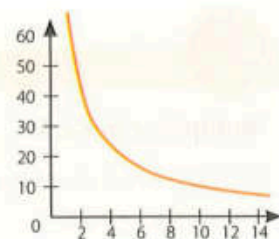
- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

5. Un ciclista se entrena para una competencia y realiza un gráfico de su avance. Si debe llegar a su meta en 3 horas, ¿a qué velocidad tendría que ir?



- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

6. El gráfico muestra el tiempo que demoran autos de diferentes modelos en recorrer una distancia de 100 m viajando a una velocidad uniforme en m/s. ¿Qué tiempo demora un auto en recorrer los 100 m si se desliza a una velocidad de 2 m/s?



- Comprender el problema.
- Plantear la estrategia.
- Aplicar la estrategia.
- Responder.

Operadores matemáticos

Son símbolos que representan una operación matemática. Toda operación matemática presenta una regla de definición. **Observa** cada ejemplo y **resuelve**.

1. Siendo $a \% b = a + ab + b$ y $a \Delta b = a^2 + ab - b^2$, calcular $(3 \% 6) \% (5 \Delta 4)$

Desarrollamos, por un lado, el operador $\%$ del primer paréntesis y el operador Δ del segundo paréntesis. Desarrollamos el operador $\%$ que se encuentra entre los dos paréntesis.

$$\begin{aligned} 3 \% 6 &= 3 + 3(6) + 6 \\ &= 3 + 18 + 6 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \Delta 4 &= 5^2 + 5 \times 4 - 4^2 \\ 5 \Delta 4 &= 25 + 20 - 16 \\ 5 \Delta 4 &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 \% 29 &= 27 + 27(29) + 29 \\ 27 \% 29 &= 27 + 783 + 29 \\ 27 \% 29 &= 839 \end{aligned}$$

2. Si $a * b = ab \square (a + b)$ y $a \square b = 2a + b$, determinar $2 * 5$.

Desarrollamos primero $2 * 5$ aplicando la primera condición. Luego utilizamos la segunda condición para el segundo miembro de la ecuación y finalmente concluimos:

$$2 * 5 = 2 \times 5 \square (2 + 5)$$

$$10 \square 7 = 2 \times 10 + 7 = 27$$

Por lo tanto, $2 * 5 = 27$

$$2 * 3 = 10 \square 7$$

Ahora determinar:

1.

2.



Cálculo mental

Multiplicar por 2,5.

Multiplicamos el número por 2 y le sumamos su mitad.

$$36 \times 2,5 = 36 \times 2 + 36 + 2 = 72 + 18 = 90$$

Ahora, hazlo tú.

a) $22 \times 2,5 =$

b) $63 \times 2,5 =$

c) $28 \times 2,5 =$

d) $46 \times 2,5 =$

e) $88 \times 2,5 =$

f) $74 \times 2,5 =$

g) $38 \times 2,5 =$

h) $37 \times 2,5 =$

i) $62 \times 2,5 =$

j) $92 \times 2,5 =$

k) $16 \times 2,5 =$

l) $23 \times 2,5 =$

m) $45 \times 2,5 =$

n) $66 \times 2,5 =$

o) $18 \times 2,5 =$

p) $78 \times 2,5 =$

q) $94 \times 2,5 =$

r) $82 \times 2,5 =$

s) $54 \times 2,5 =$

t) $44 \times 2,5 =$

El ahorro de la energía es nuestra responsabilidad

Áreas asociadas al proyecto: Matemáticas y Ciencias Naturales

Justificación / problemática

Todos conocemos del deterioro del medioambiente, pero no basta con conocerlo. Es importante ser conscientes para actuar con responsabilidad. Entre nuestros actos responsables deben estar el practicar y enseñar cultura ambiental. De esa manera, garantizamos nuestro futuro y el de las nuevas generaciones.

Ahorrar energía es la clave, pues cuando disminuimos el consumo de energía eléctrica, estamos evitando la emisión de gases de efecto invernadero. Cuando en casa ahorramos agua en la limpieza y el uso del inodoro, estamos contribuyendo a conservar este recurso que, con el pasar del tiempo, evidenciamos que es limitado.

Una manera de notar nuestro cambio de conducta de consumo son las facturas de agua y luz eléctrica que nos entregan; estas son diseñadas por los ingenieros en sistemas haciendo uso del concepto matemático de funciones.



Objetivo

Informar recomendaciones que contribuyan a economizar el consumo del agua y de la energía eléctrica. Modelar, a través de una función, el consumo de energía eléctrica o del agua potable.

Recursos

- Imágenes
- Investigación sobre el consumo de agua y energía eléctrica
- Facturas del consumo de agua y energía eléctrica



Evaluación

1. **Realicen** una investigación sobre las recomendaciones para economizar el consumo de agua y energía eléctrica.
2. **Elaboren** carteles con las imágenes y las recomendaciones para economizar el consumo de agua y energía eléctrica, y **expónganlos** en un área exterior al aula.
3. **Estructuren** una expresión algebraica de una función que modele el consumo de la energía eléctrica o del agua potable. Para ello, **analicen** junto a su docente una de estas facturas y **extraigan** los rubros que constan en ellas. **Lleguen** a acuerdos sobre los parámetros que considerarán, de manera que obtengan una sola expresión para todos. Una vez definida la función, **realicen** su gráfico, **identifiquenla**, **determinen** su dominio y recorrido, y **analicen** su monotonía.

Tema: Tiempo de congelación

Función lineal

Situación cotidiana

Cuando un técnico desea conocer el daño que tiene una refrigeradora, la conecta y analiza la variación del tiempo y la temperatura, pues de esa manera identifica la solución al problema.

Lorenzo analiza el daño de la refrigeradora. Para esto, representa a la temperatura, en grados centígrados, con una función por un determinado tiempo, en minutos.

$$f(x) = 20 - 2x$$

¿Qué clase de función es?

¿La función es creciente o decreciente? ¿Por qué?

¿Qué representa el 20 y qué significado tiene?

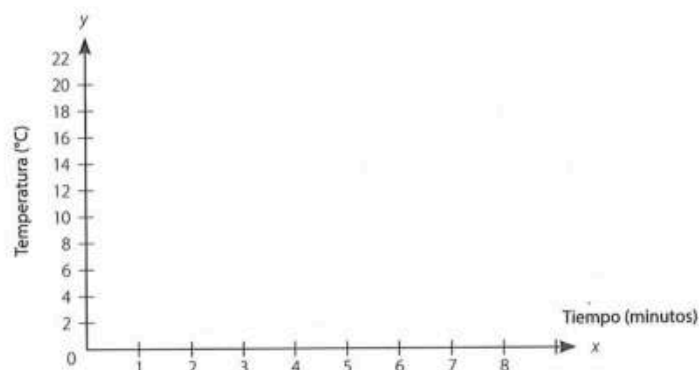
¿Qué representa el -2 y qué significado tiene?



Reflexiona

- **Completa** la tabla y **grafica** dicha función:

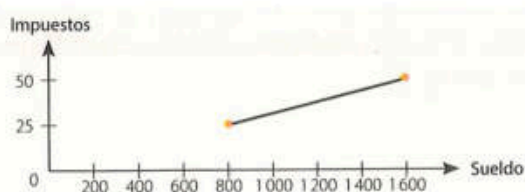
x	f(x)
1	
2	
3	
4	
5	
6	



- **Comprueba** la respuesta.
- ¿Cómo se expresaría la función si la temperatura inicial fuera 21°C y los grados disminuyen 3°C ?

Resuelve la situación

- Analiza la siguiente situación y su gráfica. Los empleados de una empresa que ganan entre 800 y 1 600 dólares, deben pagar un impuesto al SRI en función de su salario, como se muestra en el gráfico. ¿Cuánto pagaría un empleado cuyo ingreso es de \$1 000 mensuales?



Tema: El mejor menú

Diagrama de árbol - probabilidad

Situación cotidiana

En general, cuando vamos a un restaurante tenemos muchas opciones para escoger el menú que vamos a comer. En un restaurante puede haber muchísimas combinaciones. ¿Te atreves a calcular el número de combinaciones del próximo restaurante que visites?

Por la graduación de su hija, la familia Rodas va a un restaurante y le muestran el menú para que puedan elegir. ¿Cuáles son las combinaciones para poder elegir entrada, plato fuerte y postre?

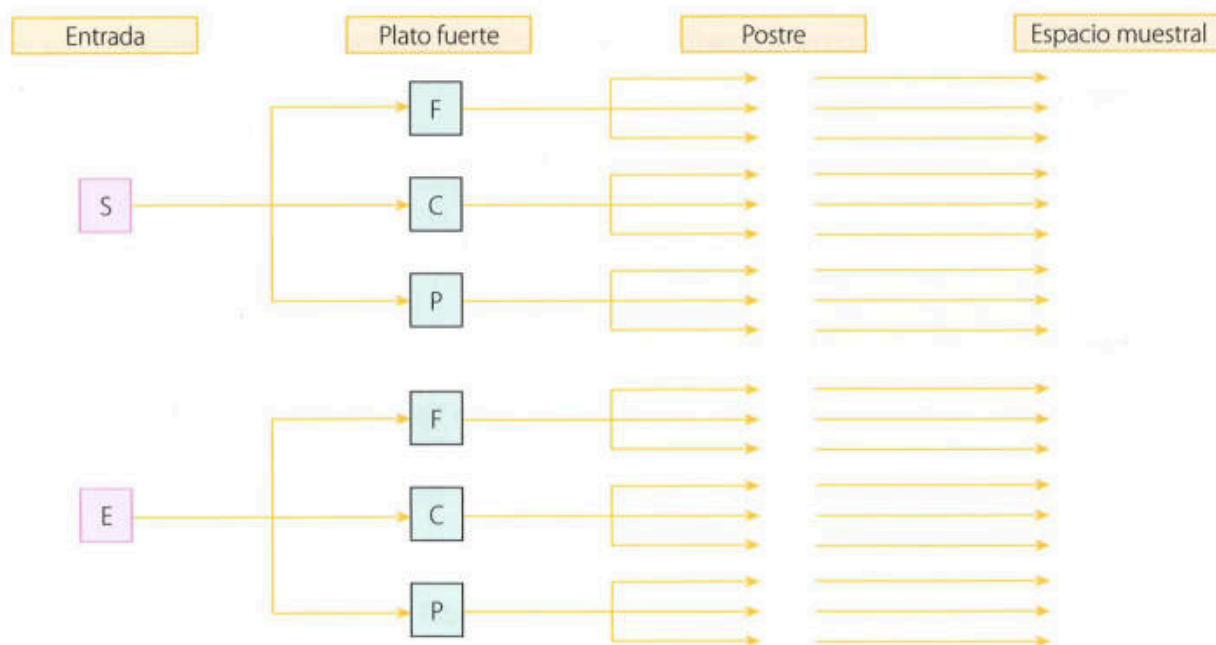
¿Cuál es la probabilidad de escoger un menú, cuyo segundo sea pargo en salsa blanca?

Menú del día		
Entrada	Plato fuerte	Postre
• Sopa de pollo • Empanada de camarón	• Filete de pollo • Carne a la plancha • Pargo en salsa blanca	• Helado • Pastel de chocolate • Frutillas con crema

Reflexiona

- ¿Qué dificultad tienes en escoger un menú? ¿Qué puedes hacer para saber el número de combinaciones?
- **Comprueba** la respuesta.

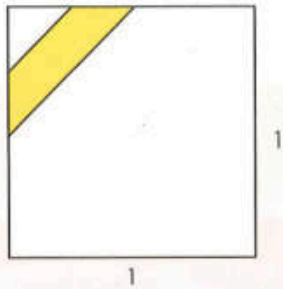
Completa el diagrama de árbol en tu cuaderno.



Resuelve la situación

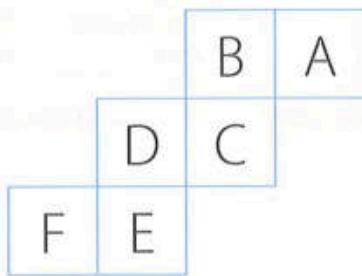
- **Realiza** una carta de menú de un restaurante donde haya: 3 entradas, 2 platos fuertes y 2 postres. **Diseña** el menú y **contesta**: ¿cuántas combinaciones se podría hacer con dicho menú?
- **Representa** en tu cuaderno un diagrama de árbol.

1. Calcula la superficie del área sombreada expresada en fracción.



Argumenta la solución:

2. Al doblar los cuadrados del gráfico, se forma un cubo. ¿Qué letra queda opuesta a B?



Argumenta la solución:

3. Tres martes en un mes coincidieron con fechas pares. ¿Qué día de la semana fue 21 de ese mes?

Argumenta la solución:

4. El promedio de estudiantes que ingresaron a una escuela, durante los cuatro años del periodo 2017-2020, fue de 325 estudiantes por año.

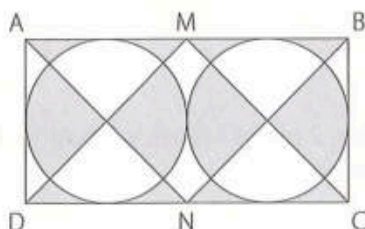
Si el promedio de ingreso, durante los cinco años del periodo 2017-2021, es 20 % más alto, ¿cuántos estudiantes entraron a la escuela en 2021?

Argumenta la solución:

5. Pepe le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de 3 cifras lo más grande posible que sea divisible para 8. José le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de 3 cifras lo menor posible y que sea divisible para 8. ¿Cuánto vale la diferencia entre ambos números?

Argumenta la solución:

6. Si el área del rectángulo es de 200 mm, ¿cuál es el área sombreada?



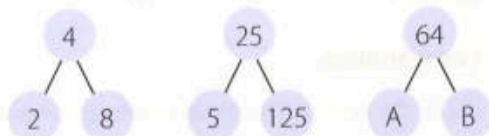
Argumenta la solución:

Recuperado de: <http://www.cangurocr.org/>

Refuerza tus aprendizajes

1. Lee y analiza.

¿Cuánto es la suma de $A + B$?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 520 c) 625
b) 512 d) 729

2. Lee y analiza.

La suma de dos números es 97 y su diferencia es 29. ¿Cuáles son dichos números?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 42 y 55 c) 34 y 63
b) 61 y 36 d) 33 y 64

3. Lee y analiza.

Si $(2^x \cdot 2^3) + 2^3 = 2^7$, entonces x es igual a:

Escoge la respuesta correcta.

- a) $x = 7$ c) $x = 4$
b) $x = 5$ d) $x = 3$

4. Lee y analiza.

¿Qué combinación alfanumérica continúa?

0A4, 1C8, 2E12, ...

Escoge la respuesta correcta.

- a) 3D14 c) 3G16
b) 4F10 d) 5F20

5. Lee y analiza.

¿Cuánto es el 30 % de los $\frac{3}{4}$ de 1 600?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 300 c) 800
b) 360 d) 1 200

6. Lee y analiza.

¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo que mide 12 cm de largo y de ancho la mitad de su largo?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{5}$
b) $6\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{6}$

7. Lee y analiza.

¿Cuánto suman las diagonales de todas las caras de un cubo que mide 12 cm de arista?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $12\sqrt{2}$ c) $6\sqrt{12}$
b) $72\sqrt{2}$ d) $24\sqrt{6}$

8. Lee y analiza.

¿Cuántas diagonales tiene un dodecágono regular?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 12 c) 26
b) 24 d) 54

9. Lee y analiza.

¿Qué número continúa la serie?

$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{6}, \frac{3}{12}, \frac{3}{36}, \dots$

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{3}{108}$ c) $\frac{3}{72}$
b) $\frac{3}{54}$ d) $\frac{3}{48}$

10. Lee y analiza.

¿Qué número falta en la serie?

5, 4, 7, 6, ?, 8, 11, 10, 13

Escoge la respuesta correcta.

- a) 7 c) 10
b) 9 d) 12

11. Lee y analiza.



Escoge la respuesta correcta.

- a)  c) 
- b)  d) 

12. Lee y analiza.

¿Qué valor falta en la tabla?

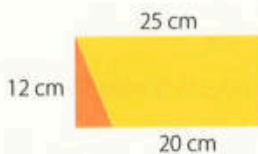
x	1	3	4	6
y	3	7	?	13

Escoge la respuesta correcta.

- a) 8 c) 10
b) 9 d) 11

13. Lee y analiza.

¿Cuánto mide el perímetro del triángulo?

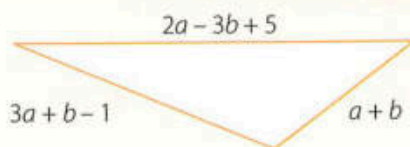


Escoge la respuesta correcta.

- a) 30 cm c) 25 cm
b) 27 cm d) 32 cm

14. Lee y analiza.

Calcula el perímetro del triángulo.



Escoge la respuesta correcta.

- a) $6a - b$ c) $6a - b + 4$
b) $6a + 4$ d) $4 - b$

15. Lee y analiza.

¿Cuál de las siguientes opciones equivale a la siguiente expresión $\frac{3}{\sqrt{3}}$?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\sqrt{3}$ c) 3
b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. Lee y analiza.

Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se forman enteros de dos cifras que sean múltiplos de 3 y de 5. ¿Cuántos enteros distintos se pueden formar?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 0 c) 3
b) 1 d) 4

17. Lee y analiza.

Víctor y Lorena corren alrededor de una pista. Los dos corren con velocidad constante: Víctor corre 5 vueltas en 12 minutos, mientras que Lorena corre 3 vueltas en 10 minutos. Cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Víctor se fijó que había pasado una cantidad entera de minutos. Entre los dos, ¿cuántas vueltas dieron?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 43 c) 86
b) 30 d) 90

18. Lee y analiza.

Con 6 palitos del mismo tamaño Lili formó primero un hexágono regular y después un triángulo equilátero. ¿Cuántas veces es más grande el área del hexágono que la del triángulo?

Escoge la respuesta correcta.

- a) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$
b) 2 d) 4

19. Lee y analiza.

El precio promedio de 5 pinturas era \$ 60. Cuando se vendió la más cara de las pinturas el precio promedio de las 4 restantes quedó en \$ 50. ¿A cuánto se vendió la pintura más cara?

Escoge la respuesta correcta.

- a) \$ 10 c) \$ 100
b) \$ 20 d) \$ 60

20. Lee y analiza.

¿Cuál de las siguientes es la máxima cantidad de puntos en los que se intersecan 4 líneas?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 2 c) 5
b) 3 d) 6

21. Lee y analiza.

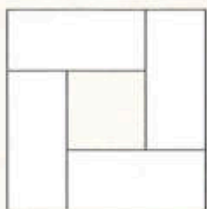
En un colegio el 60 % de los profesores que corresponden a 45, llegan a pie. Mientras que el 12 % de los profesores utilizan auto. ¿Cuántos profesores utilizan auto para ir al colegio?

Escoge la respuesta correcta.

- a) 4 c) 9
b) 6 d) 10

22. Lee y analiza.

El diagrama muestra cuatro rectángulos idénticos colocados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



Escoge la respuesta correcta.

- a) 16 cm c) 24 cm
b) 20 cm d) 32 cm

Luego de desarrollar y resolver los ejercicios anteriores, debes pintar la opción que consideres correcta, de acuerdo a las instrucciones.

Instrucciones

Correcto



Incorrecto



- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1) | A | B | C | D |
| 2) | A | B | C | D |
| 3) | A | B | C | D |
| 4) | A | B | C | D |
| 5) | A | B | C | D |
| 6) | A | B | C | D |
| 7) | A | B | C | D |
| 8) | A | B | C | D |
| 9) | A | B | C | D |
| 10) | A | B | C | D |
| 11) | A | B | C | D |
| 12) | A | B | C | D |
| 13) | A | B | C | D |
| 14) | A | B | C | D |
| 15) | A | B | C | D |
| 16) | A | B | C | D |
| 17) | A | B | C | D |
| 18) | A | B | C | D |
| 19) | A | B | C | D |
| 20) | A | B | C | D |
| 21) | A | B | C | D |
| 22) | A | B | C | D |



Avances científicos que se esperan para el 2022



Shutterstock, 1703465413

"La lucha contra el COVID-19 continuará siendo, este año, la principal preocupación en el ámbito científico. La creación de nuevas estrategias para combatir el virus y el refuerzo de las que ya se conocen podrían dar un giro a la pandemia. Es probable que este año se desarrolle una nueva generación de vacunas. Algunas de ellas continuarán basándose en el ARN mensajero, dirigidas a variantes específicas, pero también es posible que se utilicen otras tecnologías.

También se esperan avances en las vacunas para otros virus y enfermedades importantes, incluidos el VIH, la malaria y la enfermedad de Lyme.

La Física se enciende

Después de un cierre de varios años y un extenso trabajo de mantenimiento, el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) reiniciará sus operaciones en junio. Sus dos principales experimentos, ATLAS y CMS, se han actualizado y reforzado con nuevas capas de componentes detectores. Esto les permitirá recopilar más datos de los 40 millones de colisiones de protones que cada uno de ellos produce cada segundo.

Asalto lunar

Un ejército de orbitadores y módulos de aterrizaje de agencias espaciales y empresas privadas viajará a la Luna este año. La NASA lanzará Artemis I, que probará el sistema que llevará a los astronautas de regreso a la Luna en 2025. Y el orbitador Capstone realizará experimentos en preparación para Gateway, la primera estación espacial en la órbita lunar. India intentará aterrizar, suavemente, con su Chandrayaan-3 y llevará su propio rover. Lo mismo intentará Japón con la misión SLIM, mientras que Rusia lanzará el módulo de aterrizaje Luna 25, Corea del Sur con su orbitador Pathfinder y Japón, Hakuto-R, que transportará el rover Rashid de los Emiratos Árabes Unidos. China también planea completar su estación espacial, Tiangong, donde ha programado más de 1 000 experimentos que van desde la observación astronómica y de la Tierra hasta los efectos de la microgravedad, así como la radiación cósmica en el crecimiento bacteriano.



Shutterstock, 1493505407

Robot explorador ExoMars

Vida en Marte

La misión conjunta ruso-europea, ExoMars, partirá en septiembre rumbo a Marte con el rover Rosalind Franklin. Su objetivo es buscar signos de vida pasada.

Compromiso climático

Delegados de todo el mundo se reunirán en Sharm El-Sheikh, Egipto, en noviembre de 2022, para celebrar la COP27, otra ronda de conversaciones climáticas de las Naciones Unidas".

Fuente: https://www.abc.es/ciencia/abci-siete-avances-cientificos-esperan-para-2022-202201190117_noticia.html



Ficha de comprensión lectora

1. ¿Cuál es el tema central de la lectura?
2. **Indica** tres avances científicos que se prevén para 2022.
3. ¿Qué importancia tiene la generación de nuevas vacunas contra los virus y enfermedades que nos afectan?
4. ¿Qué le puedes sugerir a las personas que no se han vacunado contra la COVID-19?



Shutterstock, 2132249011.



Ficha de escritura académica

Actividad personal

1. ¿Cuál de los avances citados en la lectura te llamó la atención y por qué?
2. **Investiga** sobre otros posibles avances científicos y tecnológicos que se pueden dar para este año. **Haz** un resumen.
3. **Ingresa** a Internet y **busca** imágenes sobre el tema. **Realiza** un collage con estas imágenes.
4. **Elabora** una línea de tiempo sobre las exploraciones a la Luna. **Expón** tu trabajo en clase.



Shutterstock, 689441041.

Trabajo colaborativo

5. **Formen** grupos y **utilicen** las TIC de su preferencia para desarrollar la siguiente tarea: crear una infografía digital que resuma la lectura anterior.

Presenten su trabajo ante el resto de la clase. **Tomen** en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Debe haber un organizador gráfico.
- Hay que incluir imágenes.
- Los textos deben ser sintéticos y precisos.
- Hay que citar las fuentes de donde se obtuvieron textos e imágenes.



Shutterstock, 1458511118.

1. **Selecciona** el par de conjuntos al que corresponde el producto cartesiano:

$$Q \times P = \{(a, r), (a, s), (e, r), (e, s), (o, r), (o, s)\}$$

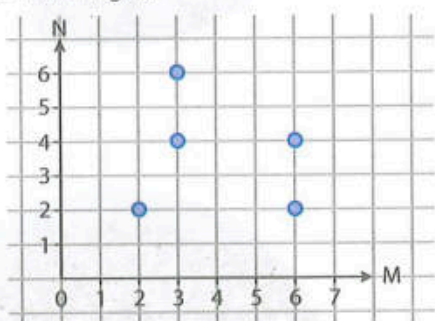
a) $Q = \{r, s\}$ y $P = \{a, e, o\}$

b) $Q = \{a, e, o\}$ y $P = \{r, s\}$

c) $Q = \{a, e, i, o\}$ y $P = \{r, s\}$

d) $Q = \{r, s\}$ y $P = \{a, e, i, o\}$

2. **Selecciona** el producto cartesiano que corresponde a la imagen.



a) $M \times N = \{(2, 2); (3, 4); (3, 6); (6, 2); (6, 4)\}$

b) $M \times N = \{(2, 2); (3, 4); (3, 6); (2, 6); (6, 4)\}$

c) $M \times N = \{(2, 2); (4, 3); (3, 6); (6, 2); (6, 4)\}$

d) $M \times N = \{(2, 2); (4, 3); (6, 3); (2, 6); (4, 6)\}$

3. **Conecta** la definición de cada relación construida a partir de los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 6, 9\}$ con el conjunto de pares ordenados que la conforman.

1. $R = \{(a, b) / a > b\}$ A) $R = \{(1, 2); (3, 6)\}$

2. $R = \{(a, b) / a = b - 1\}$ B) $R = \{(5, 9)\}$

3. $R = \{(a, b) / a = b - 4\}$ C) $R = \{(3, 2); (5, 2)\}$

4. $R = \{(a, b) / a = \frac{b}{2}\}$ D) $R = \{(1, 2)\}$

a) 1D; 2C; 3B; 4A

b) 2D; 2C; 4A; 3B

c) 2C; 2D; 4A; 3B

d) 2C; 2D; 3B; 4A

4. **Identifica** las afirmaciones verdaderas con respecto a la relación $R = \{(3, 3); (3, 9); (9, 3); (9, 9)\}$ establecida en el producto cartesiano $B \times B$, si $B = \{3, 9, 12\}$. Luego, **selecciona** la respuesta correcta.

1. R es simétrica.

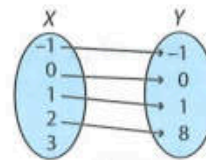
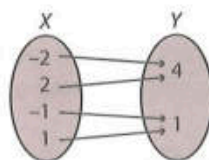
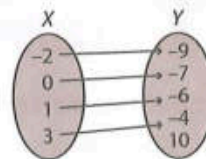
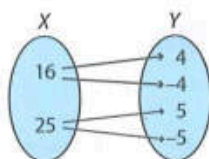
2. R es reflexiva.

3. R es transitiva.

4. R es simétrica y reflexiva.

a) 1 y 2 b) 1 y 3 c) 2 y 3 d) 2 y 4

5. **Analiza** las relaciones mostradas en las gráficas y **selecciona** el grupo de relaciones que son funciones.

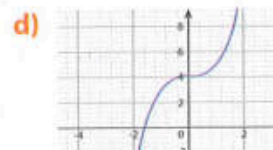
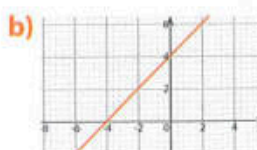
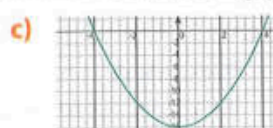
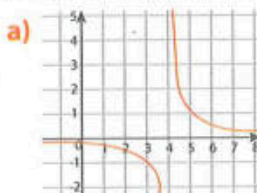


a) 1 y 2 b) 1 y 4 c) 2 y 3 d) 2 y 4

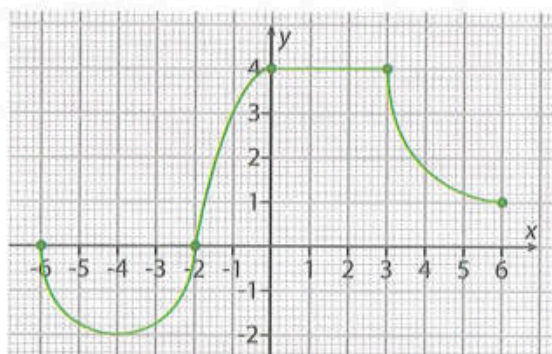
6. **Selecciona** el intervalo que corresponde al dominio de la función definida por la expresión algebraica $f(x) = \sqrt{5x - 1}$.

a) $\left[\frac{1}{5}; \infty\right]$ b) $\left[\frac{1}{5}; \infty\right)$ c) $\left]-\infty; \frac{1}{5}\right]$ d) $\left[\frac{1}{5}; \infty\right)$

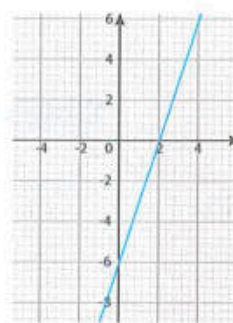
7. ¿Cuál es la función cuyo dominio es $\text{Dom} f: \mathbb{R} - \{4\}$?



8. **Elige** las afirmaciones verdaderas con respecto a la función mostrada en la gráfica, y **selecciona** la respuesta correcta.



1. Es monótona.
 2. Crece en el intervalo $[-6, -4]$.
 3. Decrece en el intervalo $[3, 6]$.
 4. Es constante en el intervalo $[0, 3]$.
- a) 1 y 2 b) 2 y 3 c) 2, 3 y 4 d) 3 y 4
9. **Expreso mis emociones.** Si al pasar un compañero a la pizarra para resolver un problema, cometes un error, ¿cómo actúas?
10. **Selecciona** la expresión algebraica que corresponde a la función de la gráfica.



- a) $f(x) = x + 2$
b) $f(x) = -x + 2$
c) $f(x) = 3x + 6$
d) $f(x) = -3x + 6$

11. **Selecciona** el punto que no pertenece a la recta $f(x) = -x + 5$:

- a) (2, -3) b) (-1, 6) c) (4, 1) d) (6, -1)

Coevaluación

12. **Relacionen** las funciones de la izquierda con las de la derecha, cuyas rectas son paralelas.

1. $f(x) = 2x - 6$ A) $f(x) = -0,25x + 1$
2. $f(x) = 0,5x + 1$ B) $f(x) = 2x + 6$
3. $f(x) = -2x - 6$ C) $f(x) = -2x + 6$
4. $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ D) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

- a) 1B; 2A; 3C; 4D
b) 1B; 2D; 3A; 4C
c) 1B; 2C; 3D; 4A
d) 1B; 2D; 3C; 4D

Autoevaluación

13. **Pinta** según la clave.

Puedo ayudar a otros

Resuelvo por mí mismo

Necesito ayuda

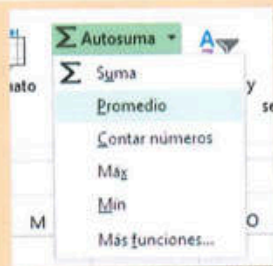
Estoy en proceso

Contenidos	Obtengo el producto cartesiano de dos conjuntos.	
	Identifico una función y determino dominio y rango.	
	Analizo la monotonía de una función.	
	Describo a la función lineal y a la afín.	
	Calculo la probabilidad de sucesos compuestos.	
	Identifico variaciones, permutaciones y combinaciones, y las calculo.	

Metacognición

- ¿Indagué con mi docente cuando tuve dudas?
- ¿Encontré aplicabilidad de los conocimientos adquiridos?
- ¿Colaboré en los trabajos grupales?

1. Para calcular la marca de clase, **ingresa** el límite inferior y superior en diferentes columnas. **Utiliza** el ícono promedio y **copia** el formato para las demás filas, arrastrando el *mouse* desde la esquina de la celda.



Archivo Editorial. (2020).

2. Para determinar la frecuencia acumulada, **copia** la primera fi; luego, en la columna de Fi, **utiliza** la fórmula = celda superior + celda de la misma fila pero de fi, esto es: **= G2 + F3**. **Arrastra** el mouse para copiar el formato.

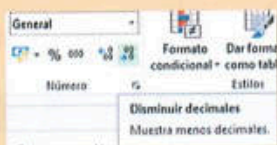
3. Para llenar la columna x.fi, **utiliza** la fórmula = columna x*columna fi, esto es **=E2*F2**. **Copia** el formato para toda la columna x.fi.

4. Usa el ícono *autosuma* para obtener la sumatoria en las columnas de fi y de x.fi.

Archivo Editorial, (2020).

5. **Selecciona** una celda para introducir la fórmula de la media aritmética = sumatoria de x.f/sumatoria de f (= H8/F8).

Manipula el ícono



hasta obtener una sola cifra decimal.

6. Una vez seleccionado el intervalo donde se encuentra la mediana, **escoge** otra celda para ingresar la fórmula $\left(\frac{N}{2} - f_{\text{ac}}$

$$= C4 + 2*((F8/2 - G3)/F4.$$

$$M_e = l_1 + A \left(\frac{\frac{N}{2} - F_{j-1}}{l_1} \right)$$

7. Selecciona el intervalo de la mediana e ingresa la fórmula

$$M_o = l_i + A \left[\frac{l_i - l_{i-1}}{(l_i - l_{i-1}) + (l_i - l_{i+1})} \right]$$

= 3 + 2*((F3 - F2)/(F3 - F2 + F3 - F4))

7. Selecciona el intervalo modal e **ingresa** la fórmula:

$$M_0 = I_1 + \lambda \left[\frac{I_1 - I_{1-1}}{(I_1 - I_{1-1}) + (I_1 - I_{m1})} \right], \text{ esto es:}$$

Archivo Editorial, (2020)

ecuador

ofce



REPÚBLICA
DEL ECUADOR



@MinisterioEducacionEcuador



@Educacion_Ec

www.educacion.gob.ec